الهندسة التفاضلية

إعداد

الأستاذ الدكتور

نصار حسن عبد العال السلمي

أستاذ الرياضيات

بكلية التربية جامعة البنات - الرياض

كلية العلوم — جامعة أسيوط

١٤٢٩هـ - ٢٠٠٨م

مكتبة الرشد

ناشرون

توجيه إلى الزميل المحاضر

الكتاب مرجع أساسي وموضوعاته تدرس في الجامعات العربية وتصلح لأكثر من مقرر دراسي. حيث أنه مرن ويقبل الحذف والإضافة مع ملاحظة ما يلي:

الباب الأول: **مقدمة** هامة لمحتويات الكتاب.

الباب الثاني: **اختياري** ويمكن حذفه بالاعتماد على خلفية الطالب السابقة.

الباب الثالث والرابع والسادس: مادة أساسية في المقرر.

الباب الخامس (تطبيقات على المنحنيات) **اختياري** ويمكن للمحاضر أن يشرح تعريف (٥-١)، (٥-٢)، (٥-٣)، (٥-٥)، (٥-٧)، (٥-٨)، (٥-٩)، (٥-١٠) ويترك الباقي كتمارين محلولة للطالب.

الباب السابع والثامن والتاسع والعاشر: أساسي في المقرر، ويمكن للمحاضر حذف (٨-٦)، (٨-٧)، (٩-٥)، (١٠-٤).

الباب الحادي عشر والثاني عشر (تطبيقات على السطوح): **اختيارية** ويمكن للمحاضر أن يشرح تعريف (١١-١)، (١١-٢) ويترك الباقي كتمارين محلولة ويمكن حذف الأجزاء (١١-٣)، (١١-٤). في الباب الثاني عشر يشرح المحاضر الجزء (١٢-١) ويمكن حذف الأجزاء (١٢-٢)، (١٢-٣)، (١٢-٤) تبعاً للوقت المتاح.

الباب الثالث عشر والرابع عشر: أساسي في المقرر ويمكن حذف الأجزاء (١٣-٢)، (١٣-٣)، (١٤-٣)، (١٤-٥).

الباب الخامس عشر: **اختياري** ويمكن حذفه بدون تأثير على تتبع محتويات الكتاب (بداية مقرر آخر).

الباب السادس عشر (تزيل) **اختياري** ويمكن حذفه أو إعطاء فكرة سريعة في حدود ما يلزم للمقرر التدريسي.

قد يرغب المحاضر في إضافة كل أو جزء من الأبواب الاختيارية إلى المادة الأساسية تبعاً للوقت المسموح به ولخلفية الطالب مع ملاحظة أن الحذف والإضافة يتم بطريقة متوافقة (منسجمة) بحيث لا تخل بتتابع محتويات المقرر الدراسي.

المؤلف

بسم الله الرحمن الرحيم

وبه نستعين

مقدمة

في علم الرياضيات، كما في أي علم، يبرز للعيان اتجاهين ... أحدهما الميل إلى الأفكار المجردة التي تُبلور العلاقات المتأصلة في المادة المحيرة قيد الدراسة، ومن ثم هذا الاتجاه يربط هذه المادة في مجموعة متماسكة من الأفكار والمبادئ بأسلوب مرتب ومنهجي. والاتجاه الآخر هو الميل إلى الفهم البديهي الذي يعزز الإدراك المباشر لموضوع الدراسة وعلاقته الطبيعية بها، وهذا يؤكد المعنى الملموس (concrete) لهذه العلاقات.

وفي الهندسة .. الاتجاه المجرد يقود إلى نظام رائع من النظريات في كل من الهندسة الجبرية والهندسة الريمانية والتوبولوجي والهندسة التفاضلية. هذه النظريات لها استخدامات واسعة في التفكير والاستنتاج المجرد وكذلك في الحسابات الرمزية في الجبر والهندسة.

وعلى الرغم من ذلك فإنه مازال صحيحاً كما كان من قبل أن ذلك الإدراك والفهم البديهي يلعب دوراً رئيسياً في الهندسة. وهذه البديهية الملموسة لها قيمة عظيمة ليس فقط للباحث العلمي، وإنما لأي شخص يرغب في دراسة وإدراك نتائج البحوث والدراسات في الهندسة.

لقد اعتبر الكثيرون أن مفاهيم تشكيلات الهندسة المختلفة من أكثر المواضيع الرياضية المعقدة والتي يصعب الحصول عليها، وهكذا فإنه من العدل

القول أن معظم المتخصصين في الرياضيات يحسون بعدم ارتياح في فهم الهندسة لما لها من ارتباط وتداخل بأفرع الرياضيات الأخرى.

وعلى ذلك فإن غايتنا من هذا العرض هي تقديم لموضوع الهندسة التفاضلية وهو من أهم مواضيع الهندسة في العصر الحديث . كما هو موجود حالياً وكما نراه بالبديهيات والمفاهيم. هذا العرض مبني على أساس من الأفكار البديهية، ومن ثم ربطها في شكل مفاهيم الهندسة التفاضلية الذاتية والخارجية، والتي لها علاقة وثيقة بمواضيع كثيرة ومتعددة في الحياة ... حيث قال **هلبرت** space × being = actions ليذلل أن الهندسة مؤشر للوجود.

قبل الميلاد بـ ٣٠٠ عام، قام العالم **إقليدس** Euclides بعرض كتابه بعنوان الأصول The elements الذي أصبح الكتاب الشهير في الهندسة، والذي وضع فيه مسلماته الخمس التي اعتمدت عليها جميع نظرياته، ولكنه حاول تجنب استخدام مسلمته الخامسة والخاصة بالتوازي قدر الإمكان في إثباتاته، وبالتحديد الـ ٢٨ نظرية التي أثبتها في كتابه لم يستخدم في براهينها المسلمة الخامسة. ولكن مسلمات إقليدس كان بها قصور، تم معالجة هذا القصور من قبل **هلبرت** Hilbert فيما بعد والذي أصبح نظام المسلمات الكامل الذي وضعه **هلبرت** هو الأساس للهندسة. بعد ذلك حاول العلماء استنتاج المسلمة الخامسة من الأربعة الأولى ولكن محاولتهم باءت بالفشل، ومن هذه المحاولات نشأت أنواع أخرى من الهندسة تختلف عن هندسة إقليدس في المسلمة الخامسة وتسمى **بالهندسة اللاإقليدية**، ومن العلماء الذين قاموا بهذه المحاولات : **بوي** Bolyai - **لوباتشفيسكي** Lobachevsky - **ريمان** Riemann وغيرهم ... .

العالم **بلترامي** Beltrami هو الذي وضع دراسات العالمين **بوي** **ولوباتشفيسكي** عن الهندسة اللاإقليدية في نفس أهمية الهندسة الإقليدية، وفي عام ١٨٦٨م كتب بحثاً بعنوان :

Essay on the interpretation of non-Euclidean geometry

والذي وضع فيه نموذج لهنسة لاإقليدية ذات بُعد يساوي ٢ في هندسة إقليدية ذات بُعد يساوي ٣. هذا النموذج تم الحصول عليه من خلال سطح دوراني ناتج عن الدوران لمنحنى التراكتركس tractrix حول خطه التقاربي، هذا النموذج يسمى شبه الكرة Pseduo-sphere.

في عام ١٨٧١ قام العالم **كلاين** Klien بإتمام الدراسة حول ما بدأه بلترامي حول الهندسة اللاإقليدية، ومضى كلين في دراساته وأعطى نماذج أخرى للهندسة اللاإقليدية مثل هندسة **ريمان الكروية** Riemann's spherical geometry. أعمال **كلاين** كانت تعتمد على تعريف للمسافة أعطاه العالم كايلي Cayley في عام ١٨٥٩ عندما قام بإعطاء تعريف معمم للمسافة.

ولقد وضح **كلاين** بالاعتماد الكلي على نظرية الزمر أن هناك ثلاثة أنواع مختلفة للهندسة وهي هندسة **لوباتفيسكي وبوي** وتسمى بالهندسة الزائدية hyperbolic، وهندسة **ريمان** وتسمى بالهندسة الناقصية elliptic، والهندسة الإقليدية. كل هذه الأنواع اعتمدت على المسلمات الأربعة الأولى التي وضعها **إقليدس** ولكن لكل منها نظرتها الخاصة لمسلمة التوازي.

موضوع هذا الكتاب هو الهندسة التفاضلية المصاحبة للنماذج الهندسية المختلفة حيث أن واقع الحياة العملية مليٌ بالنماذج الهندسية التي تصف واقع حياتي نعيشه، إذاً ما هو النموذج الهندسي؟

النموذج الهندسي هو نموذج يقترب من الواقع بقدر الإمكان بحيث تتوافر فيه أغلب الخصائص التي يحتاجها الواقع مثل نوعية النقاط والشكل ونوع

المشكلة المراد دراستها ومن النماذج المشهورة نموذج سطح الكرة الأرضية ونماذج فراغات النسبية الخاصة والعامة، وكذلك نماذج التصميم المختلفة والتي تحتاج إلى تعاون كبير بين تخصصات مختلفة مثل الهندسة والتحليل العددي والحسابات العلمية.

هذا الكتاب يتكون من ثلاثة أجزاء تفصيلها كالآتي :

الجزء الأول (مقدمة تاريخية ومراجعة مختصرة لما له علاقة بموضوع الكتاب):

الباب الأول: يعرض نبذة تاريخية عن نشأة الهندسة وتطورها من خلال نظام إقليدس المسلماتي حتى وصلت إلينا بشكلها الحالي ويهتم كذلك بدراسة وعرض نظام هلبرت المسلماتي والذي تم من خلاله معالجة القصور في نظام إقليدس ونبين كذلك في هذا الباب كيف ظهرت الهندسة التحليلية وذلك بالاعتماد على مسلمات هلبرت إلى أن وصلنا إلى الهندسة التفاضلية وأهمية دراستها وماذا نعني بموضوع الهندسة التفاضلية.

الباب الثاني: يعتبر مراجعة لما سبق دراسته من هندسة تحليلية وجبر خطي وتحليل الدوال الاتجاهية والتي درسها الطالب في مقرر تفاضل وتكامل (٤) والجبر الخطي (متطلب سابق من حساب التفاضل والتكامل الاتجاهي).

الجزء الثاني (الهندسة الذاتية والخارجية لمنحنيات الفراغ الثلاثي):

الباب الثالث: يحتوي على مفهوم المنحنى وطرق تمثيل المنحنى في الفراغ وخصوصاً التمثيل البارامتري (الوسيطي) المنتظم والتمثيل الطبيعي وطول قوس المنحنى ومعادلة المماس والعمود الأساسي والثانوي وكذلك المستوى العمودي واللاصق والمقوم عند أي نقطة على المنحنى.

الباب الرابع: وفيه نقدم بالدراسة والتحليل الهندسة الخارجية للمنحنى ونعني بها الانحناء واللىّ وإطار فرينيه المتحرك وصيغ سيريه - فرينيه التفاضلية ونطبق كل ذلك على بعض المنحنيات وخصوصاً المنحنيات الحلزونية.

الباب الخامس: يحتوي على المنحنيات المشهورة المصاحبة لمنحنى فراغ معلوم مثل المميز الكروي والمحل الهندسي لمراكز دائرة الانحناء وكرة الانحناء والمنحنى الناشر والمنتشر ومنحنيات برتراند.

الباب السادس: يقدم التمثيل القانوني لمنحنيات الفراغ والنظرية الأساسية لمنحنيات الفراغ من خلال المعادلات الذاتية.

الجزء الثالث (دراسة الهندسة الذاتية والخارجية للسطوح في الفراغ الثلاثي):

الباب السابع: يحتوي على التمثيل البارامتري المنتظم والشبكة البارامترية على السطح - المستوى المماس للسطح وحقل متجه العمودي على السطح - توجيه السطح ومناطق الشذوذ على السطح.

الباب الثامن: يتعرض للهندسة الذاتية للسطح من خلال تعريف الصيغة الأساسية الأولى (الصيغة المترية) وحساب الزاوية والمساحات على السطح وكذلك تعريف التساوي القياسي والتطابق بين السطوح.

الباب التاسع: يتعرض للهندسة الخارجية للسطح من خلال تعريف الصيغة الأساسية الثانية والانحناء العمودي والانحناء الجاوسي والمتوسط وخطوط الانحناء على السطح وكذلك الاتجاهات الأساسية.

الباب العاشر: يقدم الصيغة الأساسية الثالثة وراسم جاوس (الصورة الكروية) وتصنيف نقاط السطح من خلال مميز ديوبين وصيغة أويلر وعلاقتها بالخطوط التقاربية على السطح وكذلك صيغ ردوريجز التفاضلية.

الباب الحادي عشر: يتناول السطوح المسطرة والسطوح القابلة للفرد واستخدام ما تعلمه الطالب في الأبواب السابقة وتطبيقه على السطوح المسطرة.

الباب الثاني عشر: يعتبر تطبيق للباب التاسع والعاشر على السطوح الدورانية وتقديم تعريف للسطوح الدورانية ذات الانحناء الثابت مع التوضيح بالرسم المجسم وطرق تمثيلها بارامترياً.

الباب الثالث عشر: يقدم النظرية الأساسية للسطوح ومعادلات جاوس - فينجارتن وصيغ جوداذي - منيردا والإطارات المتحركة على السطح.

الباب الرابع عشر: يحتوي على الانحناء الجيوديسي لمنحنى واقع على السطح وكذلك تعريف الخطوط الجيوديسية والحصول على المعادلات التفاضلية التي تحكم ذلك.

الباب الخامس عشر: وهو يعطي مدخل مختصر لعديد الطيات التفاضلي مع توضيح العلاقة بكل ما تعرضنا له في الأبواب السابقة وفيه نرى أن المنحنى والسطح هو عديد طيات أحادية وثنائية البعد على الترتيب.

كذلك يحتوي الكتاب على ملحق (تزيل) وهو **الباب السادس عشر** ويشتمل على كل الأساسيات في هندسة التحويلات والتي تعرضنا لها في أبواب الكتاب.

هذا الكتاب كتب بأسلوب علمي بسيط معتمداً على الخلفية العلمية للطالب من حيث أنه درس المنطق الرياضي والجبر وحساب التفاضل والتكامل ٣ ، ٤ وكذلك مفاهيم الهندسة الإقليدية والتي من خلالها ظهرت الهندسة اللاإقليدية.

لقد نهجنا في معالجة مواضيع هذا الكتاب النهج الحديث وهو النهج المنطقي الذي ينطلق من مسلمات نقبلها دون برهان ومن مفاهيم نفهمها دون

تعريف ثم ننتقل إلى الحقائق الهندسية فلا نقبل واحدة منها دون برهان رياضي صحيح وتوضيح ذلك من خلال الأشكال الهندسية المجسمة والفراغية والتي تم رسمها عن طريق الحزم الجاهزة في الحاسب الآلي.

وفي نهاية كل باب توجد مجموعة من التمارين لتثبت المعلومات وتساعد على التفكير والتذكر منها ما هو مشابه للأمثلة التي وردت داخل الباب ومنها ما هو جديد في صياغته وأفكاره.

في نهاية الكتاب قدمنا قائمة المراجع التي اعتمدنا عليها في صياغة وإعداد هذا الكتاب.

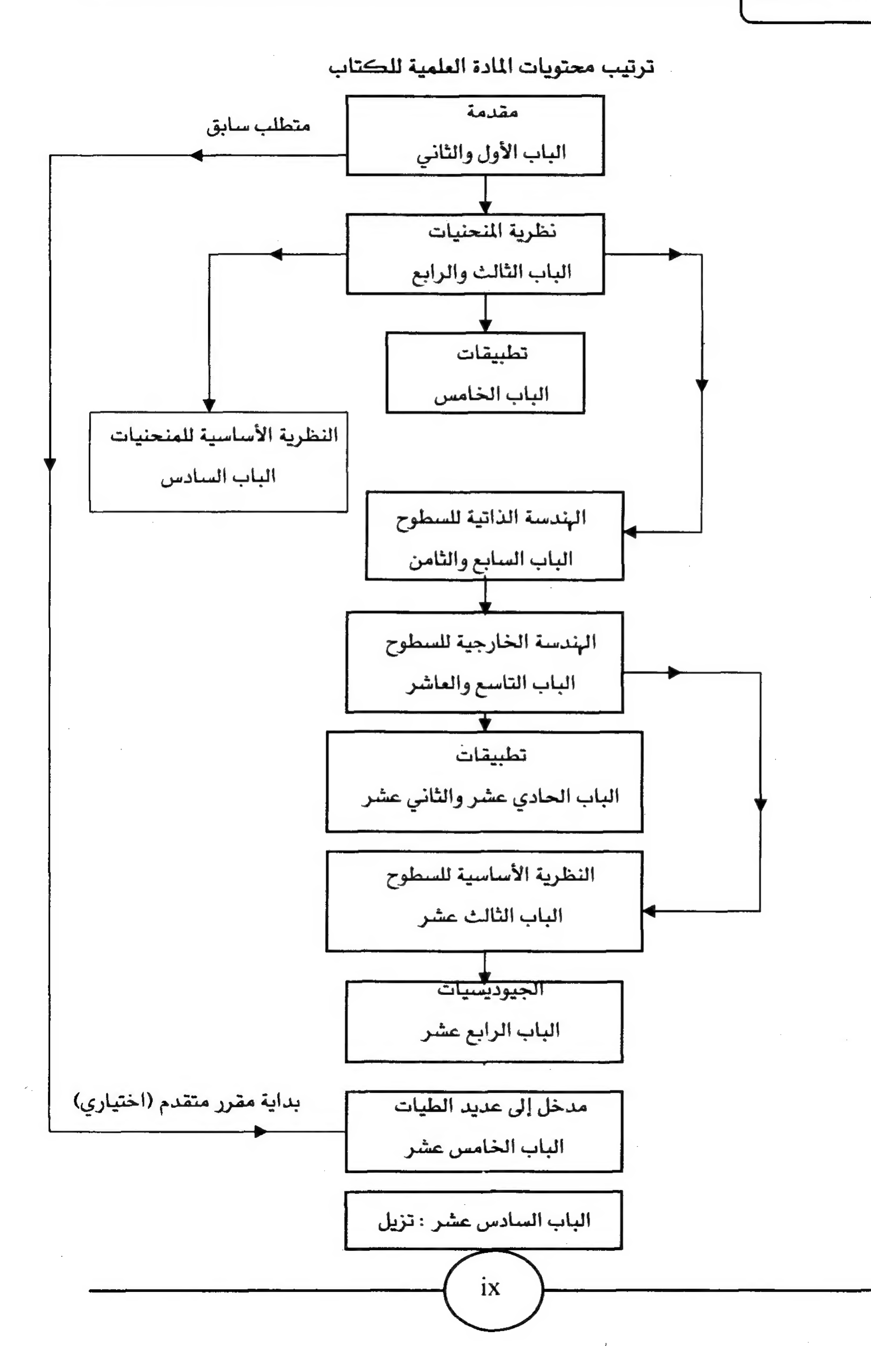
- الكتاب يحوي مقررات تدريسية لطلاب كليات التربية للبنات والبنين وكذلك كليات المعلمين والمعلمات وكليات العلوم في السعودية والدول العربية بالإضافة إلى أن أجزاء كثيرة من هذا الكتاب تدرس من خلال مقررات دراسية في الجامعات المصرية والعربية.

وفي النهاية نأمل أن يكون هذا الكتاب عوناً للطالب من خلال مساعدة أساتذته ونتمنى من الله أن نكون قد وفقنا في عرض مادة الكتاب بأسلوب شيق ومحبب لدراسة الهندسة وليس البعد عنها ، ونسأل الله أن يكون هذا العمل خيراً لوطننا العربي والإسلامي والحمد لله رب العالمين.

المؤلف

نصار السُلمي

استاذ الرياضيات بجامعة اسيوط - مصر


ترتيب محتويات المادة العلمية للكتاب
مقدمة
الباب الأول والثاني
متطلب سابق
نظرية المنحنيات
الباب الثالث والرابع
تطبيقات
الباب الخامس
النظرية الأساسية للمنحنيات
الباب السادس
الهندسة الذاتية للسطوح
الباب السابع والثامن
الهندسة الخارجية للسطوح
الباب التاسع والعاشر
تطبيقات
الباب الحادي عشر والثاني عشر
النظرية الأساسية للسطوح
الباب الثالث عشر
الجيوديسيات
الباب الرابع عشر
بداية مقرر متقدم (اختياري)
مدخل إلى عديد الطيات
الباب الخامس عشر
الباب السادس عشر : تزيل

محتويات الكتاب

الموضـــــــــوع | **رقم الصفحة**

الباب الثاني:

تحليل الدوال الاتجاهية

الجزء الثاني: الهندسة الذاتية والخارجية لمنحنيات الفراغ الثلاثي:

الباب الثالث:

المنحنيات في الفراغ الثلاثي

الموضـــــــــــــــــوع		رقم الصفحة

الباب الرابع:

الهندسة الخارجية لمنحنى الفراغ

الباب الخامس :

المنحنيات المصاحبة لمنحنى الفراغ

الباب السادس:

النظرية الأساسية للمنحنيات في الفراغ

الموضـــــــــــــــوع		رقم الصفحة

الجزء الثالث: الهندسة الذاتية والخارجية للسطوح في الفراغ الثلاثي:

الباب السابع :

السطح المنتظم في الفراغ الثلاثي

الباب الثامن :

الهندسة الذاتية للسطوح في الفراغ الثلاثي

	الموضـــــــــــــــــوع	رقم الصفحة

	الموضـــــــــــوع	رقم الصفحة
٣.١١	السطوح المسطرة القابلة للفرد (البسط)	٣٩٧
٤.١١	غلاف عائلة المستويات	٣٩٩
	تمارين (١١)	٤٠٢
الباب الثاني عشر:		
	السطوح الدورانية في الفراغ الثلاثي	
١.١٢	البناء الهندسي للسطوح الدورانية	٤٠٤
٢.١٢	السطوح الدورانية ذات الانحناء المتوسط الثابت	٤١٢
٣.١٢	السطوح الدورانية ذات الانحناء الجاوسي الثابت	٤١٩
٤.١٢	تزيل عن التكاملات الناقصية	٤٢٦
	تمارين (١٢)	٤٣٠
الباب الثالث عشر:		
	النظرية الأساسية للسطوح	
١.١٣	المعادلات الأساسية على السطح المنتظم	٤٣٣
٢.١٣	إطار عياري متعامد على السطح المنتظم	٤٤٨
٣.١٣	الشروط التكاملية على السطح المنتظم	٤٥٢
	تمارين (١٣)	٤٥٨
الباب الرابع عشر:		
	الانحناء الجيوديسي والخطوط الجيوديسية	
١.١٤	الانحناء الجيوديسي	٤٦١
٢.١٤	الإطارات المصاحبة لمنحنى واقع على السطح	٤٦٤
٣.١٤	صيغ داربوا التفاضلية	٤٧١
٤.١٤	المنحنيات الجيوديسية على السطح	٤٧٦

الجزء الأول (مقدمة تاريخية ومراجعة لما سبق دراسته)

الباب الأول

مقدمة تاريخية (تصنيف الهندسات)

A Brief History

في هذا الباب نقدم نبذة تاريخية عن نشأة الهندسة وتطورها ، من قبل الميلاد حتى وصلت إلى ذلك البناء العظيم في العصر الحديث، لما لها من تداخلات في أفرع العلوم المختلفة وتطبيقاتها في مجالات الحياة العملية. ونبين كيف أن مفهوم النظرة للهندسة كأشياء محسوسة تغير ليصبح مفهوم مجرد وهذا التجريد هو صلب الواقع العملي كما ظهر في أعمال كل من ريمان ولوباتشفيسكي والذي ثبت فيما بعد مدى ملائمة هذه الهندسات لكثير من مشاكل الحياة. وهذا العرض مبني على نظام المسلمات الذي قامت عليه الهندسة وتصنيفاتها المختلفة. وفي النهاية نركز على موضوع الدراسة في هذا الكتاب وهو الهندسة التفاضلية وتوضيح مدى أهمية دراسة هذا التخصص لما له من ارتباط وثيق بأفرع الرياضيات المختلفة وكذلك التطبيقات العملية. الخطوط العريضة التي نتناولها في هذا الباب تعتبر خطة لموضوعات الكتاب نحاول بإذن الله تغطيتها وتنفيذها.

(1.1) المسلمات والفرضيات والتعاريف :

Definitions, Postulates and Axioms :

يرجع تاريخ الهندسة إلى الماضي السحيق حيث ظهرت في محاولات البابليون والمصريون القدماء لتأسيس حضاراتهم العريقة. وفي القرن السابع قبل الميلاد بدأ تطور الهندسة على أيدي المدارس الأغريقية. كثير من الحقائق الأساسية تم الحصول عليها في القرن السادس والخامس قبل الميلاد وظهرت في مفهوم النظرية وكيفية البرهان.

وفي القرن الثالث قبل الميلاد أصبح الأغريق لهم معرفة عميقة بالهندسة، ليس فقط في تراكم عدد كبير من الحقائق الهندسية ولكن في طرق البرهان. ولهذا كانت هذه الفترة موجهة لتجميع كل النتائج معاً ووضعها في ترتيب منطقي Logical order كذلك قام الإغريق بأعمال كثيرة من أجل تطوير الهندسة، ولكنها لم تظهر إلينا، وخصوصاً بعد ظهور عمل إقليدس الشهير والذي أسماه الأصول Euclid's Famous Elements . هذا العمل يحتوي على ثلاثة عشر كتاباً تفصيلها كالآتي :

الكتب الست الأولى احتوت على دراسة الأشكال المستويةPlane Geometry، الكتب من الحادي عشر إلى الثالث عشر تخصصت في دراسة الأشكال المجسمة Solid Geometry، الكتب الباقية تخصصت في دراسة الحساب Arithmetic بشكل هندسي Geometric Form.

إذاً الأصول لإقليدس احتوت على المفاهيم الأساسية في الهندسة Elementary Geometry. هذه الكتب قسمت إلى **ثلاثة مجموعات** هي :

(٢.١) المجموعة الأولى: التعاريف Definitions نوردها باختصار :

١. النقطة هي شيء لا أجزاء له.

٢. المنحنى هو طول بلا عرض Breadth less

٣. الأطراف Extremities للخط المستقيم هي نقاط.

٤. الخط المستقيم هو منحنى متماثل بالنسبة لكل نقاطه.

٥. السطح هو شيء له طول وعرض فقط.

٦. أطراف السطح هي منحنيات.

٧. سطح المستوى هو سطح يقع بالتماثل مع خط مستقيم عليه.

٨. الزاوية المستوية Plane Angle هي الميل Inclination لكل من خطين في المستوى على الآخر والذي يقطع كل منهما ولا يقعا على خط مستقيم واحد.

بعد هذه التعاريف قام إقليدس بوضع المجموعة الثانية (الفرضيات) Postulates والثالثة (المسلمات) Axioms والتي تثير حقائق Assertions تقبل بدون برهان.

(٣،١) المجموعة الثانية: الفرضيات Postulates تحوي خمس فرضيات هي:

١. يمكن رسم خط مستقيم وحيد بين نقطتين.

٢. كل قطعة مستقيمة finite line أو segment يمكن مدها extension لتصبح خط مستقيم. أي الخط المستقيم اتحاد عدد لانهائي من القطع المستقيمة.

٣ـ يمكن رسم دائرة مركزها عند أي نقطة ونصف قطرها أي عدد، بمعنى لأي نقطتين مختلفتين p, q يمكن رسم دائرة مركزها p ونصف قطرها هو طول القطعة المستقيمة الواصلة بين p, q.

٤. كل الزوايا القائمة right angles متطابقة equal.

٥ـ إذا قطع مستقيم مستقيمين آخرين بحيث تكونت زاويتان داخليتان interior angles مجموع قياسهما أقل من قائمتين وعلى جانب واحد من الخط القاطع فإن الخطان يتقاطعان إذا مدا على هذا الجانب.

وهذه الفرضية سميت الفرضية الخامسة أو فرضية التوازي. الهندسة التي تدرس الأشكال الهندسية مع تبني المسلمة الخامسة هذه تسمى الهندسة الإقليدية Euclidean Geometry.

(٤،١) المجموعة الثالثة: المسلمات Axioms وتحتوي على تسع مسلمات هي:

١. الكميات التي تساوي كل منها كمية أخرى محددة تكون كلها متساوية.

٢. إذا أضيفت كميات متساوية إلى كميات متساوية فإن النتائج تكون متساوية.

٣. إذا طرحت كميات متساوية من كميات متساوية فإن المتبقيات تكون متساوية.

٤. إذا أضيفت كميات متساوية إلى كميات مختلفة فإن النتائج مختلفة.

٥. الكل أكبر من أي جزء من أجزائه.
٦. إذا الكميات المتساوية تضاعفت doubled فإن النتائج متساوية.
٧. إذا الكميات المتساوية تناصفت halved فإن النتائج متساوية.
٨. الأشياء التي تتطابق coincide مع شيء أخر تكون مساوية equal لنفس الشيء.
٩. الخطان المستقيمان لا يمكن أن يحدا enclose أي فراغ.

اعتمد إقليدس على هذه المجموعات من التعاريف والفرضيات والمسلمات في ترتيب نظريات الهندسة ترتيباً منطقياً Logical order. بمعنى أن برهان أي نظرية يعتمد على ما سبقها من نتائج وفرضيات ومسلمات، وهذا النظام للبناء الهندسي يسمى النظام المسلماتي Axiomatic System . والهندسة المعرفة من خلال هذا النظام تسمى هندسة المسلمات ومجموعات المسلمات والتعاريف والفرضيات تسمى بمقومات الهندسة Substantiation of Geometry.

الأصول لإقليدس احتوى على الأساسيات الهامة في الهندسة واعتبر نموذج جيد لزمن طويل ولكن به قصور defect حيث أن صياغته لا تتمشى مع التطور الحديث في الرياضيات والتعاريف اعتمدت على الوصف الهندسي للأشكال موضوع الدراسة، كما أن البراهين تعتمد على حقائق رياضية سابقة لم تبرهن ولم توضع في نظام المسلمات الذي وضعه إقليدس.

لوحظ القصور في الأصول لإقليدس من قبل كثير من العلماء Scholars . خصوصاً أن إقليدس وضع التناسب proportional بين الأطوال والأحجام والمساحات ولم يقدم لنا كيفية قياسها بطريقة دقيقة والتي عالجها **ارشميدس** Archimedes فيما بعد من خلال خمس فرضيات تسمى **فرضيات أرشميدس** Archimedes Postulates وهي :

(١) من بين كل المنحنيات التي تصل بين نقطتين في المستوى الإقليدي يكون الخط المستقيم هو الأقصر. وهذه الفرضية تناظر في الوقت الحالي خط أقصر بعد Geodesic على أي سطح أو عديد طيات وسوف نتعرض له في الباب الرابع عشر إن شاء الله.

(٢) من بين كل السطوح التي لها نفس المحيط المستوى Plane perimeter يكون المستوى هو الأصغر. وهذه الفرضية حالياً تناظر ما يسمى بالسطوح المستصغرة Minimal surface التي نتعرض لها في الباب التاسع والعاشر والثاني عشر.

(٣) المنحنيين في نفس المستوى الذي لهما نفس نقطة البداية والنهاية يكونا غير متطابقين إذا كان كل منهما مقعر convex وأحدهما مغلف (محتوى) بالآخر enclosed وبالخط المستقيم الواصل بين نهايتي المنحنيين.

(٤) السطحين الذي لهما نفس المحيط المستوي يكونا غير متطابقين إذا كان كل منهما مقعر وأحدهما مغلف بالأخر وبالمستوى الذي له نفس المحيط.

(٥) إذا كان $a < b$ فإنه يوجد عدد n بحيث $n\,a > b$.

المسلمات هذه تعتبر أساسيات **الهندسة المترية** (المعرف فيها دالة القياس) Metric Geometry والتي سوف نتعرض لها في الهندسة التفاضلية للمنحنيات والسطوح في الفراغ الثلاثي.

أغلب الأعمال التي ظهرت حول أساسيات الهندسة كانت تحاول إسقاط مسلمة التوازي (المسلمة الخامسة لإقليدس) Euclid's fifth posttulate من فرضيات إقليدس لأنها كانت تبدو معقدة جداً.

(٥.١) الفرضية الخامسة The Fifth Postulate

كلنا يعرف القاعدة الأساسية التي تلعبها المسلمة الخامسة، من دراسة الهندسة الأولية Elementary Geometry حيث أنها تشكل أساس نظرية توازي الخطوط المستقيمة parallel lines وكل ما يتعلق بها مثل التشابه similarity للأشكال وحساب المثلثات Trigonometry.

تعلم الطالب أثناء مرحلة التعليم ما قبل الجامعي، في كتب الهندسة، المقارنة بين الأشكال الهندسية مثل القطع المستقيمة والزوايا والمثلثات حيث أن هذه الأشكال

تكون متطابقة (متساوية) equal إذا ما تطابقت coincident من خلال حركة motion (إنتقال ودوران أو انعكاس كما نرى في الباب السادس عشر).

مفهوم الحركة، حتى الوقت الذي وضع فيه إقليدس نظام المسلمات، لم يكن معرف تعريف جيد وسوف نتناوله كمراجعة في الباب السادس عشر والذي يتناول هندسة التحويلات (الحركة).

ومن النظريات الأساسية في الهندسة المستوية تلك النظريات التي تعالج تطابق المثلثات equality وتعامد perpendicular الخطوط وميل الخطوط المستقيمة inclined lines.

وبالتالي يمكن إعادة صياغة **مسلمة التوازي** كالآتي :

يتوازى الخطان المستقيمان إذا لم يحتويا أي نقطة مشتركة بينهما (لا يتقاطعا).

هذه الصياغة أدت إلى برهان أن :

من أي نقطة خارج مستقيم (ليست واقعة عليه) معطى يمكن رسم مستقيم واحد فقط يوازي الخط المعطى.

وهذه المسلمة يمكن صياغتها كما يلي :

"يوجد خط مستقيم واحد يمر خلال نقطة معطاة ويوازي خط معطى".

وبالتالي يمكننا القول أن هذه المسلمة هي أساس الهندسة الإقليدية. ومن زمن إقليدس وحتى نهاية القرن التاسع عشر كانت مسلمة التوازي من المشاكل الشائعة في الهندسة. وبذلت محاولات كثيرة لبرهنتها وكثيراً من هذه المحاولات تعرضت لاستقلالية مسلمة التوازي، مثل **ليجندر** (١٧٥٢-١٨٣٣) Legendre أي أنها مسلمة لا تعتمد على باقي المسلمات وبالتالي إذا حذفت من نظام المسلمات فإن النظام يظل مترابط منطقياً. ومن مسلمة التوازي أمكن إثبات حقائق كثيرة في الهندسة المستوية مثل تشابه المثلثات وتناظر الزوايا وأن مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي قائمتين.

(٦.١) هندسة لوباتشفيسكي: Lobachevskin Geometry

حتى بداية القرن التاسع عشر لم تنجح أي محاولة لبرهنة مسلمة التوازي ولكن في العقود الأولى من القرن التاسع عشر ظهر حل لهذه المشكلة على يد **نيكولاى إيفانوفتش لوباتشفيسكي** (١٧٩٣ ـ ١٨٥٦) Lobachevsky في عام ١٨٢٩ حيث تمكن من صياغة وبرهنة مسلمة التوازي وأثبت أن مسلمة التوازي مستقلة أي لا يمكن أن تعتمد أو تنتج من باقي مسلمات الهندسة التي وضعها إقليدس.

أي أن لوباتشفيسكي وضع هندسة مشابهة لهندسة إقليدس فيما عدا مسلمة التوازي وتوصل إلى نظام مسلماتي مرتب ترتيباً منطقياً لا تعارض فيه. وبالتالي فإن لوباتشفيسكي أسس هندسة جديدة أسماها الهندسة التخيلية Imaginary Geometry والتي تشابه الهندسة الإقليدية ولكن خالية (حرة) من التعارضات المنطقية Logical contradictions وطورها بنفس مستوى الهندسة الإقليدية.

تم التوصل لبرهان عن مدى توافق Consistency هندسة لوباتشفيسكي في نهاية القرن التاسع عشر والذي أمكن صياغته كالآتي :

(١) مسلمة التوازي ليس من الضروري أن تنتج من المسلمات الأخرى للهندسة، أي أنها مستقلة منطقياً Logically independent عن باقي المسلمات.

(٢) المسلمة الخامسة لا تنتج من باقي المسلمات (بعيداً عن الهندسة الإقليدية التي تصح فيها هذه المسلمة) بسبب وجود هندسة أخرى تخيلية والتي تفشل فيها هذه المسلمة.

لوباتشفيسكي قال أن هندسته تخيلية بينما الهندسة الإقليدية قابلة للتطبيق أو عملية Practical وهذا لا يعني أنه اعتبر هندسته نظام منطقي مجرد (بحت) Purely Logical System ولكن اعتبره نظام مفيد في التحليل الرياضي وعليه قام بتأليف كتاب بعنوان تطبيقات الهندسة التخيلية لحساب بعض التكاملات.

إن لوباتفشيسكي لم يكن هو الوحيد الذي توصل إلى هندسة جديدة غير الهندسة الإقليدية ولكن **جاوس** (١٧٧٧ـ١٨٥٥) Gauss توصل إلى هذا النوع من الهندسة.

وبعد ظهور هندسة لوباتشفيسكي قام العالم المجري بوي (١٨٠٢ـ١٨٦٠) Yohn Bolyai بالتوصل إلى هندسة أخرى مختلفة عن هندسة إقليدس ولكن بصفة مستقلة تماماً، بمعنى أنه لم يطلع على أعمال لوباتشنيسكي. الهندسة الجديدة هذه سميت فيما بعد بالهندسة اللاإقليدية Non-Euclidean Geometry.

قبل الإعلان عن هذه الهندسة (بعد موت لوباتشفيسكي) كانت الهندسة الإقليدية هي المفهوم الوحيد للفراغ. اكتشاف الهندسة اللا إقليدية إدى إلى القضاء على وجهة النظر السابقة للفراغ. إذن النظرة للهندسة كعلم وموضوعاته المختلفة كان موسع لدرجة أنه أدى إلى المفهوم الحديث للفراغ المجرد Abstract Space وتطبيقاته العديدة في الرياضيات والمجالات المتعلقة بها من خلال الجبر الخطي وتطبيقاته الهندسية.

(٧.١) شكل الفراغ الهندسي: Formation of Geometrical Space

في القرن السابع والثامن عشر تطورت علوم الرياضيات وخصوصاً حساب التفاضل والتكامل Differential and Integral Calculus والهندسة التحليلية Analytic Geometry وكل هذا أدى إلى فتح أفاق جديدة لتطبيقات الجبز والتحليل الرياضي في حل مشاكل هندسية Geometrical problems وخصوصاً تلك التي لها علاقة بمجالات الميكانيكا Mechanics والفلك Astronomy .

كثير من الموضوعات الهندسية تطورت وتقدمت في القرن التاسع عشر وأهم ثلاثة مواضيع في هذه الفترة هي :

أساسيات الهندسة Foundation of Geometry، **الهندسة التفاضلية** Differential Geometry **والهندسة الإسقاطية** Projective Geometry.

في البداية كان تطور الموضوعات السابقة يجري في اتجاهات مختلفة ولكن في نهاية

القرن التاسع عشر أصبح كل منها قريب جداً من الأخر very close وبعض من أجزائها توحد unified.

توجد مشكلتان أساسيتان في أساسيات الهندسة :

(١) تطور الهندسة المنطقي Logical development اعتماداً على حد أدنى من المسلمات.

(٢) دراسة Investigation الاعتماد المنطقي Logical dependence والترابط بين القضايا الهندسية Geometrical propositions المختلفة.

كثير من الدراسات أجريت حول برهان مدى اعتماد المسلمة الخامسة على باقي المسلمات وفي النهاية توصلوا إلى استقلالية المسلمة الخامسة عن باقي المسلمات . ويعتبر لوباتشفيسكي هو الذي وضع النتيجة الأساسية الأولى في هذا المجال عن طريق بناء نظام هندسي مختلف عن نظام إقليدس. أي أن لوباتشفيسكي وسع إدراك Realization معنى الهندسة والمشاكل المرتبطة بها.

توصل جورج **فريدريك برنارد ريمان** Georg Freidrich Bernhard Remann (١٨٢٦ ـ ١٨٦٦) في عام ١٨٥٤ على نتيجة هامة حول موضوع الترابط السابق بين هندسة لوباتشفيسكي وهندسة إقليدس وفيها طور **المبادئ التحليلية** Analytical principals للهندسة وأوجد نظام هندسي مختلف عن نظام كل من إقليدس ولوباتشفيسكي والذي اسماه هندسة ريمان.

في **الهندسة الريمانية** Riemannian Geometry الخط يتحدد بنقطتين والمستوى بثلاث نقاط وأي مستويين يتقاطعان في خط وهكذا ولكن هناك مفهوم مخالف للتوازي وتمكن من صياغته كالآتي :

خلال نقطة معلومة لا يمكن رسم خط يوازي خط معلوم.

وتبعاً لذلك توصل إلى نظرية تنص على :

"مجموع زوايا المثلث الداخلية تزيد عن قائمتين."

(٨.١) نظام هلبرت المسلماتي:

في نهاية القرن التاسع عشر ظهر **هلبرت** (١٨٦٢ ـ ١٩٤٧) David Hilbert ونشر كتاباً في عام ١٨٩٩ بعنوان أساسيات الهندسة. في هذا الكتاب تمكن هلبرت من صياغة نظام كامل من مسلمات الهندسة الإقليدية بمعنى قائمة من الفرضيات فيها يمكن الحصول على الموضوع الكلي لهذه الهندسة كنتيجة منطقية Logical sequence.

مسلمات هلبرت وتحليل العلاقات المتبادلة بينها نعرضها الآن بايجاز كالآتي:

لدراسة نظام مسلمات هلبرت، دعنا نقول أن عندنا ثلاث مجموعات هي مجموعة النقاط points ومجموعة الخطوط lines ومجموعة المستويات planes. مجموعة كل المجموعات السابقة تسمى فراغ. عناصر المجموعات السابقة ترتبط فيما بينها بعلاقات متبادلة يعبر عنها من خلال أدوات الربط الآتية : يقع lie، بين between، تطابق congruent.

طبيعة العناصر في الفراغ والعلاقات المتبادلة بينها relationship تعتبر اختيارية كلياً totally arbitrary. عناصر المجموعات السابقة تحقق مجموعة من المسلمات وضعها هلبرت وقسمها إلى خمسة مجموعات هي :

المجموعة I: تسمى مجموعة **الوقوع** incidence وتحوي ثمان مسلمات تحدد العلاقات بين النقاط والخطوط والمستويات.

المجموعة II: تسمى مجموعة **البينية** betweenness وتحتوي على أربع مسلمات تحدد العلاقات بين نقطة على خط ونقطتين على نفس الخط.

المجموعة III: تسمى مجموعة **التطابق** congruence وتحوي خمس مسلمات تحدد تطابق القطع المستقيمة والأشكال المستوية.

المجموعة IV: تسمى مجموعة **الاتصال** continuity وتحوي مسلمتان وهما **مسلمة ارشميدس** وهي تعرف طول القطعة المستقيمة **ومسلمة كانتور** التي تعرف تقسيم القطعة المستقيمة إلى قطع أصغر منها.

المجموعة V : وهي عبارة عن مسلمة **التوازي** axiom of parallelism.

على العكس من أصول إقليدس فإن قائمة المسلمات الحديثة للهندسة الإقليدية لا تحتوي على وصف للأشكال الهندسية Geometrical figures ولكنها افترضت وجود ثلاث مجموعات من الأشكال هي النقاط والخطوط والمستويات والعلاقات بينها يجب أن تحقق متطلبات المسلمات.

يوجد سببان لمثل هذا التوجه نحو الهندسة والأشكال الهندسية :

(١) الهندسة تستخدم حقائق نشأت من الخبرة في الحياة (العالم الحقيقي) real world life حيث نأخذ في اعتبارنا بعض الخصائص للأشياء الحقيقية real objects بحيث لا تتعارض مع نظام المسلمات.

(٢) بعيداً عن الهندسة الإقليدية التي تستخدم خصائص الأشكال الهندسية يوجد نظم هندسية مختلفة مثل هندسة لوباتشفيسكي وريمان والتي تعارض المفهوم العادي usual notion للفراغ ولهذا **مفهوم الأشكال الهندسية** نفسه يجب أن يكون أكثر عمومية ليغطي كل المجالات الضرورية.

(١.٩) الهندسة التحليلية Analytic Geometry

مجموعات مسلمات هلبرت (I-V) وأشكال الفراغات الهندسية كانت هي الأساس لظهور **الهندسة التحليلية** الكارتيزية Cartesian Analytic Geometry. وذلك باستخدام مسلمات الترتيب والوقوع والاتصال حيث أمكن إدخال نظام إحداثي coordinate system للخط المستقيم.

وباستخدام الجبر والضرب (الجداء) الديكارتي للمجموعات أمكن إيجاد تناظر أحادي بين نقاط المستوى ونقاط الجداء الديكارتي $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ وبالتالي أمكن تكوين إحداثيات للمستوى وكذلك بالنسبة للفراغ الثلاثي $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

باستخدام المسلمة V وبالتالي النظرية الإقليدية للتوازي ونظرية تشابه الأشكال similarity of figures وخاصية **نظرية فيثاغورث** Theorem of Phytagoras أمكن إعطاء تعريف المسافة distance بين نقطتين

$$M_1(x_1,y_1,z_1) \text{ and } M_2(x_2,y_2,z_2)$$

بالدالة $d(M_1,M_2)$ حيث.

$$d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

والمستوى يعطى بمعادلة خطية في الإحداثيات (x, y, z) وهكذا بالنسبة لباقي مفردات الهندسة التحليلية في المستوى والفراغ والتي سبق أن درسها الطالب في الفرقة الأولى من التعليم الجامعي، أي أن الهندسة التحليلية هي دراسة الأشكال الهندسية باستخدام الجبر أي نظم الإحداثيات.

ملاحظة (١.١):

في الحقيقة يمكنك أن ترى بوضوح أن نظام **هلبرت المسلماتي كامل** complete أو تام بمعنى أنه من الممكن تطوير الهندسة بطريقة مرتبة منطقياً strictly logical order وحادة لا غموض فيها.

باستخدام مسلمات هلبرت أمكن صياغة مشكلة المسلمة الخامسة لإقليدس fifth postulate بالأسلوب الآتي :

بفرض مجموعة المسلمات الأربع I-IV، اشتق المسلمة V منهم (المسلمة V ناتج من نواتج المسلمات الأربع).

أيضاً نتيجة لوباتشفيسكي وهي :

المسلمة V ليست نتيجة لمجموعات المسلمات I-IV.

هذه النتيجة يمكن إعادة صياغتها كالآتي :

إذا لازم مجموعات المسلمات I-IV تقرير statement ينفي negating صحة truth المسلمة V، إذاً النتيجة لكل التقارير سوف تكون نظام متوافق منطقياً والذي يسمى **الهندسة اللا إقليدية** non-Euclidean geometry.

(١٠.١) الهندسة المحايدة (المطلقة) Absolute Geometry

نظام القضايا الناتج فقط من مجموعة المسلمات I-IV يسمى **الهندسة المحايدة** طبقاً لمفهوم **بوي المجري** J. Bolyais terminology. الهندسة المحايدة تعتبر **القاسم (الجزء) المشترك** common portion بين الهندسة الإقليدية واللاإقليدية لأن النتائج التي أثبتت بمساعدة مجموعات المسلمات I-IV تظل محققة بنفس الدرجة equality valid في كل من الهندسة الإقليدية وهندسة لوباتشفيسكي.

ملاحظة (٢.١):

النتائج التي لم تعتمد على مفهوم التوازي تعتبر نتائج في الهندسة المحايدة.

(١١.١) الهندسة والواقع اليومي: World Life Geometry

من العرض السابق يمكننا القول أن **الفراغ الهندسي** Geometrical space المعرف بنظام المسلمات هو مجموعة من الأشياء تسمى **عناصر هندسية** Geometric elements والعلاقات الطبيعية Natural relationships المتبادلة بينها تحقق متطلبات المسلمات للنظام المعطى. وهذا يعني أنه يمكن القول بأن:

الفراغ الإقليدي (فراغ لوباتشفيسكي) هو مجموعة من العناصر تحقق متطلبات مسلمات إقليدس (لوباتشفيسكي). الفراغ الإقليدي نفسه يمكن أن يأخذ عدة أشكال تعتمد على **نوعية الأشياء** Concrete objects التي تمثل عناصره (بعيداً عن المفهوم العادي للنقطة والخط والمستوى) ونوضح ذلك من خلال الأمثلة الآتية :

مثال (١.١):

النقطة تمثل بكرة والخط يمثل بأسطوانة لانهائية والمستوى يمثل بالفراغ بين خطين مستقيمين متوازيين spatial layer.

والعلاقات الأساسية بين عناصر المثال السابق يمكن تعريفها بحيث تحقق نظام المسلمات الإقليدي كالآتي:

مثال (٢.١):

النقطة (الكرة) تقع على الخط المستقيم (الاسطوانة) إذا كانت مرسومة داخل الأسطوانة.

مثال (٣.١):

النقطة تقع على المستوى إذا كانت الكرة الممثلة للنقطة تمس الخطين المتوازيين المحددين للمستوى.

النظرة الشاملة للعناصر الهندسية والمسلمات الهندسية تمكننا من اختيار نظام المسلمات **بدرجة اختيارية** Degree of arbitrariness بحيث تتكيف مع كل مجال من مجالات الدراسة. بهذه الطريقة يمكن تطبيق نظام المسلمات للهندسة في مجالات أخرى غير الرياضيات مثل الفيزياء والميكانيكا وهذا يقودنا إلى الفراغات المجردة الحديثة حيث عناصرها مجموعات، دوال، تحويلات، ...

تطبيقات الهندسة بمفهومها العام كثيرة ومتعددة ونشير هنا إلى أن فراغ **مانكوفيسكي** Minkowski space، مثلاً يلعب دور هام في نظرية النسبية الخاصة Special Relativity. وعموماً فإن فكرة **الفراغات المجردة** Abstract spaces قد اكتملت بعد تنامي الرياضيات (الجبر الخطي والتحليل الدالي) في القرن التاسع عشر.

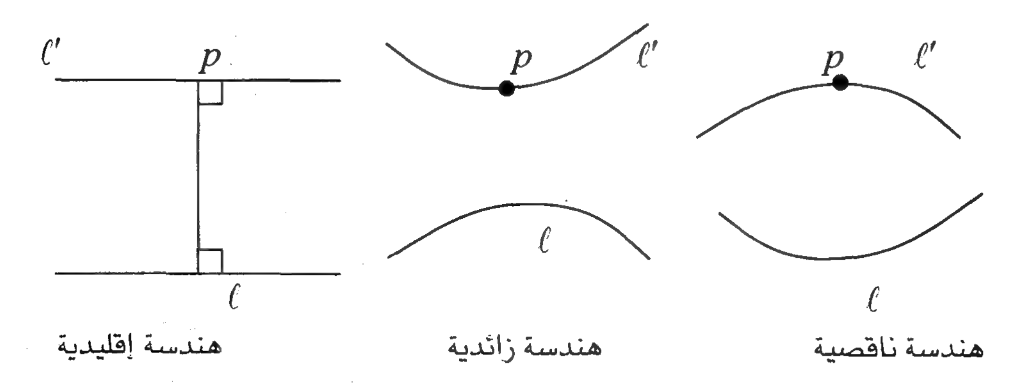
(١٢.١) الهندسة الإسقاطية Projective Geometry

تقريباً في نفس الوقت الذي بدأ فيه لوباتشفيسكي دراساته عن نظرية التوازي Theory of Parallels وجاوس عمله عن نظرية السطوح، قفز نوع جديد من الهندسة وهو **الهندسة الإسقاطية** Projective Geometry، هذه الهندسة محكومة من خلال مفاهيم تصويرية Pictorial concepts وكانت في أول الأمر بعيدة عن مشاكل المسلمات المعقدة.

ولكن في عام ١٨٧٥ أعطى **فيلكس كلاين** F. Klein (١٨٤٩ ـ ١٩٢٥) تأويل عام General Interpretation لهندسة إقليدس ولوباتشفيسكي وريمان مبني على الهندسة الإسقاطية. دراسات كلاين كانت مرتبطة بشدة بمفهومة للهندسة على أنها **دراسة اللامتغيرات** Theory of invariants **لزمرة معينة من التحويلات** Group of Transformation. مدخل الزمر النظري Group-theoretic approach للهندسة تم وضعه بواسطة كلاين عام ١٨٧٢ والمسمى **ببرنامج كلاين الموسع** Erlanger Program.

هذا البرنامج مكن كلاين من إعطاء تصنيف لنظم الهندسة الهامة والتحويلات المرتبطة معها وكلها نتجت من الهندسة الإسقاطية أي أنه في برنامج كلاين الموسع تعتبر الهندسة الأسقاطية هي أم الهندسات المختلفة.

من خلال تعرضنا للمواضيع المختلفة في هذا الباب نبين أنه توجد ثلاثة أنواع من الفراغات ثلاثية البعد وذات الانحناء الثابت هي **الفراغ الإقليدي البديهي اليومي** Intutive every day لإقليدس **والفراغات اللاإقليدية** (جاوس وبرترامي ـ بوي ـ لوباتشفيسكي) وتسمى **الفراغات الزائدية** Hyperbolic Spaces **والفراغات الريمانية** أو **الناقصية** Elliptic Spaces ومنها **الهندسة الكروية** ذات البعدين Spherical Geometry كما هو موضح في شكل (١.١).



شكل (١.١): التوازي في الهندسات الثلاث

(١٣.١) الهندسة التفاضلية:

النظرة الحديثة للفراغ الهندسي تشكلت بتوسع عندما تطورت **الهندسة التفاضلية** Differential Geometry وفي عام ١٨٢٧ توصل جاوس إلى مجموعة من الخصائص الخاصة بالسطوح والتي شكلت الهندسة الذاتية أو الداخلية Intrinsic Geometry للسطوح. هذه الهندسة هي دراسة الخواص التي يمكن ملاحظتها عن طريق ملاحظ observer بواسطة قياسات Measurements على السطح نفسه مثل الأطوال، المساحات والزوايا، وكان منشأ هذه الهندسة هو الهدف العملي من عملية مسح الأرض Land-Surveying ، وخلاف ذلك فإنها تسمى الهندسة الخارجية Extrinsic Geometry.

• ظهرت في عام ١٨٦٨ نتائج **أعمال بلترامي** (١٨٣٥-١٩٠٠)Eugenio Beltrami والتي فسر فيها الهندسة اللاإقليدية Interpretation of non-Euclidean Geometry كالآتي :

"هندسة لوباتشفيسكي المستوية يمكن اعتبارها، تحت شروط معينة، هندسة ذاتية لبعض السطوح".

وهذا مكنه من أن يجعل الهندسة اللاإقليدية المستوية والهندسة المستوية الإقليدية تقع ضمن مجال حقيقي كامل كجزء من نظرية السطوح Theory of Surfaces.

النقاط المشتركة في الدراسات المسلماتية The Axiomatic Investigation للوباتشفيسكي بطرق جاوس للهندسة التفاضلية استخدمت في حالة البعدين ولكن في هذه الفترة كان مستوى الرياضيات عال جداً بحيث أمكن تطبيق طرق الهندسة التفاضلية في الهندسة اللاإقليدية.

ففي عام ١٨٥٤ عرف **ريمان** فراغات كانت تعميم Genearization للفراغات الإقليدية واللاإقليدية Lobachevskian Geometry هذه الفراغات **المعممة لريمان** Riemannian Generalized Spaces تختلف في خواصها عن الفراغات الإقليدية مثل اختلاف أي سطح منحني Curved Surface عن المستوى.

الدراسة التحليلية البحتة التي طبقها ريمان في دراسة المشاكل الهندسية مكنته من تعميم مفهوم الانحناء Curvature مباشرة **للحالات متعددة الأبعاد** Multidimensional Cases وفراغات ريمان المعممة أصبحت مفيدة للفيزياء النظرية Theoretical physics (النسبية العامة).

والسؤال الذي نطرحه الآن ونحاول الإجابة عليه من خلال أجزاء هذا الكتاب هو: لماذا ندرس **الهندسة التفاضلية؟**

الإجابة على هذا السؤال تتضح مما يأتي :

أولاً : ماذا تعني الهندسة التفاضلية :

١ـ الهندسة التفاضلية تعني بدراسة الخواص المحلية والموسعة للمجموعات التفاضلية (المنحنيات والسطوح) في الفراغ الإقليدي.

٢ـ الهندسة تعني بدراسة الخواص المستقلة عن أي نوع من التحويلات (أي التي لا تتغير بالتحويل من مكان إلى آخر داخل الفراغ).

٣ـ التفاضل يعني بدراسة الخواص المحلية عن طريق المشتقات التفاضلية.

٤ـ كثير من النتائج المدهشة ظهرت من الخواص اللاتغيرية المحفوظة بالتساوي القياسي وكذلك تساوي المشتقات المختلطة $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)$.

٥ـ الهندسة التفاضلية الخارجية تعني بدراسة الشكل من على بعد (خارج الشكل) أي كما يراه راصد خارج الشكل بينما الهندسة التفاضلية الذاتية (المحلية) تعني بدراسة الشكل كما يراه راصد على الشكل نفسه.

٦ـ **جاوس** بين أن الخواص الهندسية المحلية تظل لا تغيرية طالما المسافة على السطح (ليست في الفراغ) تظل لا تغيرية.

٧ـ **ريمان** عرف السطح بدون النظر إلى فراغ يحتويه واستنتج خواصه المحلية من تعريف المسافة على السطح.

٨ السطوح والمنحنيات هي مجموعات نقطية من الفراغ الثلاثي نحتاج لدراستها لمؤثر (دالة) يقوم بعمل بارامترية لهذه المجموعات حتى نتمكن من دراسة هندستها وتكون النتائج مستقلة عن التمثيل البارامتري كما هو موضح في شكل (٢.١).

٩ـ الهندسة التفاضلية تهتم بالفروق الأساسية بين خواص حركة نقطة مادية وحركة جسم متماسك.

١٠ـ حركة الجسم المتماسك لا تنتمي للفراغ الإقليدي. وبالتالي نحتاج مفاهيم هندسية غير إقليدية (هندسة تفاضلية) لوصف الهندسة المصاحبة لحركة الجسم المتماسك بغض النظر عن مسببات الحركة (هندسة فراغ الشكل للإنسان الآلي).

ولذلك تُعرف الهندسة التفاضلية بأنها دراسة الأشكال والمواضع الهندسية باستخدام حساب التفاضل والتكامل وما يرتبط بها من جبر وتوبولوجي.

١١ـ الهندسة التفاضلية تهتم بالدالة أو الدوال التي تولد عديد الطيات (منحنى أو سطح) وهذه الدالة مجالها قد يكون مناطق بها تجاعيد أو طيات أو نقاط شاذة والتجاعيد يتم وصفها من خلال دالة تفاضلية وهي دالة الانحناء التي من خلالها نستطيع التمييز بين شكل وآخر مثل اختلاف بصمة الأصبع في الكائن الحي حيث تتضح المنحنيات المختلفة التي تغطي السطح مثل المنحنيات البارامترية والتقاربية والإنحنائية والجيوديسية وغيرها.

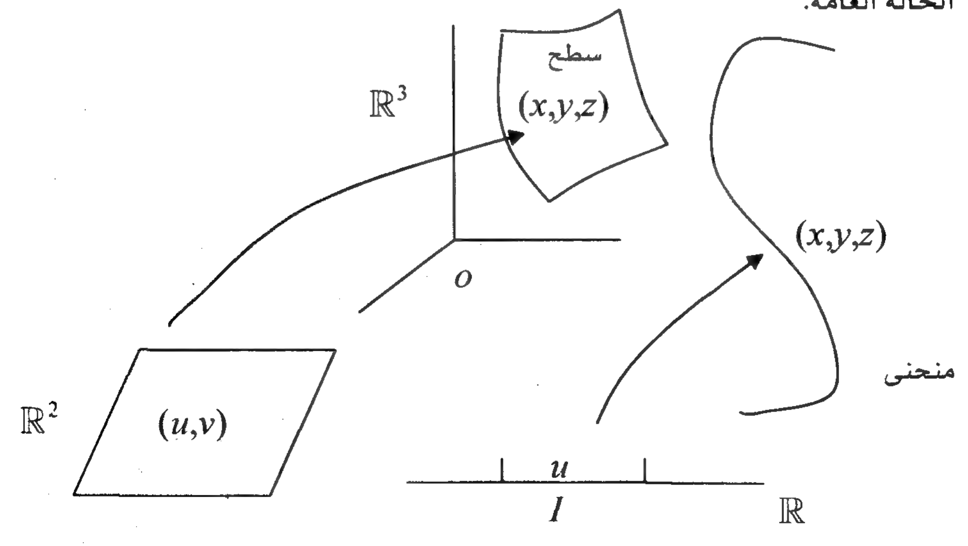
ثانياً: الهندسة الداخلية والخارجية:

نعني بالهندسة الداخلية والخارجية كل المعاني الهندسية التي ترتبط بالمشتقة الأولى والثانية على الترتيب. ونعني هنا كيفية تحديد شكل السطح أو المنحنى أو الطريقة التي ينحني بها ويتضح ذلك من العرض الآتي:

اهتم جاوس Gauss بانحناء يتعلق بالتقعر والتحدب Convex and Concave والاستواء والتفلطح اسماه بالانحناء الجاوسي. الانحناء الجاوسي خاصية ذاتية intrinsic property لأنه يعتمد على المشتقات التفاضلية الأولى للسطح أي على الأطوال للمسافات القوسية والمساحات للمناطق المجعدة والزوايا. الانحناء الجاوسي

يمكن ملاحظته من خلال راصد observer على السطح نفسه.

الهندسة الذاتية تهتم بالخواص التي لا تتغير على السطح تحت تأثير تحويلات التناظر الأحادي أو التساوي القياسي ويتضح ذلك في صيغ فرينية Frenet للمنحنى. الانحناء الخارجي (اللاجوهري) extrinsic curvature للمنحنى (عديد طيات بعده واحد) هو أول نوع تمت دراسته في صيغ فرينيه في الفراغ الثنائي والثلاثي. الانحناء المتوسط هو انحناء يراه الراصد من خارج السطح وهو أهم نوع من الانحناءات نظراً لاستخدامه في كثير من التطبيقات. الوصف الطبيعي للسطوح عند إنحنائها bending أو ثنيها بدون تشويه deformation (فيما عدا الخصائص التبولوجية) يعطى من خلال الانحناء . وبالتالي علينا التعامل مع الهندسة الذاتية (الداخلية أو الجوهرية) للسطح بدون اعتبار للفضاء المحيط بنا. الانحناء الجاوسي يوضح متى يمكن للسطح أن ينحني إلى سطح أخر (الأسطوانة والمستوى). انحناء المنحنى هو انحناء خارجي يخبرنا عن الطريقة التي يميل بها المنحنى على اتجاه ما في الفراغ والانحناء الجاوسي خاصية ذاتية تبقى كما هي طالما لم يشوه بمغير بعد أو تحويل تماثل equiform motion في الحالة العامة.



شكل (٢.١): مؤثر البارامترية

تمارين (١)

(١) أعط تعريفاً لكل من :

(i) هندسة إقليدس.

(ii) هندسة لوباتشفيسكي.

(iii) هندسة ريمان.

(٢) مسلمة التوازي لعبت دور هام في تصنيف الهندسات. وضح ذلك؟

(٣) ماذا نعني بالهندسة الذاتية (الداخلية)؟

(٤) اشرح برنامج كلاين الموسع لتصنيف النماذج الهندسية.

(٥) وضح بمثال كيف أن نوعية العناصر الهندسية للفراغ تختلف من فراغ إلى أخر بحيث تتوافق مع نظام المسلمات في الفراغ.

(٦) وضح القصور في هندسة إقليدس.

(٧) وضح أن الفراغ المجرد هو صلب التطبيق في الحياة.

(٨) وضح كيف فسر بلترامي الهندسة اللاإقليدية.

(٩) هل الهندسة الإسقاطية نظام مسلماتي؟

(١٠) وضح معنى استقلالية مسلمة التوازي؟

(١١) أذكر فرضيات ارشميدس ووضح كيف أنها عالجت القصور في أصول إقليدس.

(١٢) أذكر مسميات الفراغات ثلاثية البعد ذات الانحناء الثابت موضحاً مسلمة التوازي في كل منها من خلال الأشكال.

(١٣) الهندسة الإسقاطية أم الهندسات. وضح ذلك؟

(١٤) عرف الهندسة التفاضلية.

(١٥) عرف كل من الهندسة الذاتية والهندسة الخارجية.

(١٦) وضح مدى أهمية دراسة الهندسة التفاضلية.

الباب الثاني

تحليل الدوال الاتجاهية
Vector Fields Analysis

محتويات هذا الباب سبق وأن درسها الطالب في الجبر الخطي وتفاضل وتكامل (٤) والهندسة التحليلية وهنا قمنا بكتابتها بأسلوب يتناسب مع موضوعات الكتاب وبالتفصيل فإن هذا الباب يحتوي على الهندسة التحليلية للفراغ الإقليدي وتحليل المتجهات والدوال الاتجاهية وكيفية تفاضلها وتكاملها وكذلك تعريف الراسم التفاضلي وعلاقته بمصفوفة جاكوب والفراغات المماسية وعرضنا نظرية الدالة العكسية والدالة الضمنية.

(١.٢) الفراغ الإقليدي E^3 Euclidean space

دون الخوض في تفاصيل أنواع الفراغات والتي أمكن تصنيفها إلى نوعين رئيسيين إقليدي ولا إقليدي وببساطة شديدة يمكننا تعريف الفراغ الإقليدي ذو الثلاثة أبعاد والذي يرمز له بالرمز E^3 على أنه جميع النقاط الهندسية $\{P\}$ والتي تمثل من خلال مجموعة كل الثلاثيات المرتبة (x^1, x^2, x^3) وباختصار (x^i) وهذا يعطى من خلال راسم تناظر أحادي

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to E^3$$

أي أن كل نقطة هندسية P يمكن تمثيلها كالآتي :

$$P \equiv (x^i),\ i = 1,2,3,\ \forall x^i \in \mathbb{R}$$

حيث $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية.

مجموعة النقاط $\{x \equiv (x^i) \in \mathbb{R}^3\}$ يعرف عليها دالة القياس $<,>$ لهذا الفراغ حيث

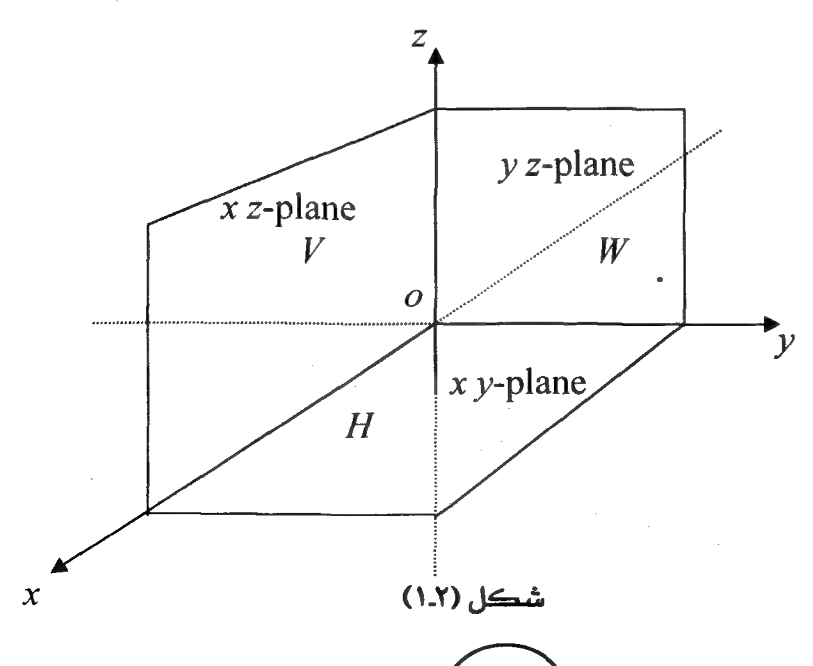
$$< x, x >= \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2 \qquad (2.1)$$

ومنها يعرف البعد بين نقطتين x, y كالآتي :

$$< x - y , x - y >^{\frac{1}{2}} = [\sum_{i=1}^{3} (x^{i} - y^{i})^{2}]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.2)$$

ومن هذا العرض نكون قد عرفنا الفراغ الثلاثي الإقليدي بأسلوب بسيط والذي تتحقق فيه خاصية التوازي المعروفة، وبأسلوب أكثر دقة يعرف الفراغ الثلاثي الإقليدي على أنه فراغ اتجاهي معياري بعده 3 معرف على حقل الأعداد الحقيقية أي أنه فراغ اتجاهي له أساس معياري متعامد.

ويتبقى لدينا كيفية تمثيل ووصف هذا الفراغ من خلال الثلاثي (x^{i}) والذي فيه تسمى x^{i} بالإحداثيات الكرتيزية والتي يمكن وصفها في الفراغ على أنها الأبعاد العمودية عن ثلاث مستويات متعامدة مثنى مثنى، هذه المستويات تسمى بمستويات الإحداثيات Coordinate Planes والأبعاد الثلاثة العمودية تسمى بإحداثيات النقطة. المستويات الثلاث xy، xz، yz نرمز لها بالرموز H، V، W على الترتيب وتقسم الفراغ إلى ثمانية أجزاء منفصلة كل جزء منها يسمى octant ونوضح ذلك من خلال شكل (١.٢) والجدول (١.٢).

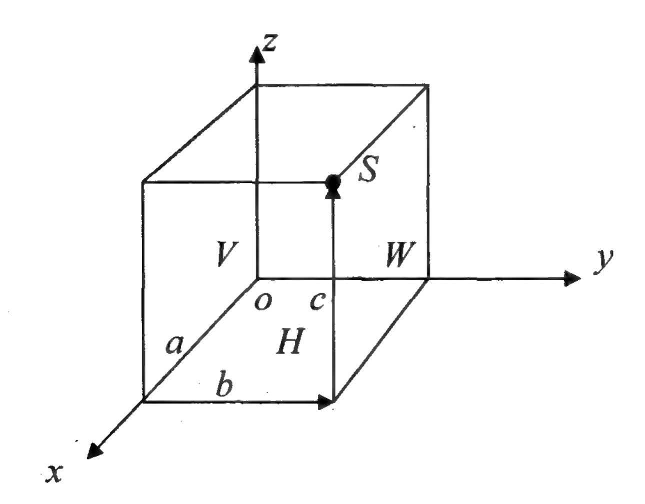


شكل (١.٢)

Octant	Signs of Coordinates			Octant	Signs of Coordinates		
	x	y	z		y	Y	z
I	+	+	+	V	-	+	+
II	+	-	-	VI	-	-	+
III	+	-	+	VII	-	+	-
IV	+	+	-	VIII	-	-	-

جدول (٢ـ١)

المستويات $W,\ V,\ H$ تسمى مستوى المسقط الأفقي Horizontal والرأسي Vertical ومسقط الشكل (الهيئة) Profile على الترتيب كما هو موضح في شكل (٢.٢). وتتحدد النقطة $S(a,b,c)$ في الفراغ كما هو موضح في شكل (٢ـ٢) من خلال رأس في متوازي المستطيلات الذي أوجهه توازي المستويات الإحداثية:

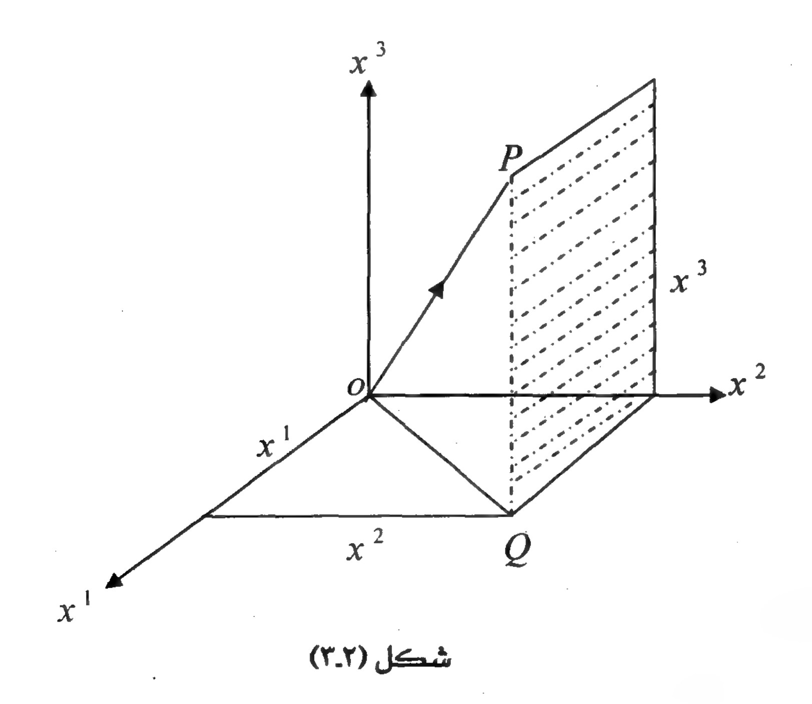


شكل (٢ـ٢)

خطوط تقاطع المستويات الإحداثية تسمى بالمحاور الإحداثية والتي يرمز لها بالرمز x^i وإذا أخذنا متجهات الوحدة e_i في اتجاه المحاور x^i فإن أي نقطة P تمثل بالثلاثي (x^i) ويكون متجه الموضع لها هو $\overrightarrow{oP}$ ويكتب على الصورة (الوضع القياسي Standard Position):

$$\overrightarrow{oP} = \sum_{i=1}^{3} x^i \; e_i$$

حيث نقطة البداية نقطة الأصل initial point ونقطة النهاية terminal point P والمجموعة $\{e_i\}$ هي الأساس المعتاد أو القياسي للفراغ الإقليدي، ولتوضيح الوضع في الفراغ للنقطة نقدم شكل (٣.٢):



شكل (٣.٢)

ملاحظة (١.٢):

لنتفق من الآن فصاعداً أن الرموز ... ,i, j, k تأخذ القيم 1,2,3 ونتبع أسلوب أينشتين الأختزالي الجمعي ويتلخص الأسلوب في الآتي : أي صيغة من الصيغ المشتملة

على رموز ذات ترقيمات سفلية وأخرى علوية، إذا ظهر رمز وقيم متغيرة مرة بأعلى وأخرى بأسفل فإن هذا يعنى تلقائياً عملية جمع لهذه الصيغة في نطاق المدى المسموح به لهذا الرمز، فمثلاً

$$a^i b_i = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3$$ ، وهكذا

ولأي متجه $A = (a^i)$ فإننا نعرف a^i على أنها مركبات المتجه A والزوايا α^i بين المتجه $\vec{A}$ ومحاور الإحداثيات ox^i تسمى بزوايا الاتجاه للمتجه $\vec{A}$ وجيوب التمام تسمى جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\vec{A}$ ويرمز لها بالرمز $\cos\alpha^i$ وعليه فإن الاتجاه L والذي يسمى جيوب تمام الاتجاه Direction Cosines يعطى من

$$L = \cos \alpha^i e_i , \ \cos \alpha^i = \frac{x^i}{|A|} , A = (x^i)$$

المقدار $|A|$ يسمى طول المتجه $\vec{A}$ حيث

$$|A| = (\sum_{i=1}^{3} (x^i)^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.3)$$

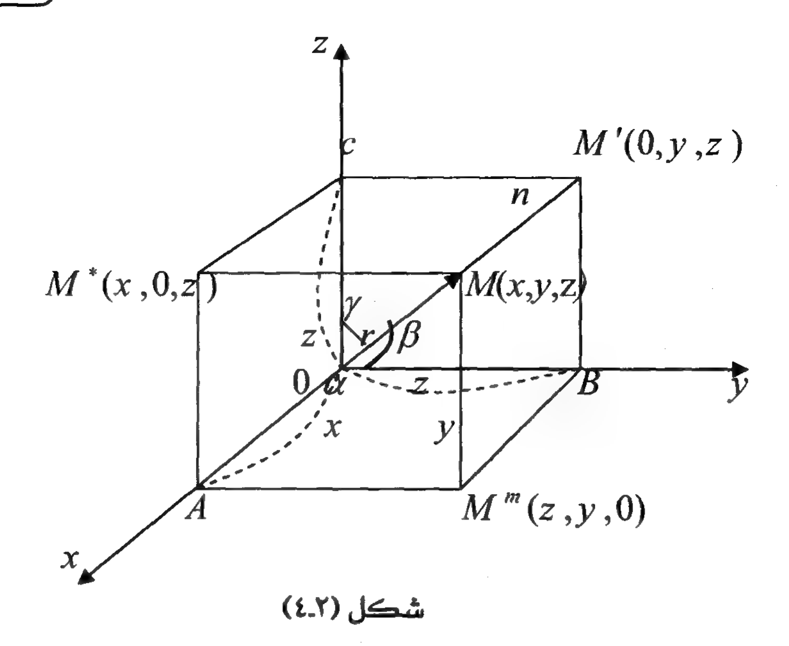
مثال (١.٢):

أثبت أن $$\sum_{i=1}^{3} \cos^2 \alpha^i = 1$$

الحل:

بوضع $\vec{A} = |A| e_A , \ e_A = (\cos \alpha^i) = \cos\alpha^i e_i$ نحصل على المطلوب.

وإذا كان $\vec{A}$ متجه وحدة فإن مركباته هي $\cos \alpha^i$ على امتداد محاور الاحداثيات ونوضح ذلك من خلال شكل (٢-٤):



شكل (٤.٢)

ولتوضيح المسافة بين نقطتين $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ نقوم برسم مستويات توازي مستويات الإحداثيات وتمر خلال النقاط M_1 , M_2 ونحدد النقاط $M_3=(x_2,y_2,z_1)$, $M_4(x_2,y_1,z_1)$. النقاط M_1, M_2, M_3 تكون مثلث قائم الزاوية وكذلك النقاط M_1, M_3, M_4 تكون مثلث قائم الزاوية.

وبتطبيق نظرية فيثاغورث Pythagorean theorem نجد أن :

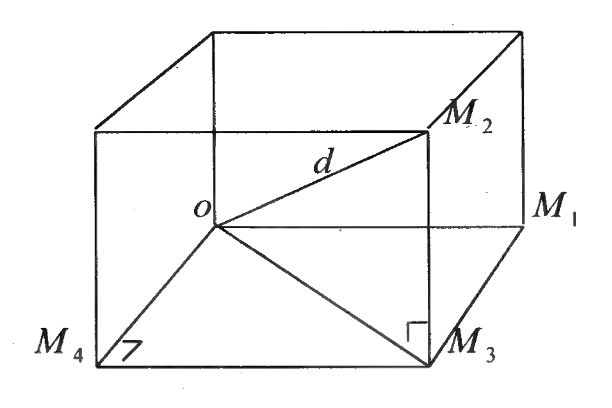
$$d(M_1,M_2) = \sqrt{d(M_1,M_3)^2 + d(M_2,M_3)^2} \qquad (2.4)$$

$$d(M_1,M_3) = \sqrt{d(M_1,M_4)^2 + d(M_3,M_4)^2} \qquad (2.5)$$

ومن شكل (٥.٢) نجد أن :

$$d(M_2,M_3) = |z_2 - z_1| \qquad (2.6)$$

وبالتعويض من (2.5), (2.6) في (2.4) نحصل على الصيغة (2.2) التي تعطي المسافة بين نقطتين.



شكل (٢ـ٥)

مثال (٢ـ٢):

المتجه $\overrightarrow{A}$ يصنع زاوية 60° مع محور ox، محور oy، ما هي الزاوية التي يصنعها مع محور oz ؟

الحل:

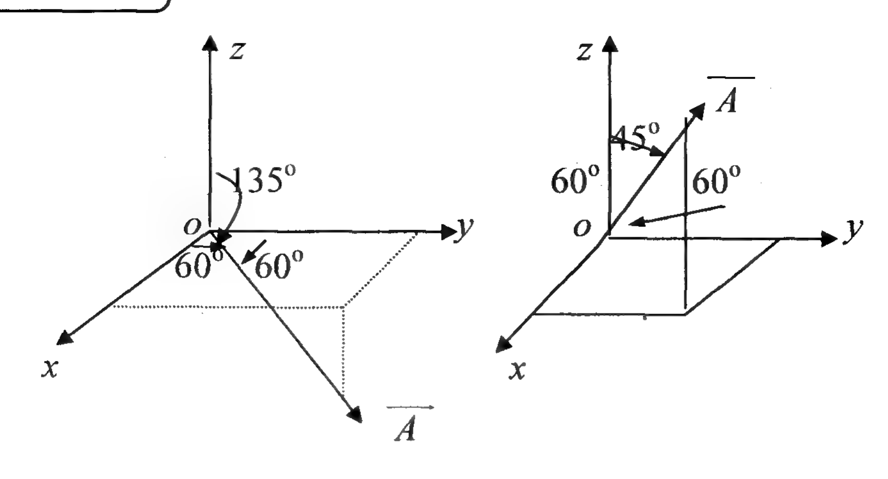
حيث أن $\cos\alpha^1 = \cos\alpha^2 = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

وبما أن $\sum_i \cos^2 \alpha^i = 1$

$$\therefore \ (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + \cos^2\alpha^3 = 1$$

ومنها نحصل على $\cos^2\alpha^3 = \frac{1}{2}$ إذاً $\cos \alpha^3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

أي أن $\alpha^3 = \frac{\pi}{4}$ أو $\frac{3\pi}{4}$ كما هو موضح في شكل (٢ـ٦)



شكل (٢ـ٦)

مثال (٢ـ٣):

• إذا كانت α, β, γ هي الزوايا التي يصنعها متجه مع محاور الإحداثيات، ماذا عن المقدار $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$؟

الحل:

استخدم العلاقة بين جيب وجيب تمام الزاوية ومتممتها نحصل على

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$$

مثال (٢ـ٤):

هل جيوب تمام الاتجاه وحيده؟

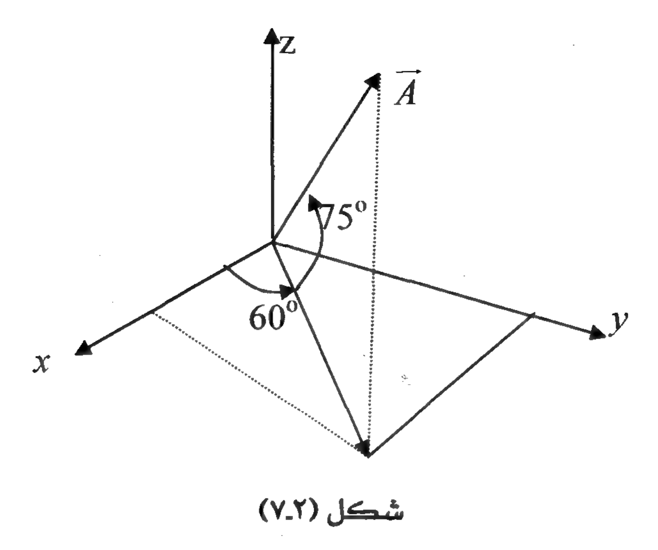
(**إرشاد**: أنظر مثال (٢ـ٢))

مثال (٢ـ٥):

ماذا نفهم إذا قلنا أن الزوايا التي يصنعها متجه مع محاور الإحداثيات متساوية؟ موضحاً ذلك بالرسم.

مثال (٢ـ٦):

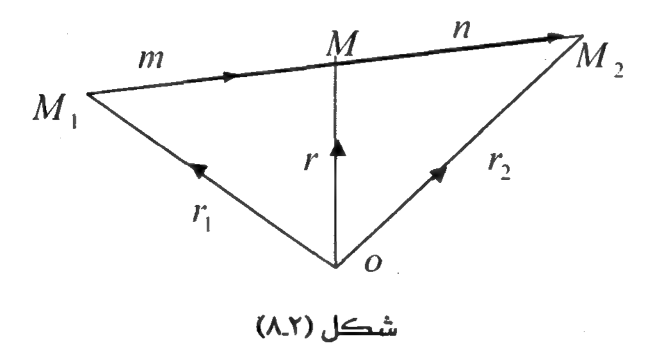
أوجد جيوب تمام الاتجاه للمتجه المبين بالشكل



شكل (٢-٧)

نقطة تقسيم المسافة بين نقطتين

نفرض أن $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ، $M_2(x_2, y_2, z_2)$ هما نقطتي النهاية للقطعة مستقيمة M_1M_2 وأن $M(x,y,z)$ نقطة تقسم المسافة M_1M_2 بنسبة $m : n$ من ناحية M_1 وإذا كان r, r_1, r_2 هما متجهات الوضع للنقط M, M_1, M_2 على الترتيب كما هو مبين في الشكل (٢-٨).



شكل (٢-٨)

من هندسة الشكل يتضح أن :

$$r = r_1 + \overline{M_1M}\ , \ r_2 = r + \overline{MM_2}$$

نفرض e وحدة المتجهات في اتجاه $\overrightarrow{M_1M_2}$ ، إذاً

$$r = r_1 + m\ e\ ,\ r_2 = r + n\ e$$

وبحذف e نحصل على : $r\ (1+\frac{m}{n}) = r_1 + \frac{m}{n} r_2$ أو ما يكافئ :

$$r = \frac{n\ r_1\ +\ m\ r_2}{m\ +\ n} \qquad (2.7)$$

حيث r متجه الوضع لنقطة التقسيم.

العلاقة (2.7) تشير إلى أن نقطة التقسيم M لها الإحداثيات

$$M\,(\frac{n\ x_1\ +\ m\ x_2}{m\ +\ n}, \frac{n\ y_1\ +\ m\ y_2}{m\ +\ n}, \frac{n\ z_1\ +\ m\ z_2}{m\ +\ n}) \quad (2.8)$$

وإذا كانت $n : m$ تساوي $1 : k$ فإن :

$$M\,(\frac{x_1\ +\ k\ x_2}{k\ +\ 1}, \frac{y_1\ +\ k\ y_2}{k\ +\ 1}, \frac{z_1\ +\ k\ z_2}{k\ +\ 1}) \qquad (2.9)$$

وإذا كانت $k = 1$ فإن M تسمى نقطة التنصيف middle point حيث

$$M\,(\frac{x_1\ +\ x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}) \qquad (2.10)$$

إذا كانت $k > 0$ فإن النقطة M تقع على القطعة المستقيمة M_1M_2 ويسمى التقسيم داخلي internally division أما إذا كانت $k < 0$ فإن النقطة M تقع خارج القطعة المستقيمة M_1M_2 ويسمى التقسيم خارجي externally division.

(٢.٢) تحليل المتجهات Vector analysis:

لتسهيل أسلوب الدراسة داخل هذا الفراغ نقوم بعرض نظرية تحليل المتجهات أي العمليات الجبرية والمعاني الهندسية التي ترتبط بالمتجهات.

تعريف (١.٢):

يعرف حاصل الضرب القياسي لمتجهين $\vec{A}=(a^i)\ ,\ \vec{B}=(b^i)$ والذي يرمز له بالرمز $<A,\ B>$ أو $A\ .\ B$ كالآتي

$$<A,\ B>=\sum_{i=1}^{3} a^i\ b^i \qquad (2.11)$$

الرمز $<\ >$ أعم لأنه يشير إلى الضرب الداخلي والضرب القياسي حالة خاصة (أنظر فراغات الضرب الداخلي في الجبر الخطي).

تعريف (٢.٢):

يقال لمتجهين $\vec{B}\ ,\ \vec{A}$ متسامتين (منطبقين أو متوازيين) إذا كان

$$\vec{B}=\lambda\ \vec{A}\ \ ,\vec{A}\neq 0$$

خصائص حاصل الضرب القياسي

للمتجهات A, B, C تتحقق الخواص الآتية :

(١) خاصية التعامد : $<\vec{A},\ \vec{B}>=0$ if $\vec{A}=0$ or $\vec{B}=0$ or $\vec{A}\perp\vec{B}$

(٢) خاصية التماثل : $<\vec{A},\vec{B}>\ =\ <\vec{B}\ ,\vec{A}>$

(٣) خاصية التوزيع : $<\vec{A},\vec{B}+\vec{C}>=<\vec{A},\vec{B}>+<\vec{A},\vec{C}>$

(٤) خاصية الضرب في عدد قياسي :

$$<\alpha\vec{A},\ \vec{B}>=<\vec{A},\ \alpha\vec{B}>=\alpha\ <\vec{A},\ \vec{B}>\ ,\forall\alpha\in\mathbb{R}$$

من الآن نتفق على أن نكتب رمز المتجه بالرمز A بدلاً من $\overrightarrow{A}$.

مثال (٧.٢):

أثبت أن $< e_i , e_j > = \delta_{ij}$ حيث δ_{ij} تسمى كرونكر دلتا وتعرف كالآتي

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \forall \ i = j \\ 0, & \forall \ i \neq j \end{cases}$$

الحل:

المتجهات e_i عيارية متعامدة لأنها تكون أساس للفراغ الإقليدي العياري E^3
ومنها نحصل على المطلوب.

تعريف (٣.٢):

تعرف الزاوية بين متجهين على أنها الزاوية ϕ بين المتجهين A, B والتي تعطى بالعلاقة

$$\cos \phi = \sum_{i=1}^{3} \cos\alpha^i \cos \beta^i$$

حيث $\cos\alpha^i , \cos \beta^i$ هي جيوب تمام الاتجاه للمتجهين A, B على الترتيب.

مثال (٨.٢):

أثبت أن

$$\cos \phi = \frac{< A , B >}{< A , A >^{\frac{1}{2}} \ < B , B >^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.12)$$

الحل:

بقسمة طرفي العلاقة (2.11) على $|A|, |B|$ واستخدام تعريف جيوب تمام الاتجاه نحصل على المطلوب.

ملاحظة (٢.٢):

إذا كانت $0 < A,B >$ فإن θ زاوية حادة. وإذا كانت $< A,B > < 0$ فإن θ زاوية منفرجة حيث $< A,B > = |A||B|\cos\phi$

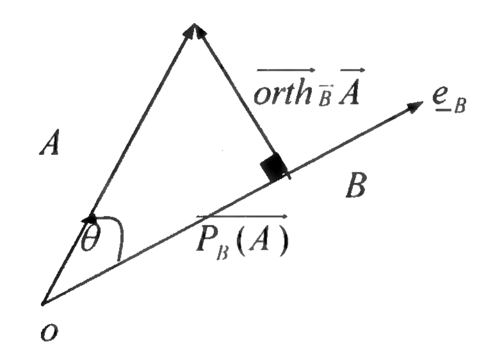
ونعطي الآن **تطبيق على حاصل الضرب القياسي:**

(١) المساقط العمودية Orthogonal Projections

(١) إيجاد طول مسقط متجه A على اتجاه معلوم B ويرمز له بالرمز $P_B(A)$ ويعطى من

$$P_B(A) = \frac{< A, B >}{|B|} = < A, \underline{e}_B >, \underline{e}_B = \frac{B}{|B|} \qquad (2.13)$$

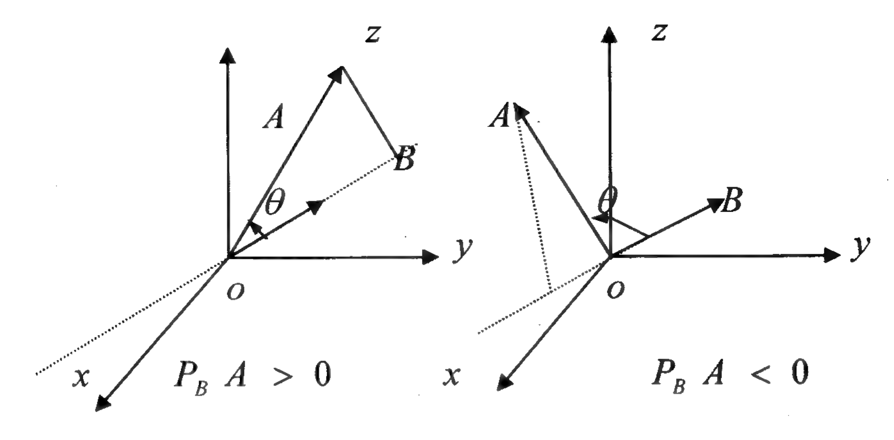
والمعنى الهندسي للمقدار $P_B(A)$ هو مركبة المتجه A التي توازي المتجه B كما هو واضح في شكل (٢-٩).



شكل (٢-٩)

$$\therefore \overrightarrow{P_B(A)} = \frac{< A,B > B}{|B|^2} \;,\; \overrightarrow{P_A(B)} = \frac{< B,A > A}{|A|^2} \qquad (2.14)$$

لاحظ أن طول المسقط يكون موجب أو سالب على حسب الزاوية θ حادة أو منفرجة على الترتيب. ونوضح ذلك بالرسم كما في شكل (٢-١٠).



شكل (٢-١٠)

وكذلك فإن طول مسقط المتجه B على المتجه A يعطى من

$$P_A(B) = \frac{<A, B>}{|A|} = <\overrightarrow{B}, \underline{e}_A>, \ \underline{e}_A = \frac{A}{|A|} \qquad (2.15)$$

من (2.15) ,(2.13) يكون لدينا المتساوية التي تعطي العلاقة بين أطوال المتجهات ومساقطها على الصورة :

$$\frac{P_B(A)}{P_A(B)} = \frac{|A|}{|B|} \qquad (2.16)$$

من (2.15) ,(2.13) يمكننا كتابة المسقط كمتجه على الصورة :

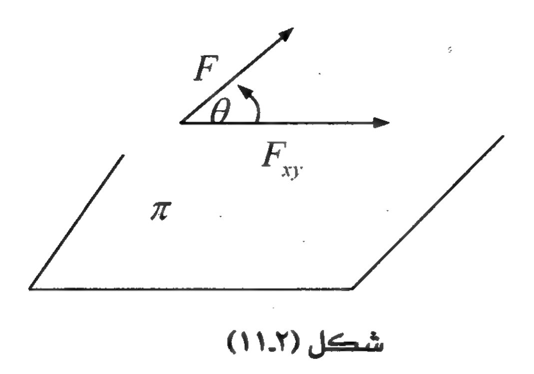
$$\begin{aligned} \overline{P_B(A)} &= P_B(A)\underline{e}_B = <A, \underline{e}_B>\underline{e}_B \\ \overline{P_A(B)} &= P_A(B)\underline{e}_A = <B, \underline{e}_A>\underline{e}_A \end{aligned} \qquad (2.17)$$

مثال (٢-٩):

أوجد طول مسقط المتجه $v = (1,3,5)$ على المتجه الذي يوازي المتجه $u \equiv (1,-2,2)$.

(**إرشاد:** أوجد طول u وأوجد e_u واستخدم العلاقة (2.15)).

(٢) مسقط متجه على مستوى π هو البعد بين مسقط بدايته (نقطة) ومسقط نهايته (نقطة) وهو كمية اتجاهية. ومقياس مسقط المتجه $\overline{F}$ على المستوى xy هو $|F_{xy}|$ ويعطى من $|F_{xy}| = |\overline{F}|\cos\theta$ حيث θ هي الزاوية بين $\overline{F}$ والمستوى xy.



شكل (١١.٢)

مثال (١٠.٢):

في الفراغ الثلاثي E^3 إذا كان لدينا أساس معياري متعامد orthogonal base $\{e_i\}$ أي أنه يحقق $<e_i, e_j> = \delta_{ij}$ وارتبط الثلاثي $\{u_i\}$ مع الثلاثي $\{e_i\}$ بالتحويلة الخطية $u_i = a_i^j e_j$ فإن الشرط الضروري والكافي كي تكون المجموعة $\{u_i\}$ أساس معياري متعامد للفراغ E^3 هو أن مصفوفة التحويل (a_j^i) تكون عمودية، وعلى الطالب إثبات ذلك كتمرين؟ (فراغات الضرب الداخلي في الجبر الخطي).

(**إرشاد:** من الجبر الخطي المصفوفة A عمودية إذا وفقط إذا تحقق $A' = A^{-1}$ أو $DetA = \pm 1$)

مثال (١١.٢):

عين الزاوية $\theta = B\hat{A}C$ حيث $A \equiv (1,1,1)$, $B \equiv (2,2,1), C \equiv (2,1,2)$

الحل:

نعين أضلاع الزاوية (نصف متجه أو شعاع بدايته نقطة A) كالآتي:

$$\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{oA}+\overrightarrow{oC}=(1,0,1),\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{oB}-\overrightarrow{oA}=(1,1,0),$$

وبالحساب العادي نجد أن

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2},\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{2},<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}>=1$$

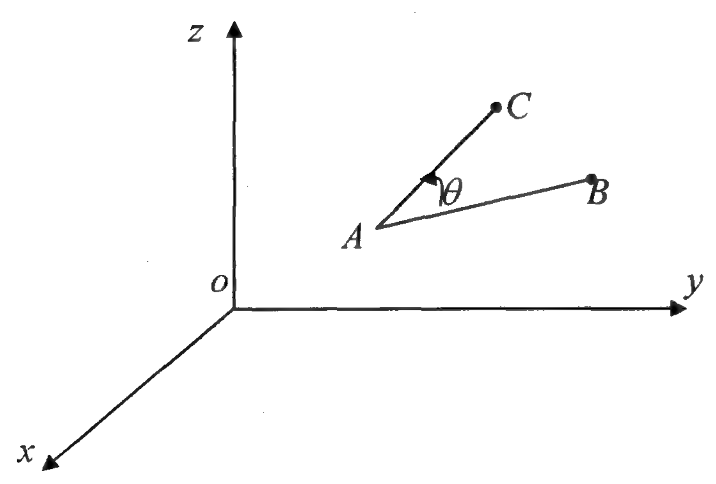
ومن العلاقة

$$\cos\ \theta=\frac{<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}>}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\ .\ \left|\overrightarrow{AC}\right|}$$

نجد أن

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

كما هو موضح في شكل (١٢.٢):



شكل (١٢.٢)

ملاحظة (٣.٢):

مسقط المتجه $\vec{A}$ على المتجه $\vec{B}$ هو متجه $\overrightarrow{P_B}(A)$ ويعطى من

$$\overrightarrow{P_B(A)}=P_B(A)\,\vec{u}=<A,\vec{u}>\,\vec{u}$$

حيث u وحدة المتجهات في اتجاه $\vec{B}$.

ومن شكل (٢-٩) يتضح أن المتجه $\vec{A}$ مجموع جزئين، جزء في اتجاه B (مسقط A على B) وجزء في اتجاه عمودي على B ونرمز له بالرمز $\overrightarrow{orth_B A}$ أي أن

$$\vec{A} = \overrightarrow{P_{\vec{B}}(\vec{A})} + \overrightarrow{orth_{\vec{B}}(\vec{A})} \qquad (2.18)$$

(تحليل عمودي) (أنظر الجبر الخطي)

مثال (٢-١٢):

أوجد $\overrightarrow{P_B(A)}$, $\overrightarrow{orth_B(A)}$ إذا كان $\vec{A}=(2,3,-1), \vec{B}=(8,-4,1)$

الحل:

من العلاقة $\overrightarrow{P_B(A)} = <A, u> \vec{u}$ حيث

$$<\vec{A},u> = \frac{1}{3}, \; u = \frac{\vec{B}}{<B, B>^{\frac{1}{2}}} = (\frac{8}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{1}{9})$$

نحصل على

$$\overrightarrow{P_B(A)} = (\frac{8}{27}, \frac{-4}{27}, \frac{1}{27})$$

وكذلك

$$\overrightarrow{orth_B(A)} = \vec{A} - \overrightarrow{P_B(A)} = (\frac{46}{27}, \frac{85}{27}, \frac{-28}{27})$$

ويمكن أن تتأكد من

$$<\overrightarrow{P_B(A)}, \overrightarrow{orth_B(A)}> = 0$$

(٢) الإحصاء

حساب معامل الارتباط correlation coefficient بين الأطوال والأوزان لعدد n شخص فمثلاً نفرض أن وزن الشخص رقم i هو w_i وطوله h_i والمتوسطات هي h, w على الترتيب.نعتبر المتجهات

$$H = (h_i - h) , \; W = (w_i - w)$$

إذاً معامل الارتباط ρ بين الارتفاعات والأوزان يعطى من

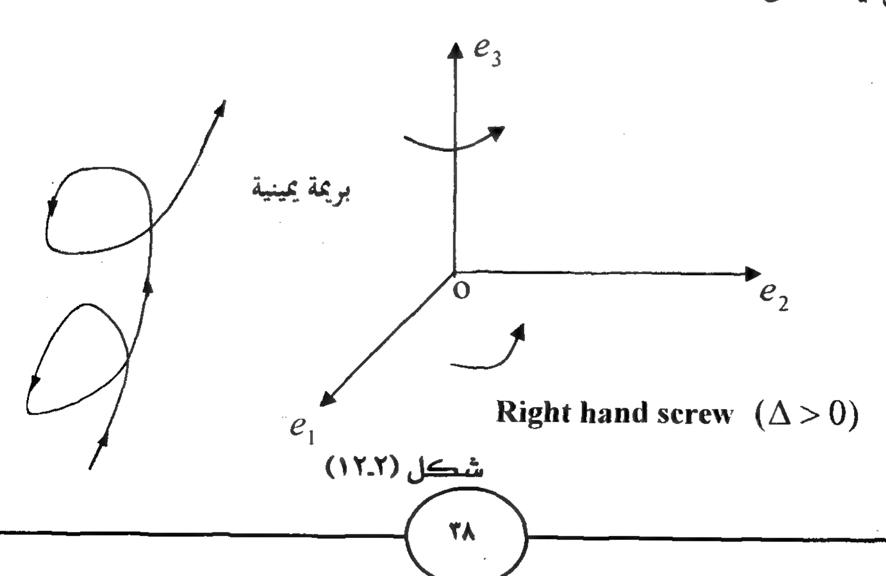
$$\rho = \frac{<H\,,\,W>}{<H\,,\,H>^{\frac{1}{2}}\ \ <W\,,\,W>^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.19)$$

ويعرف على أنه جيب تمام الزاوية بين المتجهين $W,\ H$ في فراغ بعده n ومن هذا يتضح معنى أن معامل الارتباط أقل من أو يساوي الواحد حيث أن مقياس جيب تمام الزاوية دائماً أقل من أو يساوي الواحد.

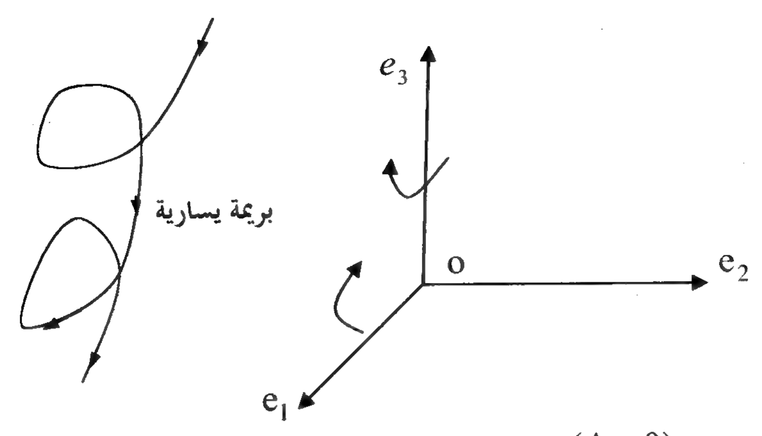
تعريف (٢-٤):

الأساسان $u=\{u_i\}, e=\{e_i\}$ ، حيث $u_i=a_i^j e_j$ يكون لهما نفس الوضع في الفراغ إذا تحقق $\Delta = Det\ (a_j^i) > 0$ ويكونا منعكسان في الفراغ إذا كان $\Delta = Det\ (a_j^i) < 0$. وفي الحالة التي يكون فيها $\Delta > 0$ نسمى الثلاثي المتعامد بالثلاثي اليميني حيث المصفوفة (a_j^i) مصفوفة عمودية وهي مصفوفة التحويل الخطي من E^3 إلى نفسه وتحول الإطار e إلى الإطار u وتسمى مصفوفة الدوران كما هو موضح في شكل (٢-١٢).

بالطبع إذا كان الدوران بين e_1 ، e_2 يجعلنا نسير في اتجاه عكس الاتجاه e_3 فإن الثلاثي يكون في هذه الحالة بريمة يسارية والثلاثي يسمى ثلاثي يساري كما هو موضح في شكل (٢-١٣).



شكل (٢-١٢)



left hand screw $(\Delta < 0)$

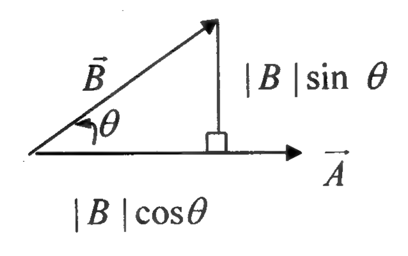
شكل (٢-١٣)

وسنتفق طوال الدراسة على أن الأساس المختار هو الأساس المعياري المتعامد ويكون بريمة يمينية ونكتفي بكلمة ثلاثي لنعنى أساس معياري orhtonormal basis.

تعريف (٢-٥):

يعرف حاصل الضرب الأتجاهي Vector product أو Cross product لمتجهين A، B والذي يرمز له بالرمز $A \times B$ ، على أنه

$$A \times B = <A, A>^{\frac{1}{2}} <B, B>^{\frac{1}{2}} \sin\theta \vec{n} \qquad (2.20)$$



شكل (٢-١٤)

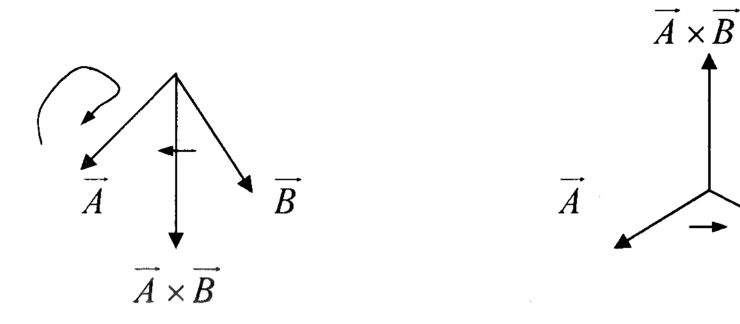
حيث θ هي الزاوية بين المتجهين $A\ ,\ B$ ، $\vec{n}$ متجه الوحدة في الاتجاه العمودي على المستوى الذي يحتوي المتجهين A, B ويكون طول المتجه $A \times B$ هو

$$< A \times B\ ,\ A \times B >^{\frac{1}{2}} = < A,A >^{\frac{1}{2}} < B,B >^{\frac{1}{2}} \sin\ \theta$$

$$= |A|\ |B| \sin\ \theta \qquad (2.21)$$

والذي نرمز له بالرمز $|A \times B|$ ولهذا الطول معنى هندسي وهو أنه مساحة متوازي الأضلاع Parallelogram المنشأ على المتجهين المتجاورين A,B أي أن A,B متجهين (ضلعين) متجاورين فيه ومنه نصل إلى الخاصية التي تنص على أن المساحة كمية اتجاهية.والضرب الاتجاهي يحقق الخواص الآتية:

$$e_i \times e_j = e_k\ ,\ i < j \ ،\ e_i \times e_i = 0\ ,\ \forall\ i$$



شكل (٢-١٥)

وإذا استخدمنا مجموعة التباديل على المجموعة $(1,2,3)$ فإن $e_i \times e_j = \varepsilon\ e_k$ حيث ε تساوي 1 أو -1 فيما إذا كانت المجموعة (i,j,k) تبديل زوجي أو فردي من المجموعة $(1,2,3)$ على الترتيب وهذا يمكن الحصول عليه بسهولة بالتحقق أولاً من الخصائص الآتية:

(i) $\quad A \times B = -\,B \times A\ \ ,\ \ A \times A = 0$

أي أن خاصية الإبدال غير محققة

$$\text{(ii)} \quad A \times B = 0 \ \text{if} \ A = 0 \quad \text{or} \quad B = 0$$

أو المتجه A يوازي المتجه B ويحاول الطالب إعطاء تفسير لذلك باستخدام تعريف التوازي؟

خاصية الدمج القياسية (Scalar associative property) :

$$\text{(iii)} \quad (\alpha A) \times B = A \times (\alpha B) = \alpha (A \times B), \alpha \in \mathbb{R}$$

خاصية التوزيع (Distributive property):

$$\text{(iv)} \quad A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

مثال (١٣.٢):

إذا كان $A = a^i e_i$, $B = b^i e_i$ أثبت أن

$$A \times B = Det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{bmatrix} \qquad (2.22)$$

الحل:

باستخدام خواص الإبدال والتوزيع نحصل على :

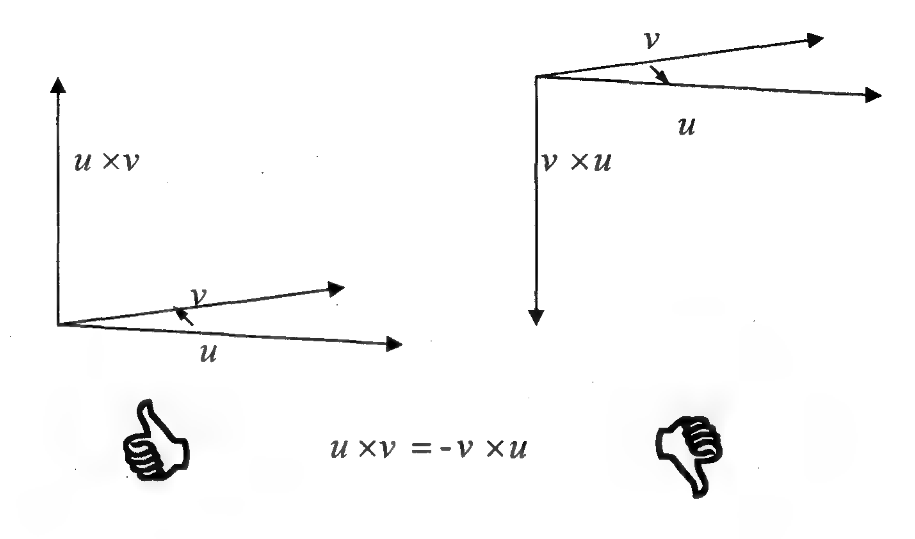
$$A \times B = a^i e_i \times b^j e_j = \sum_{i,j}^{3} (a^i b^j - a^j b^i)\, e_i \times e_j$$

$$= \sum_{\substack{j,i,k \neq i \\ k \neq j}} ((a^i b^j - a^j b^i)\, e_k)$$

وباستخدام خواص المحددات يكون لدينا

$$A \times B = (a^2 b^3 - a^3 b^2) e_1 + (a^3 b^1 - a^1 b^3) e_2 + (a^1 b^2 - a^2 b^1) e_3$$

إشارة حاصل الضرب الاتجاهي يمكن توضيحها وتحديدها عن طريق قاعدة اليد اليمنى كما في شكل (٢ـ١٦).



شكل (٢ـ١٦)

مثال (٢ـ١٤):

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين u,v غير متعامدين، أثبت أن

$$\tan\theta = \frac{|u \times v|}{\langle u,v \rangle} \qquad (2.23)$$

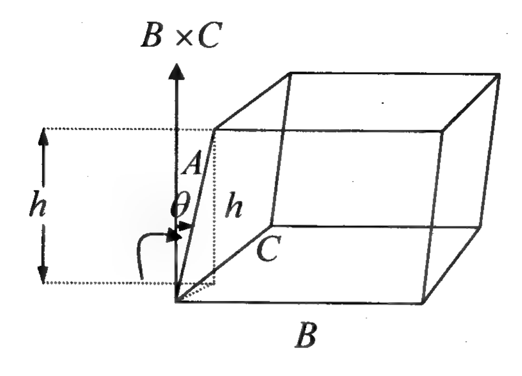
الحل:

من تعريف حاصل الضرب القياسي والاتجاهي (بالقسمة) ينتج المطلوب.

تعريف (٢ـ٦):

يعرف حاصل الضرب الثلاثي القياسي Triple Scalar product للمتجهات A,B,C على أنه حاصل الضرب القياسي للمتجهين $A \times B$, C. أي أنه $\langle A \times B, C \rangle$ والقيمة المطلقة له (القيمة الموجبة) تساوي حجم متوازي المستطيلات المكون بهذه المتجهات الثلاث باعتبارها ثلاثة أضلاع متجاورة. وعلى الطالب أن يرى ذلك بنفسه ؟

(تمرين للطالب) كما هو واضح في شكل (١٧.٢) حيث الارتفاع هو $h =|A| \cos\theta$ ، مساحة القاعدة هي $|B \times C|$ و θ هي الزاوية بين المتجه A والعمودي على القاعدة.



شكل (١٧.٢)

مثال (١٥.٢):

$<(A \times B), C> = 0$ أي أن حجم متوازي المستطيلات يساوي صفر (لا يوجد مجسم) إذا كان أحد هذه الحالات محقق :

(i) أحد المتجهات الثلاث متجه صفري.

(ii) متجهين من الثلاث متجهات متوازيين.

(iii) المتجهات الثلاث تقع في مستوى واحد (توازي مستوى واحد).

الحل:

متروك للطالب كتمرين.

وحاصل الضرب الثلاثي القياسي له الخصائص الآتية:

(i) $<A \times B, C> = <A, (B \times C)>$

(ii) $<A \times B, C> = <B, C \times A> = <C, A \times B>$

وللتحقق من صحة المتساويات (i), (ii) نستخدم خواص المحددات.

مثال (٢-١٦):

إذا كان لدينا ثلاث متجهات $A_i = (a_i^j), i=1,2,3$ فإن حاصل الضرب الثلاثي القياسي هو $< A_1, A_2 \times A_3 >$ ويعطى من $Det\ (a_i^j)$ والذي يكتب أحياناً بالشكل $[A_1, A_2, A_3]$ ويعطى من العلاقة $[A_1, A_2, A_3] = Det\ (a_j^i)$ وهو محدد المصفوفة (a_j^i) وعلى الطالب أن يتحقق من ذلك بنفسه (تمرين متروك للطالب)؟

مثال (٢-١٧):

بين أن $[A,B,C] > 0$ أو $[A,B,C] < 0$ إذا كان $C, A \times B$ متجهان في اتجاه واحد أو في ناحيتين مختلفتين على الترتيب.

الحل:

- يمكن التأكد منها باستخدام العمليات الأولية المسموح بها على صفوف المصفوفات وكذلك خصائص المحددات.

ومن الخصائص السابقة نكون قد برهنا النظرية الآتية:

نظرية (٢-١):

الشرط الضروري والكافي كي توازي المتجهات A_i مستوى واحد (أو تقع في مستوى واحد) هو أن يتحقق $[A_1, A_2, A_3] = 0$

مثال (٢-١٨):

أوجد حجم الهرم الذي يتكون من المتجهات A_i.

(**إرشاد:** استخدم المثال (٢-١٦)).

تعريف (٢-٧):

المتجهات في النظرية السابقة يقال أنها مرتبطة خطياً أما إذا كان $[A_1, A_2, A_3] \neq 0$ سميت المتجهات الثلاث مستقلة خطياً.

من هذا التعريف يكون لزاماً علينا أن نعطي تعريف الاستقلال والارتباط الخطي لمجموعة من المتجهات في الفراغ الاقليدي E^n (من مقرر الجبر الخطي) كالآتي:

إذا كان لدينا m من المتجهات A_α ،$\alpha = 1,2,...,m$ في الفراغ E^n فيقال أنها مرتبطة خطياً Linearly dependent . إذا وجد m من الأعداد k^α ليست جميعها أصفارا بحيث $\sum_{\alpha=1}^{m} k^\alpha A_\alpha = \underline{0}$ وإذا كانت $k^\alpha = 0, \forall \alpha$ فيقال أن المتجهات A_α مستقلة خطياً Linearly independent . وإذا كان أحد المتجهات A_α متجه صفري فإن المتجهات $A_\alpha, \forall\, \alpha$ تكون مرتبطة خطياً.

خواص الارتباط والاستقلال الخطي في الفراغ الثلاثي تعطى من خلال حاصل الضرب الثلاثي القياسي بالنظريات الآتية :

نظرية (٢.٢):

المتجهين A_1, A_2 مرتبطان خطياً إذا وإذا فقط $A_1 \times A_2 = 0$ والمتجهين في هذه الحالة يقعان على مستقيم واحد أو متوازيين (البرهان متروك للقارئ واستخدام خواص الضرب الاتجاهي).

نظرية (٣.٢):

المتجهات الثلاث A_1, A_2, A_3 تكون مرتبطة خطياً إذا وإذا كان فقط $[A_1, A_2, A_3] = 0$ والمتجهات في هذه الحالة تقع في مستو واحد أو بصورة أخرى يمكن التعبير عن أحدهما كتركيبة خطية من الأثنين الآخرين على الصورة $A_3 = k^1 A_1 + k^2 A_2$ حيث k^1, k^2 أعداد قياسية (البرهان متروك للقارئ واستخدام خواص المحددات).

نظرية (٤.٢) :

في الفراغ E^3 أي أربعة متجهات تكون مرتبطة خطياً.

الخواص السابقة للاستقلال والارتباط يمكن التأكد منها من مراجعة مقرر الجبر الخطي.

تعريف (٨.٢):

حاصل الضرب الثلاثي الاتجاهي لثلاث متجهات A_i يرمز له بالرمز $A_1 \times (A_2 \times A_3)$ وهو عبارة عن متجه عمودي على المستوى الذي يشمل المتجهين $A_2 \times A_3, A_1$ ويحقق المتطابقة الاتجاهية

$$A_1 \times (A_2 \times A_3) = <A_1, A_3> A_2 - <A_1, A_2> A_3 \qquad (2.24)$$

وهذه المتطابقة لها تطبيقات كثيرة في علم البلورات في الفيزياء وكذلك في الأبواب القادمة من هذا الكتاب.

مثال (١٩.٢):

لأي متجهين A, B يمكن إثبات (متطابقة لاجرانج)

$$|A \times B|^2 + <A, B>^2 = |A|^2 |B|^2 \qquad (2.25)$$

الحل:

من تعريف الضرب القياسي $<A, B>$ ، الضرب الاتجاهي $A \times B$ والتربيع والجمع نحصل على المطلوب.

ملاحظة (٤.٢):

لأي أربع متجهات يمكن التحقق من أن

$$\text{(i)} \qquad <A_1 \times A_2, A_3 \times A_4> = <A_1, A_3><A_2, A_4> - <A_1, A_4><A_2, A_3>$$

$$\text{(ii)} \qquad (A_1 \times A_2) \times (A_3 \times A_4) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

حيث

$$A_1 = (a_{1i}), A_2 = (a_{2i}), A_3 = (a_{3i}), A_4 = (a_{4i}), i = 1,2,3$$

أو في الصورة

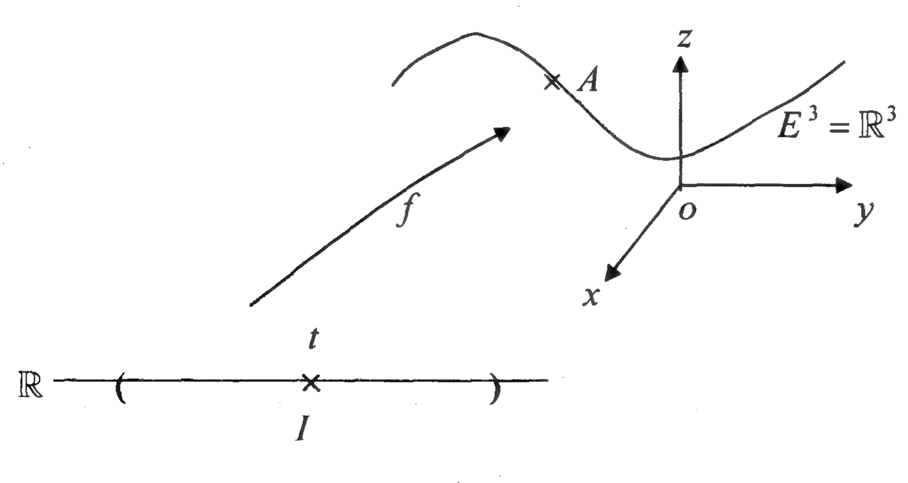
$$\text{(iii)} \quad (A_1 \times A_2) \times (A_3 \times A_4) = [A_1, A_2, A_4]A_3 - [A_1, A_2, A_3]A_4 = [A_3, A_4, A_1]A_2 - [A_3, A_4, A_2]A_1$$

(٣.٢) الدالة الاتجاهية Vector function (Vector Field):

بعد أن عرفنا الكميات الثابتة (الأعداد الحقيقية مثلاً) أمكن تعريف الكميات المتغيرة ومنها الدوال في متغير أو أكثر. يمكننا بأسلوب مشابه جعل مركبات المتجه الثابت دوال وليست كميات ثابتة أي أنه في هذه الحالة طول المتجه دالة قياسية وليست كمية ثابتة، في هذه الحالة يسمى المتجه بالدالة الاتجاهية (الحقل أو المجال المتجه) وهذا التعريف ليس دقيق في نصه ولكن يمكن إعطاء تعريف رياضي دقيق كالآتي:

تعريف (٩.٢):

الدالة الاتجاهية (الحقل المتجه) هي راسم (تطبيق) من الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أو جزء منها I (فترة مفتوحة أو مغلقة مثلاً) إلى الفراغ الأقليدي E^3 بحيث أنه لكل $t \in I \subset \mathbb{R}$ توجد نقطة A في $E^3 = \mathbb{R}^3$ كما هو موضح في شكل (١٨.٢).



شكل (١٨.٢)

ويعبر عن الدالة الاتجاهية التي مجالها I ومجالها المصاحب $\mathbb{R}^3$ على الصورة

$$f = f(t) = \vec{A}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \qquad (2.26)$$

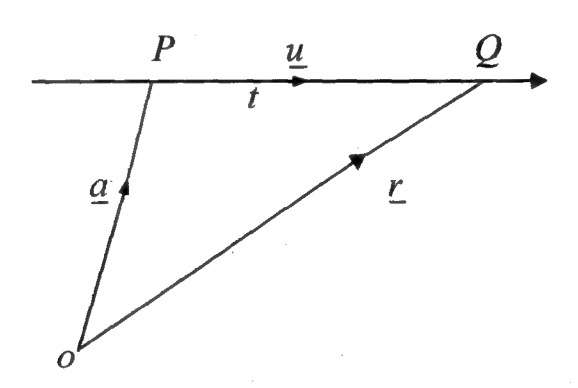
تعريف (٢-١٠):

كل النقاط الهندسية في الفراغ E^3 المناظرة لقيم $t \in I$ والمعرفة بالدالة الاتجاهية f تمثل منحنى فراغ space curve.

مثال (٢-٢٠):

إذا كانت الدوال $f_i(t)$ دوال خطية في t فإن الدالة الاتجاهية في هذه الحالة تحدد مستقيم في الفراغ يعطى بالدالة الاتجاهية الخطية (شكل (٢-١٩)).

$$\underline{r} = t\,\underline{u} + \underline{a}\,,\ t \in \mathbb{R} \qquad (2.27)$$



شكل (٢-١٩)

حيث t بارامتر، $\underline{u} = (u_i)$ اتجاه الخط المستقيم و $\underline{a} = (a_i)$ متجه الموضع لنقطة معلومة على الخط المستقيم L وبالتالي معادلة الخط المستقيم تصبح على الصورة :

$$\underline{r} = \underline{r}(t) = (tu_1 + a_1, tu_2 + a_2, tu_3 + a_3) \qquad (2.28)$$

وبالتالي يمكن القول أن الخط المستقيم يمثل بدالة اتجاهية خطية أي كل مركباتها دوال قياسية خطية. وإذا كان $\{e_i\}$ هو أساس الفراغ $\mathbb{R}^3$ فإن $\underline{f}(t)$ يمكن

كتابتها على الصورة $\underline{f}(t)=f^{i}(t)e_{i}$ وفي هذه الحالة الدالة الاتجاهيه ترسم منحنى في الفراغ معادلاته البارامترية هي $x_{i}=f^{i}=f^{i}(t)$.

وببساطة شديدة يمكننا تعريف اتصال الدالة الأتجاهية فيقال أن الدالة الاتجاهية متصلة إذا كانت كل مركبة $f^{i}(t)$ من مركباتها دالة متصلة في t . ويقال أن $\underline{f}=\underline{f}(t)$ تفاضلية إذا كانت كل مركبة $f^{i}(t)$ من مركباتها دالة تفاضلية ودون الخوض في تفاصيل التعريف الدقيق لتفاضل الدالة الاتجاهية فنكتفي بهذه المعاني بالنسبة للتفاضل.

المشتقة التفاضلية الأولى للدالة الاتجاهية تعطى من

$$\begin{aligned}\underline{f}'(t)&=\frac{df}{dt}=(\frac{df^{i}(t)}{dt})=(\frac{df^{1}}{dt},\frac{df^{2}}{dt},\frac{df^{3}}{dt})\\&=(f'^{i}(t)),\ '=\frac{d}{dt}\end{aligned}\qquad(2.29)$$

والدالة الاتجاهية تسمى أحياناً **حقل متجه Vector field أو مجال اتجاهي**.

تعريف (٢-١١):

يقال أن الدالة (الراسم) $f:\mathbb{R}^{n}\longrightarrow\mathbb{R}^{m}$ المعرف بالقاعدة

$$f(x_{1},x_{2},...,x_{n})=f(x)=y=(y_{1}(x),y_{2}(x),...,y_{m}(x))$$

$$x=(x_{1},x_{2},...,x_{n})\in\mathbb{R}^{n},\ y_{i}:\mathbb{R}^{n}\longrightarrow\mathbb{R},y_{i}(x)\in\mathbb{R}$$

أنها متصلة إذا كان وكان فقط كل مركبة $y_{i}(x)$ من مركباتها (دوال ذات قيم حقيقية $y_{i}:\mathbb{R}^{n}\longrightarrow\mathbb{R}$) دالة متصلة.

تعريف (٢-١٢):

يقال أن الدالة $f:\mathbb{R}^{n}\longrightarrow\mathbb{R}^{m}$ تفاضلية إذا كانت كل مركبة من مركباتها تفاضلية.

نظرية (٥.٢):

يقال أن الدالة (الراسم) من طبقة C^r إذا كانت كل المشتقات التفاضلية حتى الرتبة r دوال تفاضلية.

ملاحظة (٥.٢):

الفراغات الاتجاهية $\mathbb{R}^n$ ، $\mathbb{R}^m$ هي فراغات إقليدية.

تعريف (١٣.٢):

إذا كانت المشتقات الجزئية $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ موجودة فإن المصفوفة $m \times n$ المعرفة كالآتي :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

تسمى مصفوفة جاكوب Jacobian matrix أو المصفوفة الجاكوبية ويرمز لها بالرمز

$$J_f(x_1,\ldots,x_n)=J_f(x) \text{ or } \frac{\partial(y_1,\ldots,y_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$$

ملاحظة (٦.٢):

الصف الذي ترتيبه i في مصفوفة جاكوب هو إنحدار gradient الدالة $y_i(x)$ أي الصف i هو متجه

$$\nabla y_i = (\frac{\partial y_i}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial y_i}{\partial x_n})$$

فمثلا
$$\nabla y_1 = (\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_1}{\partial x_n})$$

تعريف (١٤.٢):

إذا كانت $n = m$ فإن مصفوفة جاكوب تكون مصفوفة مربعة ويكون لها محدد يسمى محدد جاكوب Jacobian determinant.

محدد جاكوب عند نقطة p يعطي معلومات هامة عن سلوك الدالة f حول تلك النقطة ونوضح ذلك من خلال ما يأتي:

نظرية (٦.٢):

إذا كانت $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ دالة اتجاهية لها مشتقات تفاضلية متصلة continuously differentiable فتكون قابلة للعكس invertible إذا كان محدد جاكوب مختلف عن الصفر.

ملاحظة (٧.٢):

إذا كان محدد جاكوب موجب (سالب) عند نقطة p فإن الدالة f تحفظ (تعكس) التوجيه orientation.

ملاحظة (٨.٢):

القيمة الموجبة (المطلقة) لمحدد جاكوب عند نقطة p تعتبر معامل تمدد أو تقلص للحجم بالقرب من p وهذا يفسر لماذا يستخدم في تغير الإحداثيات أو التكامل بالتعويض.

مثال (٢١.٢):

بين أن التحويل

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{حيث}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (y_1, y_2, y_3)$$

$$y_1 = 5x_2, y_2 = 4x_1^2 - 2\sin(x_2 x_3), y_3 = x_2 x_3$$

يعكس التوجيه بالقرب من النقطة (x_1,x_2,x_3) حيث x_1,x_2 متحدي الإشارة.

الحل:

محدد جاكوب يعطى من

$$Det\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 8x_1 & -2x_3\cos(x_2x_3) & -2x_2\cos(x_2x_3) \\ 0 & x_3 & x_2 \end{bmatrix} = -40x_1x_2<0$$

حيث x_1,x_2 متحدي الإشارة. إذاً f تعكس التوجيه حول النقاط التي تحقق أن الإحداثي الأول والثاني متحدي الإشارة. وحيث أن محدد جاكوب مختلف عن الصفر تعيداً عن نقطة أصل الإحداثيات فإن الدالة f قابلة للعكس.

مثال (٢٢.٢):

إذا كانت $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, y=f(x)$ دالة ذات قيم حقيقية، ماذا نعني بمحدد جاكوب في هذه الحالة.

الحل:

محدد جاكوب في هذه الحالة هو $\frac{dy}{dx}$ وإذا كان $\frac{dy}{dx}\neq 0$ فإن الدالة لها معكوس $x=f^{-1}(y)$. (راجع مقرر التفاضل والتكامل (١)).

مثال (٢٣.٢):

إذا كان $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ ، $x\longrightarrow y=f(x)$

ماذا عن عنصر الحجم في نظام الإحداثيات X، Y؟

الحل:

العنصر التفاضلي للدالة الاتجاهية $y=f(x)$ هو $dy=y_x\,dx$

حيث y_x مصفوفة جاكوب والعلاقة بين عنصر الحجم تعطى من

$$dy_1 ... dy_n = \left| \frac{\partial(y_1,...,y_n)}{\partial(x_1,...,x_n)} \right| dx_1 .. dx_n$$

$$dx = dx_1 ... dx_n \ , dy = dy_1 ... dy_n \ ,$$

مثال (٢٤.٢):

أعط تفسير هندسي لمحدد جاكوب في حالة $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 , y = f(x)$

الحل:

حيث أن الصف i هو $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ في مصفوفة جاكوب. إذاً $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ هو متجه في الفراغ الثلاثي ويكون

$$J_f(x_1,x_2,x_3) = [\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_3}]$$

حاصل الضرب الثلاثي القياسي لثلاث متجهات

$$= < \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2} \times \frac{\partial y}{\partial x_3} > = Det(\frac{\partial(y_1,y_2,y_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)})$$

نعطي الآن تعريف آخر لحقل متجه متوافق في المضمون ولكنه مختلف في النص.

تعريف (١٥.٢):

المتجه الذي يعرفه حقل المتجه عند نقاط الفراغ المختلفة يسمى متجه مماس Tangent vector عند النقطة p ويرمز له بالرمز V_p أو $V(p)$.

مثال (٢٥.٢):

إذا كان $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ حقل متجه معرف عند نقاط الفراغ $\mathbb{R}^n$ أي أن

$$V = V(x_1,x_2,...,x_n) \ , \ V = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) \in \mathbb{R}^n$$

وإذا كانت $p=(x^0)=(x_1^0,...,x_n^0)\in\mathbb{R}^n$ فإن

$$V_p=V(p)=V(x_i^0)=(y_i(x^0))=v$$

هو متجه بدايته عند النقطة p واتجاهه v ويكتب $V_p(p,v)$.

مثال (٢-٢٦):

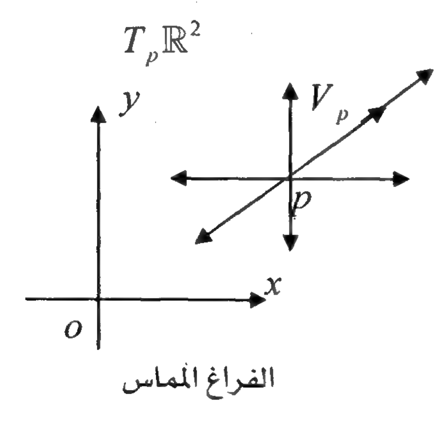
إذا كان $V:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ حيث

$$V(x,y,z)=(xy,yz,x^2z+y)$$

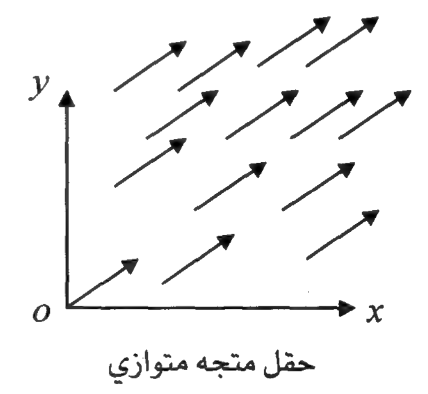
فإن $V(1,-1,2)=(-1,-2,1)$ متجه في $\mathbb{R}^3$ اتجاهه $(-1,-2,1)$ ونقطة تأثيره $p(1,-1,2)$.

أي أن $V_p=(p,v)$ متجه مماس نقطة تأثيره عند $p(1,-1,2)$ واتجاهه $v=(-1,-2,1)$

مجموعة المتجهات التي نقطة تأثيرها نقطة $p\in\mathbb{R}^n$ تسمى الفراغ المماس للفراغ $\mathbb{R}^n$ عند النقطة p ويرمز له بالرمز $T_p\mathbb{R}^n$ كما هو موضح في شكل (٢-٢٠)



الفراغ المماس



حقل متجه متوازي

شكل (٢-٢٠)

ملاحظة (٢-٩):

الفراغ المماس عند نقطة $p\in\mathbb{R}^n$ يعني الفراغ الاتجاهي المكون من جميع المماسات لجميع المنحنيات المارة بالنقطة p وبعد الفراغ المماس يساوي بعد الفراغ الأصلي أي أن

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim T_p\mathbb{R}^n ,T_p\mathbb{R}^n = \{V_p : p \in \mathbb{R}^n ,V_p = (p,v)\}$$

تعريف (١٦.٢):

جميع الفراغات المماسية للفراغ $\mathbb{R}^n$ عند جميع نقاطه تكون فراغ اتجاهي يسمى الحزمة المماسية Tangent bundle ويرمز لها بالرمز $T\mathbb{R}^n$ أي أن

$$T\mathbb{R}^n = \bigcup_{p\in M} T_p\mathbb{R}^n = \{(p,V_p), p \in \mathbb{R}^n ,V_p \in T_p\mathbb{R}^n\}$$

وإذا كان $\dim \mathbb{R}^n = n$ فإن $\dim T_p\mathbb{R}^n = n$ وبالتالي فإن

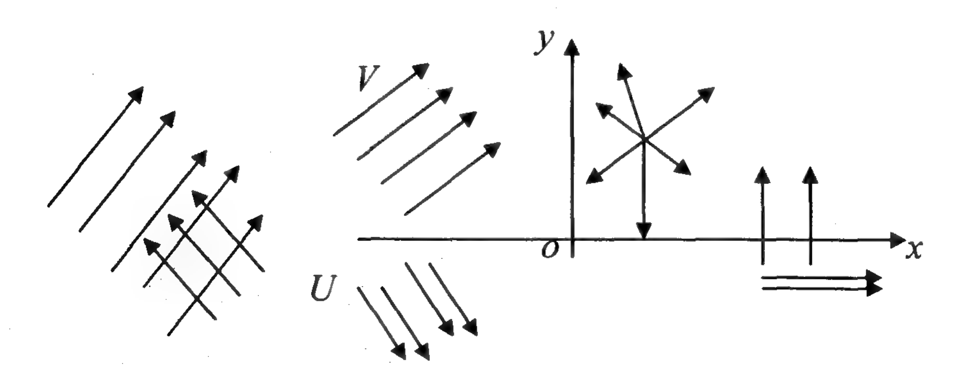
$$\dim T\mathbb{R}^n = n + n = 2n$$

لأن أي متجه في $T\mathbb{R}^n$ مكون من $2n$ مركبة مرتبة حيث n المركبة الأولى تحدد النقطة p، n المركبة الثانية تحدد المتجه المماس V_p.

مما سبق يمكن صياغة التعريف التالي:

تعريف (١٧.٢):

حقل المتجه هو مقطع حزمة مماسية tangent bundle section لحزمة مماسية كما هو موضح في شكل (٢١.٢).



شكل (٢١.٢): حزمة مماسية

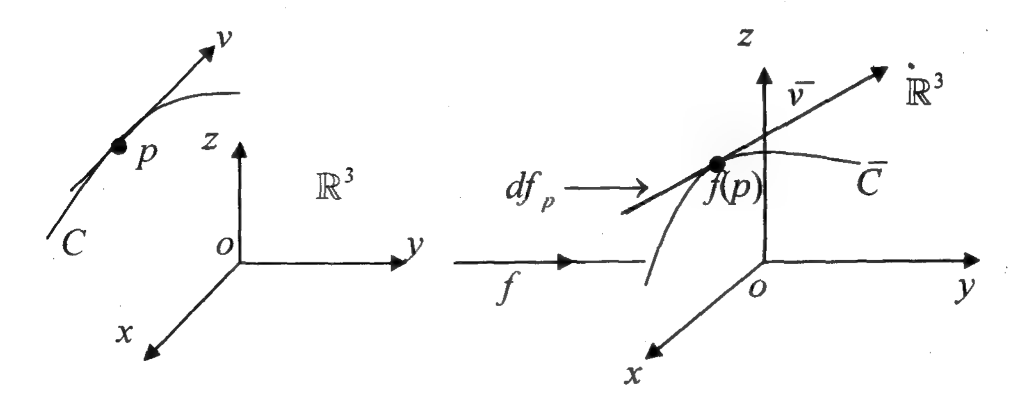
باستخدام تعريف مؤثر جاكوب والفراغ المماس لفراغ معطى نقدم هذا التعريف.

تعريف (٢-١٨):

إذا كان $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ حقل اتجاهي معرف وتفاضلي فإننا نعرف الراسم

$$df_p : T_p\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}^m,\ \ df_p(v) = \bar{v}_{f(p)}$$

الذي يأخذ المتجه المماس v عند p إلى المتجه المماس $\bar{v}$ المناظر له عند $f(p)$ (صورة p) ويرمز له بالرمز df_p ويسمى راسم جاكوب أو الراسم التفاضلي أو الراسم المماس differential or tangent map كما هو موضح في شكل (٢-٢٢).



$$df_p(v) = \bar{v}_{f(p)}\ ,\ \bar{C} = f(C), p \in C \rightarrow f(p) \in \bar{C}$$

شكل (٢-٢٢)

ويمكن التأكد من أن الراسم المماس هو تحويل خطي من $T_p\mathbb{R}^n$ إلى $T_{f(p)}\mathbb{R}^m$ معرف من خلال مصفوفة جاكوب

$$\frac{\partial(y_1,\dots,y_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

وسوف نطبق ذلك في الباب الثالث والثامن والخامس عشر إن شاء الله.

(٤.٢) قواعد اشتقاق الدالة الاتجاهية :

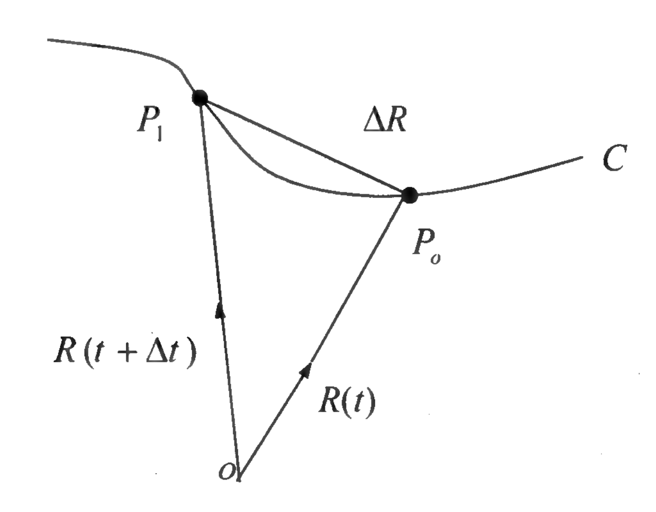
Differentiation of vector valued function :

نفرض أن لدينا دالة اتجاهية $R(t)$ في متغير واحد وقيمها في الفراغ الأقليدي E^n حيث E^n $R(t): I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^n$ معرفة كالآتي:

$$t \in I \longrightarrow f(t) = (x_i(t)),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

المشتقة التفاضلية الأولى لها تعرف بالآتي :

$$\frac{dR}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} \qquad (2.30)$$



شكل (٢.٢٣)

واضح من شكل (٢ـ٢٣) أنه عندما تكون Δt صغيرة جداً تصبح القطعة المستقيمة (الوتر) $P_oP_1 = \Delta R$ مماس للمنحنى عند P_o. العلاقة (2.30) صحيحة بشرط أن تكون الدالة $R(t)$ متصلة continuous والنهاية موجودة أي عندما يتحقق

$$\lim_{\Delta t \to 0} R(t+\Delta t) = R(t) \qquad (2.31)$$

أو ما يكافئ: إذا كان لكل عدد موجب ε يمكن إيجاد عدد موجب δ بشرط

$$|\Delta t| < \delta \quad \text{عندما} \quad |R(t+\Delta t) - R(t)| < \varepsilon \qquad (2.32)$$

حيث δ تتوقف على ε (من التحليل الرياضي).

قواعد حساب المشتقات التفاضلية للمجموع وحاصل الضرب تشبه إلى حد ما قواعد التفاضل للدوال القياسية مع مراعاة الاتجاه ونوضح ذلك كالآتي :

نفرض أن $R_1(t)$ ، $R_2(t)$ ، $R_3(t)$ دوال متجهة قابلة للتفاضل، $\Phi(t)$ دالة قياسية (تفاضلية) معرفة على نفس مدى تعريف الدوال $R_i(t)$ إذاً

$$\frac{d}{dt}(R_1 \pm R_2) = \frac{dR_1}{dt} \pm \frac{dR_2}{dt} \qquad (2.33)$$

$$\frac{d}{dt}(\Phi R_1) = \Phi \frac{dR_1}{dt} + \frac{d\Phi}{dt} R_1 \qquad (2.34)$$

$$\frac{d}{dt} < R_1, R_2 > = < R_1, \frac{dR_2}{dt} > + < \frac{dR_1}{dt}, R_2 > \qquad (2.35)$$

$$\frac{d}{dt}(R_1 \wedge R_2) = R_1 \wedge \frac{dR_2}{dt} + \frac{dR_1}{dt} \wedge R_2 \qquad (2.36)$$

$$\frac{d}{dt}[R_1, R_2, R_3] = [R_1, R_2, \frac{dR_3}{dt}] + [R_1, \frac{dR_2}{dt}, R_3] + [\frac{dR_1}{dt}, R_2, R_3] \qquad (2.37)$$

(تفاضل المحددات)

$$\frac{d}{dt}(R_1 \wedge (R_2 \wedge R_3)) = R_1 \wedge (R_2 \wedge \frac{dR_3}{dt}) + R_1 \wedge (\frac{dR_2}{dt} \wedge R_3) + \frac{dR_1}{dt} \wedge (R_2 \wedge R_3) \qquad (2.38)$$

نفرض أن لدينا دالة اتجاهية $R(u^1,u^2)$ في متغيرين وقيمها في الفراغ $\mathbb{R}^3$ مثلاً، أي أن :

$$R(u^1,u^2): D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$(u^1,u^2) \longrightarrow R(u^1,u^2) = (x_i(u^1,u^2))$$

وإذا كانت $x_i(u^1,u^2)$ دوال متصلة ومعرفة على المنطقة $D \subset \mathbb{R}^2$ فإن المشتقة التفاضلية الجزئية بالنسبة لأحد متغيراتها u^1 أو u^2 تعرف بالآتي:

$$\frac{\partial R}{\partial u^1} = R_{u^1} = R_1 = \lim_{\Delta u^1 \to 0} \frac{R(u^1+\Delta u^1,u^2) - R(u^1,u^2)}{\Delta u^1} \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial R}{\partial u^2} = R_{u^2} = R_2 = \lim_{\Delta u^2 \to 0} \frac{R(u^1,u^2+\Delta u^2) - R(u^1,\ u^2)}{\Delta u^2} \quad (2.40)$$

بشرط وجود هذه النهايات واتصال الدالة R.

ملاحظة (١٠،٢):

استمرار (اتصال) الدالة الاتجاهية يعني استمرار كل مركبة من مركباتها وكذلك نهاية الدالة الاتجاهية يعني وجود نهاية كل مركبة من مركباتها.

ملاحظة (١١،٢):

قواعد التفاضل الجزئي للدوال الاتجاهية في عدة متغيرات تتبع نفس قواعد التفاضل العادي للدالة الاتجاهية في متغير واحد.

في الحالة العامة فإن حقل المتجه vector field أو الدالة الاتجاهية هي راسم $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ تحدد لكل $x \in \mathbb{R}^n$ دالة اتجاهية $f(x) \in \mathbb{R}^m$. والحالات السابقة تعتبر حالات خاصة من هذا التعريف حيث $n = 1, m = 3; n = 2, m = 3$ على الترتيب.

مثال (٢.٢٧):

إذا كان $A(t)$ دالة اتجاهية ثابتة المقدار، بين أن المتجهان A، $\frac{dA}{dt}$ متعامدان.

الحل:

بما أن A دالة اتجاهية ثابتة المقدار أي أن: مقدار ثابت $=< A, A >$

وبالتفاضل نحصل على: $< A, \frac{dA}{dt} > + < \frac{dA}{dt}, A > = 0$

ومن التماثل نجد أن $2 < A, \frac{dA}{dt} > = 0$

أي أن $\frac{dA}{dt}$ عمودي على المتجه A بشرط أن $\frac{dA}{dt} \neq 0$.

لاحظ أن المعنى الهندسي للمشتقة الأولى هو اتجاه المماس للمنحنى عند نقطة ما. وهذا الموضوع سوف نتعرض له في الباب القادم إن شاء الله.

(٢.٥) تكامل الدالة الاتجاهية: Integration of a vector function

نعلم أنه بالنسبة للدالة القياسية أن التكامل هو عملية عكسية للتفاضل، وهذا محقق بطريقة مشابهة بالنسبة للدالة الاتجاهية، فإذا كانت

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i$$

دالة اتجاهية من $I \subset \mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}^3$ تحقق

$$f(t) = \frac{d}{dt} B(t) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} b_i(t) e_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{db_i(t)}{dt} e_i$$

حيث $f(t)$، $B(t)$ دوال اتجاهية متصلة على الفترة $I \subset \mathbb{R}$

$$\therefore \quad \int_I f(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_I f_i(t)\right)e_i \qquad (2.41)$$

أي أن تكامل الدالة الاتجاهية (الحقل الاتجاهي أو المجال الاتجاهي) نحصل عليه بتكامل كل مركبة من مركباتها على نفس الفترة I وبالتالي نحصل على :

$$\int_I f(t)dt = \int_I \frac{d}{dt}B(t)dt = B(t)+C \qquad (2.42)$$

حيث C متجه اختياري ثابت يتحدد من معرفة حدود التكامل وهنا يتضح من أن التكامل عملية عكسية للتفاضل.

ملاحظة (١٢.٢):

من حقيقة أن التكامل عملية عكسية للتفاضل يمكن أن نعرف التفاضل كعملية عكسية للتكامل وبالتالي يمكن أن ندرس التكامل وبعده نعرف التفاضل للدوال.

مثال (٢٨.٢):

أوجد تكامل الدالة الاتجاهية $A(t)=(\sin t, \cos t, 2t)$ على الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$.

الحل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} A(t)dt = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t dt\right)$$

$$=(1,1,\frac{\pi^2}{4})$$ متجه ثابت،

مثال (٢٩.٢):

أوجد تكامل الدالة الاتجاهية

$$A(t)=e^{2t}e_1+\sin 3te_2-\tan te_3$$

الحل:

$$\int A(t)dt = (\int e^{2t}dt)e_1 + (\int \sin 3t dt)e_2 - (\int \tan t dt)e_3$$

$$= \frac{1}{2}e^{2t}e_1 - \frac{1}{3}\cos 3t e_2 + \ln \cos t e_3 + C \qquad \text{حقل متجه،}$$

حيث C متجه اختياري ثابت، $\{e_i\}$ الأساس المعتاد للفراغ الأقليدي.

ملاحظة (١٣.٢):

الدالة الاتجاهية في المثال السابق معرفة على فترة مفتوحة $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ أو ما يكافئها $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ وهكذا. لاحظ أن المركبة الثالثة غير معرفة عند $\pm\frac{\pi}{2}$.

مثال (٣٠.٢):

أوجد

$$\int A \wedge \frac{d^2A}{dt^2}dt$$

حيث $A = A(t)$ حقل متجه قابل للتفاضل حتى الرتبة الثانية.

الحل:

بما أن

$$\frac{d}{dt}(A \wedge \frac{dA}{dt}) = \frac{dA}{dt} \wedge \frac{dA}{dt} + A \wedge \frac{d^2A}{dt^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(A \wedge \frac{dA}{dt}) = 0 + A \wedge \frac{d^2A}{dt^2}$$

$$\therefore \quad \int A \wedge \frac{d^2A}{dt^2}dt = \int \frac{d}{dt}(A \wedge \frac{dA}{dt})\, dt$$

$$= A \wedge \frac{dA}{dt} + C \qquad \text{حقل متجه}$$

حيث C متجه ثابت اختياري، $A(t) \neq 0$ دالة اتجاهية قابلة للتفاضل على الأقل مرتين.

مثال (٣١.٢):

أوجد قيمة التكامل $\int < A(t), \frac{dA(t)}{dt} > dt$

الحل:

حيث أن

$$\frac{d}{dt} < A(t), A(t) > = 2 < A(t), \frac{dA(t)}{dt} >$$

(من خواص حاصل الضرب القياسي)

$$\therefore \quad \int < A(t), \frac{dA(t)}{dt} > dt = \frac{1}{2} \int \frac{d}{dt} < A(t), A(t) > dt$$

$$= \frac{1}{2} < A(t), A(t) > + C$$

$$= \frac{1}{2} | A(t) |^2 + C$$

دالة قياسية

حيث $| A(t) |$ نعني به طول الدالة الاتجاهية $A = A(t)$.

ملاحظة (١٤.٢):

من المعلومات السابقة نجد أن التكامل الاتجاهي مؤثر خطي ولذلك فإن تكامل الدالة الاتجاهية يتبع قواعد التكامل العادي. وعليه فإن تكامل الدالة الاتجاهية نحصل عليه بتكامل كل مركبة على حدة باعتبارها دالة قياسية.

(٦.٢) نظرية الدالة العكسية: Inverse Function Theorem

نفرض أن $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ راسم معرف من خلال n من الدوال الحقيقية في n من المتغيرات الحقيقية

$$f^i(x^1, ..., x^n), 1 \leq i \leq n$$

ومن طبقة C^1 على المنطقة المفتوحة U.

نعتبر الراسم الخطي (التفاضلي)

$$df_{x_o} : T_{x_o}\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{f(x_o)}\mathbb{R}^n$$

المعرف من خلال مصفوفة جاكوب عند النقطة x_o بشرط أن

$$J = Det\left(\frac{\partial(f^1,\dots,f^n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right) \neq 0 \quad , \quad \text{at} \quad x_o$$

وبالتالي يمكن صياغة ما يلي:

١. يوجد منطقة جوار مفتوحة V_{x_o} للنقطة x_o ومنطقة جوار مفتوحة $V_{f(x_o)}$ للنقطة $f(x_o)$ بشرط أن $f \in C^1$ تماثل تفاضلي diffeomorphism (f, f^{-1} من طبقة C^1 وكل من f, f^{-1} تناظر أحادي) من V_{x_o} على $V_{f(x_o)}$.

٢. الراسم (الدالة) العكسي يعرف من خلال n من الدوال $(f^{-1})^i \in C^1$ على المنطقة $V_{f(x_o)}$ والتفاضلي للدالة f^{-1} يعرف من خلال معكوس مصفوفة جاكوب التي تعرف f له أي أن

$$(df^{-1})_{f(x_o)} = (df_{x_o})^{-1}$$

(٧.٢) نظرية الدالة الضمنية: Implicit Function Theorem

في حساب التفاضل للدوال في أكثر من متغير فإن نظرية الدالة الضمنية تنص على أنه لمجموعة مناسبة من المعادلات يمكن أن يعبر عن بعض المتغيرات كدوال في باقي المتغيرات. هذه العملية توجد عليها كثير من القيود فمثلاً دائرة الوحدة $x^2 + y^2 = 1$ تمثل مجموعة نقاط في المستوى $\mathbb{R}^2$ ولكن

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow (-1,1) \subset \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow x \quad , \quad (x, -y) \longrightarrow x$$

أي أن الراسم f ليس تناظر أحادي، وعلاوة على ذلك فإن المماسات للدائرة عند النقاط $(\pm 1,0)$ رأسية أي أن y لا يمكن التعبير عنها كدالة تفاضلية في x عند هذه النقاط أو إذا كانت $y=\sqrt{1-x^2}$ فإن

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

تقترب من اللانهاية عند $|x|=1$.

مثال آخر توضيحي: لنعتبر الدالة

$$f(x,y,z)=x^2-a+z^3=0$$

بقواعد الجبر البسيطة نجد أن

$$y=-\frac{1}{a(x^2+z^2)}$$

ولكن هذا يفشل إذا كانت $a=0$ أي أن نظرية الدالة الضمنية تعطي الشروط التي تجعل مثل هذا النوع من التمثيل لا يفشل وخصوصاً

$$\frac{\partial f}{\partial y}=a=0$$

من أجل ذلك نقدم نظرية الدالة الضمنية في شكلها العام كما يأتي:

نفرض أن لدينا فراغات $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ محدودة البعد ونفرض أن الراسم

$$f: V\times U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

معرف من خلال m من الدوال $f^i \in C^1$ في n من المتغيرات الحقيقية حيث $U\subset\mathbb{R}^m$ ، $V\subset\mathbb{R}^n$.

إذا كانت النقطة $(x_o^1,\dots,x_o^n;y_o^1,\dots,y_o^m)\in V\times U$

تحقق نظام مكون من m من المعادلات الضمنية

$$f^i(x^i,...,x^n;y^1,...,y^m)=0$$

بالإضافة إلى

$$J=Det(\frac{\partial(f^1,...,f^m)}{\partial(y^1,...,y^m)})\neq 0$$

عند النقطة $(x_o^1,...,x_o^n;y_o^1,...,y_o^m)$. إذاً في مناطق الجوار المباشر للنقاط

$$(x_o^1,...,x_o^n)\ ,\ (y_o^1,...,y_o^m)$$

يتحقق أن النظام

$$f^i(x^1,...,x^n;y^1,...,y^m)=0\ ,1\leq i\leq m$$

يكافئ النظام

$$y^i=g^i(x^1,...,x^n),1\leq i\leq m$$

حيث $g^i\in C^1$ في منطقة الجوار المباشر للنقطة $(x_o^1,...,x_o^n)$.

النتائج السابقة غاية في الأهمية في تعريف المنحنى وتعريف السطوح في الأبواب القادمة.

مثال (٣٢.٢):

عبر عن x بدلالة y, z حيث

$$F(x,y,z)=x-yz+z^2=0$$

الحل:

في هذه الحالة $F:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ وشروط نظرية الدالة الضمنية تؤول إلى

$$\frac{\partial F}{\partial x}=1\neq 0$$

$$\therefore\ x=f(y,z)=yz+z^2$$

وهي دالة تفاضلية.

مثال (٣٣.٢):

نعتبر الدالتين

$$F_1(x,y,z,u,v)=x^2u^2+xzv+y^2=0$$

$$F_2(x,y,z,y,v)=yzu+xyv^2-3x=0$$

بين هل يمكن التعبير عن u, v بدلالة x, y, z في المناطق المحيطة بالنقاط

$$a=(x_o,y_o,z_o)=(3,3,-3)\ ,\ \ b=(u_o,v_o)=(0,1)$$

حيث $f:\mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ ,(x,y,z,u,v)\longrightarrow(F_1,F_2)$

الحل:

نعتبر المصفوفة

$$J=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v}\\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2ux^2 & xz\\ yz & 2xyv\end{bmatrix}$$

$$(Det\,J)_C=\begin{vmatrix}0 & -9\\ -9 & 18\end{vmatrix}=-81\neq 0\ , C=(a;b)$$

أي أن J مصفوفة غير شاذة وبالتالي شروط نظرية الدالة الضمنية محققة أي أن

$$u=u(x,y,z)\ \ ,\ v=v(x,y,z)$$

حل للمعادلتين الضمنيتين المعطيتان حول النقطة

$$C=(a,b)=(3,3,-3,0,1)$$

مثال (٢-٣٤):

أوجد نقاط تقاطع الأسطوانتين:

$$F_1(x,y,z)=y-x^2=0$$ (أسطوانة مكافئة)

$$F_2(x,y,z)=z-x^3=0$$ (أسطوانة تكعيبية)

الحل:

بتطبيق نظرية الدالة الضمنية حيث

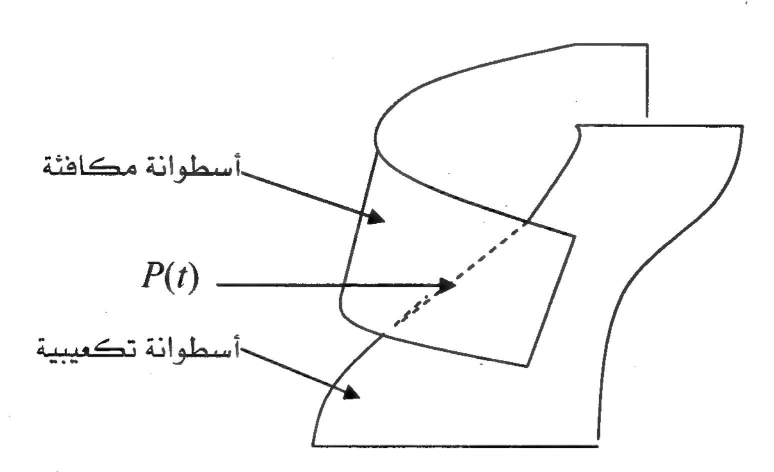
$$J=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ ,\ \ Det\ J=1\neq 0$$

إذاً $y=x^2\ ,\ z=x^3$

وبوضع $x=t$ نحصل على كل النقاط $p(t)$ التي تتقاطع فيها الأسطوانتين على الصورة

$$(t,t^2,t^3)\ ,\ t\in\mathbb{R}$$ (منحنى فراغ)

ونوضح ذلك في شكل (٢-٢٤).



شكل (٢-٢٤)

مثال (٣٥.٢):

أوجد تقاطع سطح الأسطوانة المكافئة

$$F_1(x,y,z)=y-z^2=0$$

وسطح المخروط

$$F_2(x,y,z)=xz-y^2=0$$

الحل:

نعتبر
$$J=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ z & -2y\end{bmatrix}$$

حيث
$$Det\,J=-z$$

إذاً لجميع قيم $z\neq 0$ يمكن حل المعادلتين أي التعبير عن x,y بدلالة z على الصورة

$$y=z^2,x=\frac{y^2}{z}=\frac{z^4}{z}=z^3$$

وبوضع $z=t$ نحصل على

$$x=t^3\ ,y=t^2,z=t$$

أي أن $(t^3,t^2,t),t\in\mathbb{R}$ تمثل مجموعة نقاط تعتمد على بارامتر واحد (منحنى فراغ كما نرى في الباب الثالث).

ملاحظة (١٥.٢):

لاحظ أن تقاطع السطوح كما في مثال (٣٤.٢)، (٣٥.٢) هو منحنى فراغ.

تمارين (٢)

(١) أثبت أن المتجهات $\{u_i\}$ تكون أساس معياري متعامد للفراغ الإقليدي E^3 ثم أوجد $\{e_i\}$ بدلالة $\{u_i\}$ حيث

$$u_1=\frac{1}{3}(2e_1-2e_2+e_3),\ u_2=\frac{1}{3}(e_1+2e_2+2e_3),\ u_3=\frac{1}{3}(2e_1+e_2-2e_3)$$

(٢)أوجد اتجاه المتجه u الذي يصنع زوايا حادة متساوية القياس مع محاور الإحداثيات.

(٣) إذا كان u,v متجهات وحدة فاثبت أن $|u-v|=2\sin\frac{\theta}{2}$ حيث θ الزاوية بينهما.

(**إرشاد:** $|u-v|^2=<u-v,u-v>=|u|^2+|v|^2-2<u,v>$)

(٤) أثبت أنه إذا كان المتجهات $\bar{a}$, $\bar{b}$ غير متسامتين وغير صفريين فإن المتساوية $x\bar{a}+y\bar{b}=0$ لا يمكن أن تتحقق إلا عندما $x=0, y=0$.

(٥) أثبت أنه إذا كانت $x_1a+y_1b=x_2a+y_2b$ حيث a,b متجهين غير متسامتين وغير صفرين فإن $x_1=x_2,\ y_1=y_2$.

(٦) عين زوايا المثلث الذي ضلعان من أضلاعه هما $\vec{A}=(3,6,-2)$, $\vec{B}=(2,3,-6)$

(٧) أوجد حجم الهرم الثلاثي الذي رؤوسه هي

$$A\equiv(2,2,2),\ B\equiv(4,3,4),\ C\equiv(1,1,1), D\equiv(5,5,6)$$

(**إرشاد:** حجم الهرم $=\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع واستخدام الضرب القياسي والاتجاهي).

(٨) أثبت أن متوازي الأضلاع الذي أقطاره هي المتجهات $A_1=(3,-4,-1),\ A_2=(2,3,-6)$ هو معين وأوجد أطوال أضلاعه وزواياه (المعين أقطاره متعامدة).

(٩) بين أنه إذا كان $A \neq \underline{0}$ وكل من الشرطين

$$<A,B>=<A,C> \quad \text{and} \quad A\times B = A\times C$$

يتحققان معاً فإن B = C ولكن إذا تحقق شرط واحد فقط فإن $B \neq C$ بالضرورة.

(١٠) برهن على أن الشرط الضروري والكافي كي يتحقق

$$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$$

هو أن $(A\times C)\times B=\underline{0}$. ناقش الحالات التي فيها $<A,B>=0$ أو $<B\times C>=0$

(١١) عين قيم λ التي عندها تكون المتجهات

$$A=(3, \lambda, 5),\ B=(1,2,-3),\ C=(2,-1,1)$$

واقعة في مستوى واحد.

(١٢) بين أن $<u\times v, u\times v>=<u,u><v,v>-<u,v>^2$

(إرشاد : باستخدام تعريف الضرب القياسي والضرب الاتجاهي والعلاقة $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$)

(١٣) لأي ثلاث متجهات A_1, A_2, A_3, A_4 بين أن

$$<A_1\times A_2, A_3\times A_4>=<A_1,A_3><A_2,A_4>-<A_1,A_4><A_2,A_3>$$

(١٤) إذا كانت $\underline{u}\times\dfrac{du}{dt}=\underline{0}$ فإن المتجه $\underline{a}=\underline{u}(t)$ ثابت الاتجاه $(\underline{u}=\alpha(t)\underline{A})$ والعكس صحيح حيث $\underline{A}$ متجه ثابت.

(١٥) إذا كانت $\underline{r} = 4a(\sin^2 te_1 + \cos^2 te_2) + 3b\cos 2te_3$

فأوجد $\frac{d\underline{r}}{dt}, \frac{d^2\underline{r}}{dt^2}$, $[\frac{d\underline{r}}{dt}, \frac{d^2\underline{r}}{dt^2}, \frac{d^3\underline{r}}{dt^3}]$ حيث a, b ثوابت، t بارامتر.

(١٦) أوجد التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underline{r}(t)dt$ حيث $\underline{r}(t)$ معرفة في تمرين (١٥).

(١٧) أوجد $\int_0^{\infty} A(t)dt$ حيث $A(t)=(e^{-t}, e^{-2t}, e^{-3t})$

(١٨) أوجد الفترات التي تكون الدوال الآتية متصلة وقابلة للتفاضل حيث

(i) $V = V(t) = (\sin t, e^t, \ln t)$

(ii) $V = V(t) = (\ln(4-t^2)^{\frac{1}{2}}, (4+t^2)^{\frac{1}{2}}, 4+t^2)$

(iii) $V = V(t) = (\frac{1}{t}, \tan^{-1} t, \cosh t)$

(١٩) أوجد مصفوفة جاكوب للتحويل $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ المعرف كالآتي:

$$(x, y) \longrightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

(٢٠) أوجد مصفوفة جاكوب للتحويل $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ حيث $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ معبر عنها بدلالة الإحداثيات الأسطوانية (r, θ, z).

(٢١) أوجد مصفوفة جاكوب للتحويل $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ حيث $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ معبر عنها بدلالة الإحداثيات الكروية.

(٢٢) في التمارين (١٩)، (٢٠)، (٢١) بين فيما إذا كانت التحويلات تحفظ أو تعكس التوجيه.

الجزء الثاني (الهندسة الذاتية والخارجية لمنحنيات الفراغ)

الباب الثالث

المنحنيات في الفراغ الثلاثي

Space Curves

في هذا الباب نقدم تعريف المنحنى ونوضح الفرق بين المنحنى ورسمه في الفراغ وكذلك طرق تمثيل المنحنى ونركز على أهم تمثيل وهو التمثيل البارامتري. وبعد ذلك نتعرض لحساب المسافة القوسية وعلاقتها بالتمثيل البارامتري ونقدم الإطار المتحرك والمستويات المصاحبة له مثل المستوى اللاصق والعمودي والمقوم.

(١.٣) مفهوم المنحنى في الفراغ : Concept of a space curve

الآن نعرف التمثيل البارامتري للمنحنى C، لأجل هذا الغرض نستخدم إحداثيات كارتيزية x_1, x_2, x_3 في الفراغ $\mathbb{R}^3$ والإحداثي t على الفترة $I \subset \mathbb{R}$.

نعتبر الراسم

$$\{t \in \mathbb{R} : a < t < b\} = (a,b) = I \to C \subset \mathbb{R}^3$$

الممثل بواسطة الدالة الاتجاهية التفاضلية

$$\underline{x} = \underline{x}(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)),\ \forall t \in I \qquad (3.1)$$

هذه الدالة تحدد لكل $t \in I$ النقطة P في $\mathbb{R}^3$ ولها متجه الموضع $\underline{x}(t)$ حيث

$$t \in I \to P(\underline{x}(t)) \in \mathbb{R}^3 \qquad (3.2)$$

مجموعة النقاط هذه تكون مجموعة جزئية C من الفراغ $\mathbb{R}^3$ تسمى منحنى الفراغ ويرمز لها بالرمز $C \subset \mathbb{R}^3$.

التمثيل البارامتري الذي يعرف المجموعة الجزئية C يعطى من

$$C:\underline{x}=\underline{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t)) \qquad (3.3)$$

ويسمى بالتمثيل البارامتري (الوسيطي) للمنحنى C و t تسمى بارامتر التمثيل representation Parameter حيث $\underline{x}=\underline{x}(t)$ دالة اتجاهية تفاضلية في متغير واحد t. كل قيمة من قيم t تناظر نقطة فراغية على المنحنى تنتج بالتعويض عن قيمة t في الدالة الاتجاهية (3.3).

مثال (١.٣):

الدالة الاتجاهية

$$\underline{x}(t)=(t,t^2,0),\ t\in I=(0,1)\subset\mathbb{R}$$

تمثل جزء القطع المكافئ $x_2=x_1^2$ $(0<x_1<1)$ في المستوى x_1x_2 حيث

$$x_1=t,x_2=t^2$$

ملاحظة (١.٣):

التمثيلات البارامترية تظهر بصورة طبيعية في الميكانيكا حيث البارامتر t يمثل الزمن والدالة الاتجاهية $\underline{x}(t)$ تمثل مسار الجسيم المتحرك كما في حركة نقطة على محيط دائرة نصف قطرها الوحدة ومركزها نقطة الأصل فإن المسار يعطى من $x(t)=(\cos t,\sin t,0)$

توجد طرق كثيرة لتمثيل المنحنى في الفراغ تحليلياً منها ما يلي :

١. يعتبر المنحنى ناتج من تقاطع سطحين إذا كانت معادلاته على الصورة

$$F_1(x_1,x_2,x_3)\equiv 0,\ F_2(x_1,x_2,x_3)\equiv 0 \quad \text{(تمثيل ضمني)}$$

حيث الدوال الضمنية F_1,F_2 (دوال تفاضلية) تمثل سطوح في الفراغ الثلاثي ((تفاضل (٤)).

وإذا كان $J=Det(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x_1,x_2)})\neq 0$ مثلاً فإنه يوجد منحنى له تمثيل بارامتري في منطقة صغيرة حول x_3 على الصورة:

$$x_1 = x_1(x_3)\,,\, x_2 = x_2(x_3)\,,\, x_3 = x_3$$

أي أنه أمكن حل المعادلات $F_1 = 0$ ، $F_2 = 0$ كدوال في x_3 حيث x_3 نفسه هو البارامتر. ونفس الشيء بالنسبة إلى x_2 أو x_1 .

٢. يعتبر المنحنى ناتج من تقاطع اسطوانتين Cylinders على الصورة :

$$x_2 = f_2(x_1),\; x_3 = f_3(x_2)$$

وبالتالي فإن التمثيل البارامتري للمنحنى حول x_1 يأخذ الشكل

$$x_1 = x_1, x_2 = f_2(x_1)\,, x_3 = f_3(f_2(x_1)) = \Phi(x_1)$$

لاحظ أن الدوال f_2, f_3 (تفاضلية) تمثل منحنيات في المستوى x_2x_3 ، x_1x_2 على الترتيب ولكن في الفراغ تمثل اسطوانات مقامة على هذه المنحنيات.

٣. إذا كانت إحدى الدالتين F_1, F_2 خطية وليكن

$$F_1 = ax + by + cz + d = 0$$

وهي تمثل معادلة مستوى. في هذه الحالة فإن المنحنى هو تقاطع سطح مع مستوى ويعطى من

$$F(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0 \;\;,\;\; F_2(x, y, z) = 0 \;.$$

والمنحنى الناتج هو منحنى مستوى يسمى منحنى المقطع الناتج من تقاطع السطح بالمستوى. فمثلاً تقاطع الكرة مع مستوى هو دائرة وتكون دائرة عظمى إذا مر المستوى بمركز الكرة.

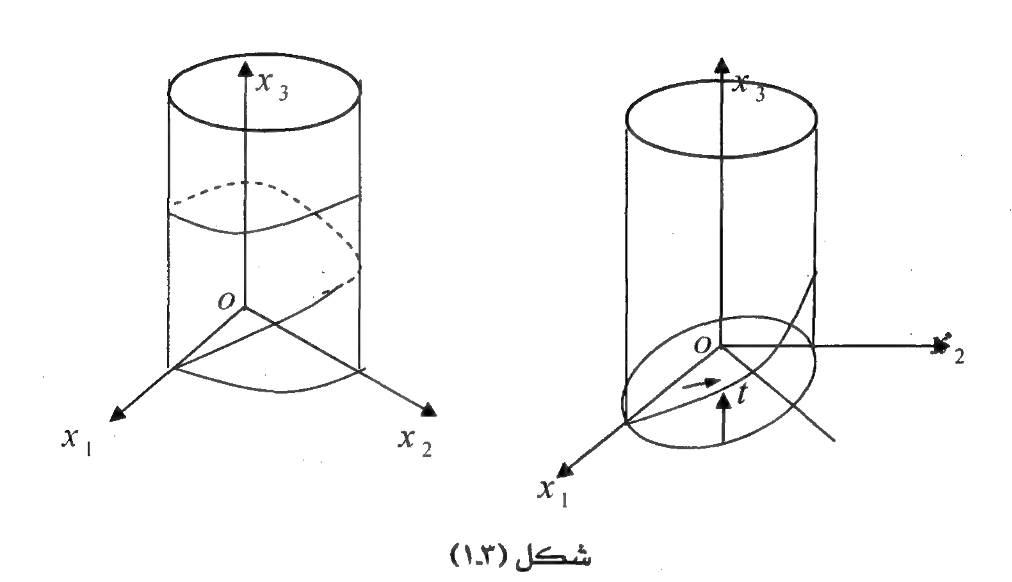
٤. التمثيل الهام للمنحنى في الفراغ هو التمثيل البارامتري الذي على الصورة:

$$x_1 = x_1(t),\; x_2 = x_2(t),\; x_3 = x_3(t) \;\;,\;\; \text{بارامتر}\;\; t \in I \subset \mathbb{R}$$

حيث الدوال $x_i(t)$ دوال تفاضلية. أي أن المنحنى صورة لقطعة مستقيمة من الخط المستقيم (خط الأعداد $\mathbb{R}$) كما هو موضح في شكل (٢ـ١٨).

مثال (٢.٣):

المنحنى الحلزوني الدائري Circular helix هو منحنى يقع على اسطوانة دائرية قائمة بحيث أن هذا المنحنى يصنع زوايا ثابتة مع رواسم الأسطوانة كما هو موضح في شكل (١.٣).



شكل (١.٣)

إذا كان نصف قطر الاسطوانة ρ والزاوية الموضحة بالرسم هي البارامتر t فإن التمثيل البارامتري لمنحنى الحلزون الدائري يعطى على الصورة

$$x_1 = \rho\cos t,\ x_2 = \rho\sin t, x_3 = bt, b \neq 0 \qquad (3.4)$$

سوف نقوم بدراسة هذا المنحنى دراسة تفصيلية في الباب الرابع.

نظرية (١.٣):

الدالة الاتجاهية $\underline{x} = \underline{x}(t)$ تمثل قطعة مستقيم Line a segment إذا كان وكان فقط :

$$\text{(i)}\ \ \underline{x}'(t) \wedge \underline{x}''(t) \equiv \underline{0}\ ,\ \text{(ii)}\ \underline{x}'(t) \neq \underline{0},\ \ a \leq t \leq b, ' = \frac{d}{dt}$$

البرهان:

الشرط (ii) يعنى أن المتجه $\underline{x}'(t)$ متجه غير صفري. بينما الشرط (i) يعنى إما $\underline{x}''(t)$ متجه صفري أو $\underline{x}''(t)=\lambda(t)\underline{x}'(t)$، أي أن x'، x'' مرتبطين خطياً وهذه العلاقة معادلة تفاضلية خطية لها العامل المكامل

$$\phi(t)=e^{-\int\lambda(t)dt} \text{ integrating factor } ,\lambda(t) \text{ دالة قياسية}$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\{\phi(t)\underline{x}'(t)\}\equiv\underline{0}$$

وبتكامل الطرفين بالنسبة إلى t نحصل على

$$\underline{x}'(t)=\frac{\underline{a}}{\phi(t)},\quad \underline{a}-\text{ const. vector}$$

وبالتكامل بالنسبة إلى t يكون لدينا

$$\underline{x}(u)=\underline{a}\ u+\underline{b}$$

حيث $\underline{b}$ متجه ثابت، $u=\int\frac{dt}{\phi(t)}$ بارامتر جديد. إذاً المعادلة $\underline{x}=\underline{a}u+\underline{b}$ هي معادلة خط مستقيم يمر بالنقطة التي لها متجه الموضع $\underline{b}$ واتجاهه يوازي المتجه الثابت $\underline{a}$.

نظرية (٢.٣):

الشرط الضروري والكافي كي يقع المنحنى $C:\underline{x}=x(t)$ في مستوى هو أن يتحقق

$$\text{(i)}\quad [\underline{x}',\underline{x}'',\underline{x}''']\equiv 0 \quad ,\ \text{(ii)}\quad \underline{x}'(t)\wedge\underline{x}''(t)\neq 0\,.$$

البرهان:

لإثبات ذلك نضع $\underline{y}=\underline{x}'\times\underline{x}''$ وبالتفاضل واستخدام قواعد الضرب الاتجاهي يكون لدينا

$$\underline{y}'=\underline{x}'\times\underline{x}'''$$

$$\therefore y \wedge y' = (x' \wedge x'') \wedge (x' \wedge x''')$$

وباستخدام المتطابقة (2.24) حيث $A_1 = x' \wedge x''$ ، $A_2 = x'$ ، $A_3 = x'''$.

نحصل على :

$$\underline{y} \wedge \underline{y}' = [\underline{x}', \underline{x}'', \underline{x}''']\underline{x}' - [\underline{x}', \underline{x}'', \underline{x}']\underline{x}''' \equiv 0 \qquad (3.5)$$

(من الشرط (i) في النظرية ومن تساوي صفين في المحدد الثاني).

كما في برهان نظرية (١.٤) يكون

$$\underline{y}' = k(t)\underline{y}$$

وبالتكامل نحصل على

$$\underline{y} = \frac{\underline{a}}{\phi(t)}, \quad \phi(t) = e^{-\int k(t)dt}$$

حيث $\underline{a} = (a_i)$ متجه ثابت.

ويكون

$$<\underline{x}', \underline{y}> \equiv [\underline{x}', \underline{x}', \underline{x}''] \equiv 0 \Rightarrow \frac{<\underline{x}', \underline{a}>}{\phi(t)} \equiv 0$$

أو ما يكافئ $<\underline{x}', \underline{a}> = 0$

وبالتكامل مرة أخرى بالنسبة إلى t نحصل على

$$<\underline{x}(t), \underline{a}> = c$$

حيث c ثابت قياسي. أي أن المنحنى $\underline{x} = \underline{x}(t)$ يقع في المستوى

$$\pi : a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = c$$

حيث العمودي على المستوى π هو المتجه $\underline{a}$ وطول العمود الساقط عليه من نقطة الأصل يساوي $\frac{c}{|\underline{a}|}$.

ملاحظة (٢.٣):

١ـ الرسم أو الأثر trace or image للمنحنى r هو مجموعة جزئية $r(I)\subset\mathbb{R}^3$ من الفراغ $\mathbb{R}^3$.

٢. المنحنى يعرف كدالة وليس كرسم أو أثر للدالة بمعنى يوجد دالتين مختلفتين لهما نفس الرسم أو الأثر أي أنهما منحنيات مختلفة ونوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال (٣.٣):

الدوال الاتجاهية التفاضلية الآتية:

$$r:I\longrightarrow\mathbb{R}^2,r(u)=(\cos u,\sin u),u\in[0,2\pi]$$

$$\bar{r}:I\longrightarrow\mathbb{R}^2,\bar{r}(u)=(\cos 2u,\sin 2u)u\in[0,\pi]$$

تعرف منحنيات مختلفة ولكن رسمها متطابق identical حيث أن كل منهما يصف دائرة في المستوى مركزها عند نقطة الأصل ونصف قطرها الوحدة.

في الحالة العامة :

إذا كان $f:I\longrightarrow\mathbb{R}^2,f(u)=(x(u),y(u))$

دالة اتجاهية في المستوى فإنها تعرف منحنى فراغ على الصورة

$r:I\longrightarrow\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$ حيث

$$r(u)=(f(u),0)=(x(u),y(u),0)$$

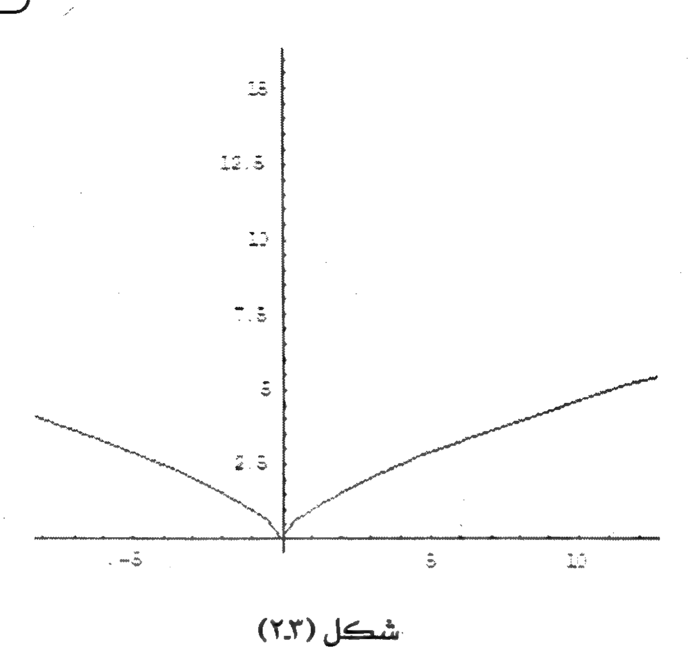
والتي تكتب عادة على الصورة

$$r(u)=(x(u),y(u))$$

ويقال في هذه الحالة أن المنحنى مستوٍ (واقع في المستوى $\mathbb{R}^2$) plane curve.

مثال (٤.٣):

الدالة $r(u)=(u^3,u^2),u\in\mathbb{R}$ يمكن رسمها كما هو موضح في شكل (٢.٣).



شكل (٢.٣)

وهذا يوضح أن رسم أي دالة هو منحنى ولكن ليس كل منحنى مستوي هو رسم لدالة.

مثال (٥.٣):

إذا كانت $f\ :I \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة تفاضلية حقيقية فإن الدالة $r:I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ المعرفة بالقاعدة $r(u)=(u,f\ (u))$ تصف منحنى مستوي.

ملاحظة (٣.٣):

المماس للمنحنى القابل للتفاضل differentiable يوجد عند أي نقطة عليه ولكن قد يكون متجه صفري.

مثال (٦.٣):

المنحنى $r(u)=(u^3,u^2)$ ليس له مماس عند $u=0$ لأن النقطة $u=0$ غير منتظمة not regular كما هو مبين في الشكل (٢.٣).

ملاحظة (٤.٣):

مما سبق يتضح أن كل المنحنيات سوف تكون منتظمة ما لم ينص خلاف ذلك.

مثال (٧.٣):

أوجد التمثيل البارامتري للمنحنى الناتج من تقاطع أسطوانة نصف قطرها a ومركزها $(a,0)$ مع كرة نصف قطرها $2a$ ومركزها نقطة أصل الإحداثيات.

الحل:

نفرض أن معادلة كل من الأسطوانة والكرة هي

$$F_1 :(x-a)^2 + y^2 - a^2 = 0$$

$$F_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2 = 0$$

على الترتيب.

وبما أن $J = Det\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right) \neq 0$ فإنه يمكن حل المعادلتين كدالة في z وبحل هاتين المعادلتين مباشرة كدالة في z نحصل على (نظرية الدالة الضمنية):

$$x = 2a - \frac{z^2}{2a}, \quad y = \pm\frac{z}{2}\sqrt{4-\frac{z^2}{a^2}} \quad , \ |z| \le 2a$$

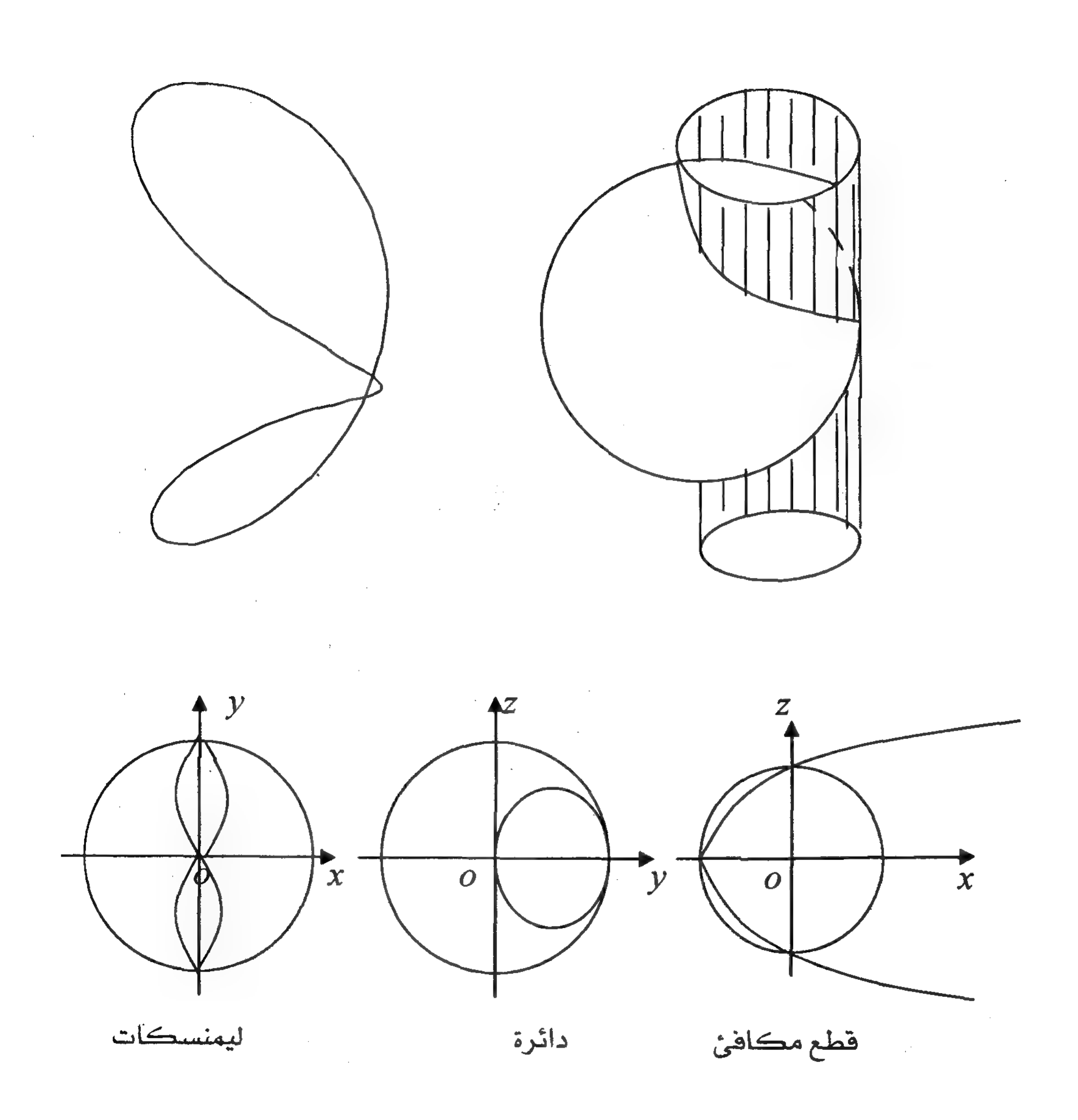
وبوضع $z = 2a\sin\frac{u}{2}$ حيث $u \in (-2\pi, 2\pi)$ نحصل على التمثيل البارامتري من التمثيل الضمني (implicit) لمنحنى التقاطع على الصورة:

$$\begin{aligned} x &= a(1+\cos u), \\ y &= a\sin u\ , \\ z &= 2a\sin\frac{u}{2}, u \in (-2\pi, 2\pi). \end{aligned} \qquad (3.6)$$

ملاحظة (٥.٣):

المنحنى (3.6) يسمى منحنى فيفياني أو شباك قي وله أشكال أو مساقط على المستويات الإحداثية $(z=0)$، $(x=0)$، $(y=0)$ هي منحنيات مستوية من نوع

ليمنسكات ودائرة وجزء من قطع مكافئ على الترتيب كما هو موضح في شكل (٣.٣).



شكل (٣.٣)

(٢.٣) طول قوس المنحنى في الفراغ: Arc Length of a space curve

بفرض أن C منحنى فراغ معطى بالتمثيل البارامتري من خلال الدالة الاتجاهية

$$C : \underline{x} = \underline{x}(t) \tag{3.7}$$

طول قوس المنحنى بين النقطتين $t = a$, $t = b$ من المنحنى يعرف كالتالي:

نعتبر التقاسيم الجزئية للفترة $(a,\ b)$ وذلك بإدخال $(n\text{-}1)$ من النقاط داخل الفترة (a, b) حيث

$$a = t_o < t_1 < \ldots t_{n-1} < t_n = b$$

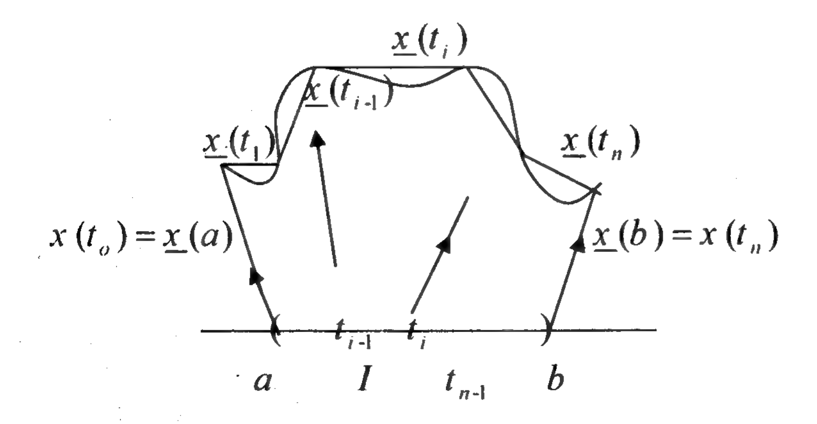
طول القوس L يعرف بأنه طول المضلع المرسوم بالنقاط $x(t_i)$ عندما يؤول طول أكبر قطعة مستقيمة من المضلع إلى الصفر أو ما يكافئ

$$L = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\underline{x}(t_i) - \underline{x}(t_{i-1})| \tag{3.8}$$

حيث δ تعطى من

$$\delta = \max(t_1 - t_o, t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_{n-1})$$

عندما تكون النهاية موجودة فإن المنحنى يسمى بالمنحنى المقوم (المصلح) rectifiable كما هو موضح في شكل (٤.٣).



شكل (٤.٣)

والمجموع (3.8) هو طول الخط المنكسر المرسوم داخل المنحنى والموصل بين نقط التقسيم الجزئي. إذا كانت الدوال $x_1(t), x_2(t), x_3(t) \in C^1$ قابلة للتفاضل وباستخدام نظريات التكامل والعلاقات بين التفاضل والتكامل ومجموع ريمان (تفاضل وتكامل (٢)) نحصل على

$$L = \int_a^b |\underline{x}'(t)|dt \qquad (3.9)$$

حيث

$$|\underline{x}'(t)| = \langle x'(t), x'(t) \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2}\ , ' = \frac{d}{dt}$$

وإذا كانت $b = t$ فإن طول قوس المنحنى يكون دالة في t وليكن $s = s(t)$ حيث

$$s(t) = \int_a^t |x'(t)|dt \qquad (3.10)$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى t نحصل على

$$\frac{ds}{dt} = |x'(t)| > 0 \qquad (3.11)$$

أي أن $s(t)$ دالة تزايدية على الفترة $[a, t]$.

مثال (٣-٨):

أوجد طول قوس منحنى الحلزون الدائري

$$x_1 = \cos t,\ x_2 = \sin t,\ x_3 = t$$

من $t = 0$ إلى أي نقطة اختيارية t وأكتب المعادلات البارامترية بدلالة بارامتر طول القوس s .

الحل :

واضح أن فترة التكامل هي $[0, t]$ وباستخدام (3.10) نحصل على :

$$s = \int_0^t \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1}\, dt = \sqrt{2}t$$

وعلى هذا الأساس يمكن استبدال t بالبارامتر s حيث $t = \frac{s}{\sqrt{2}}$ وتسمى s بالبارامتر الطبيعي للمنحنى Natural parameter أو الذاتي.

والمعادلات

$$x_1 = \cos\frac{s}{\sqrt{2}},\ x_2 = \sin\frac{s}{\sqrt{2}},\ x_3 = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

تسمى بالتمثيل البارامتري الطبيعي للمنحنى.

وفي الحالة العامة نعطي النظرية الآتية :

نظرية (٣.٣):

نفرض أن $x_i(t) \in C^1\ (i = 1,2,3)$ فإن البارامتر t يكون بارامتر طبيعي للمنحنى $C : \underline{x} = \underline{x}(t)$ إذا كان وكان فقط $|\underline{x}'(t)| = 1$

البرهان:

لإثبات ذلك نفرض أولاً أن t هي طول القوس للمنحنى $x_i = x_i(t)$ من قيمة اختيارية t_o أي أن $s = t - t_o$. وباستخدام (3.11) نحصل على

$$|\underline{x}'(t)| = |\frac{dx}{dt}| = |\frac{ds}{dt}| = 1$$

والعكس إذا كان $|\frac{dx}{dt}| = 1$ وباستخدام (3.9) فإن $ds = dt$ أي أن

$$s = \int_{t_o}^{t} dt = t - t_o$$

مثال (٣-٩):

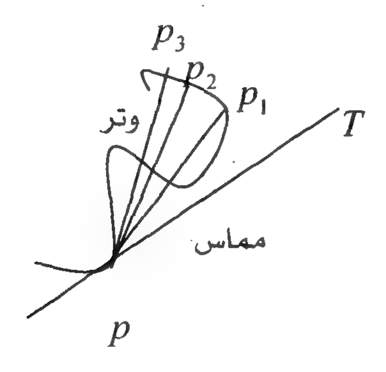
بحساب المشتقة الأولى $x'(t)$ للمنحنى

$$x_1 = \frac{\sin t}{\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{\sin t}{\sqrt{2}},\ x_3 = \cos t$$

نجد أن $|\underline{x}'(t)| = 1$ ولهذا فإن البارامتر t هو البارامتر الطبيعي للمنحنى. في الواقع هذا المنحنى هو دائرة في المستوى $x_1 = x_2$ مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها الوحدة

(٣-٣) خط المماس والمستوى العمودي: Tangent Line and Normal Plane

نعتبر منحنى معطى بالتمثيل الطبيعي $\underline{x} = \underline{x}(s)$ ، المماس للمنحنى عند نقطة ما p عليه يعرف بأنه الوضع النهائي لمتتابعة الأوتار من النقطة p إلى مجموعة نقاط المنحنى الأخرى عندما تؤول أطراف الأوتار إلى النقطة p كما هو موضح في شكل (٣-٥).



شكل (٣-٥)

الاتجاه الموجب للمماس T هو اتجاه زيادة s والمماس يوازي الاتجاه

$$\underline{T} = \dot{x}(s)\,,\ . = \frac{d}{ds} \qquad (3.12)$$

وهو متجه الوحدة في اتجاه المماس حيث s بارامتر طول القوس.

وإذا كان $x = \underline{x}(t)$ أي تمثيل بارامتري للمنحنى فإن $T = \frac{dx}{dt} / |x'(t)|$ أو في الصورة

$$T = \frac{x'(t)}{|x'(t)|}, \qquad ' = \frac{d}{dt}$$

تعريف (١.٣):

النقطة $x \in C^1$ التي عندها $|\underline{x}'(t)| \neq \underline{0}$ تسمى نقطة عادية Ordinary point أو نقطة منتظمة Regular أما النقطة التي عندها $|\underline{x}'(t)| = \underline{0}$ تسمى نقطة مفردة (شاذة) Singular point.

نبين الآن أن تغير البارامتر (الفترة المعرف عليها المنحنى) قد يؤدي إلى نفس المنحنى وهذا يوضح معنى الانتظام regularity ولذلك نقول أنه إذا كان:

$$f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow J \subset \mathbb{R}, \quad t \in I \longrightarrow f(t) = u \in J$$

راسم أو دالة ذات قيم حقيقية وتحقق

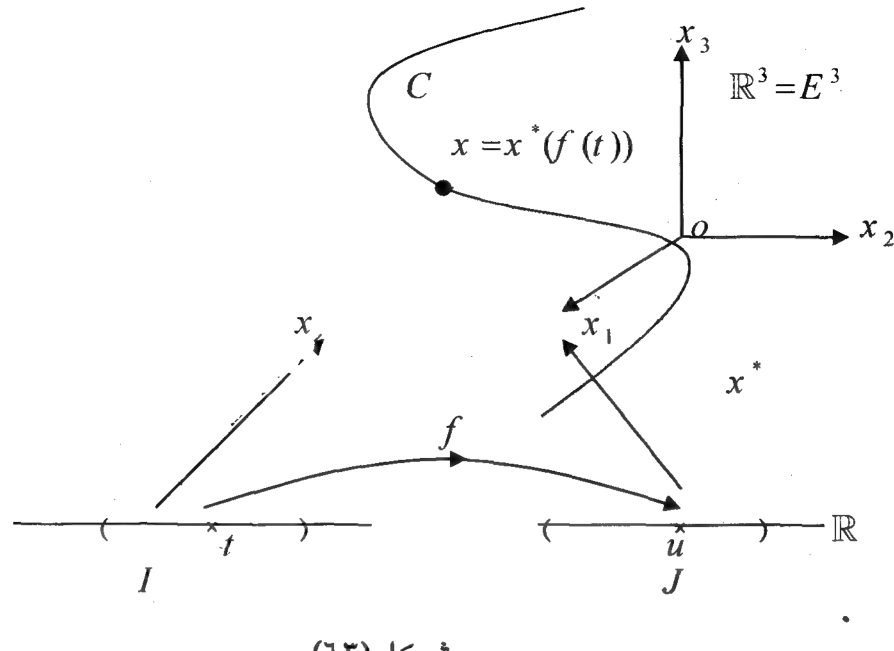
$$\text{(i)} \quad \frac{du}{dt} \neq 0, \forall u \in J, \qquad \text{(ii)} \quad f(t) \in C^1 \text{ in } I$$

في هذه الحالة يقال أن الدالة $u = f(t)$ تسمح بإعادة التمثيل البارامتري re parameterization للمنحنى ليصبح على الصورة

$$C: x = x(t) \longleftrightarrow C: x^* = x(t(u))$$

وإذا كانت $\frac{du}{dt} > 0$ على الفترة J فإن $u = f(t)$ دالة تزايدية وإذا كانت $\frac{du}{dt} < 0$ على الفترة J فإن $u = f(t)$ دالة تناقصية.

ويقال في هذه الحالة أن التمثيل البارامتري المنتظم $x = x(t)$ يكافئ التمثيل البارامتري المنتظم $x = x^*(t)$ كما هو موضح في شكل (٦.٣) (أنظر مثال (٣.٣)).



شكل (٦.٣)

بعد هذا العرض نكون قد توصلنا إلى الفرق بين التمثيل البارامتري المنتظم والمنحنى المنتظم ونقدمها كالآتي:

- التمثيل البارامتري المنتظم هو دالة اتجاهية $x = x(u)$ تحقق $|\frac{dx}{du}| \neq 0$.
- المنحنى المنتظم من طبقة C^m هو تجمع من تمثيلات بارامترية من طبقة C^m بحيث أي أثنين من هذا التجمع يرتبطا من خلال تحويل بارمتري مسموح به من طبقة C^m .
- طول قوس منحنى مستقل عن أي تمثيل بارامتري.

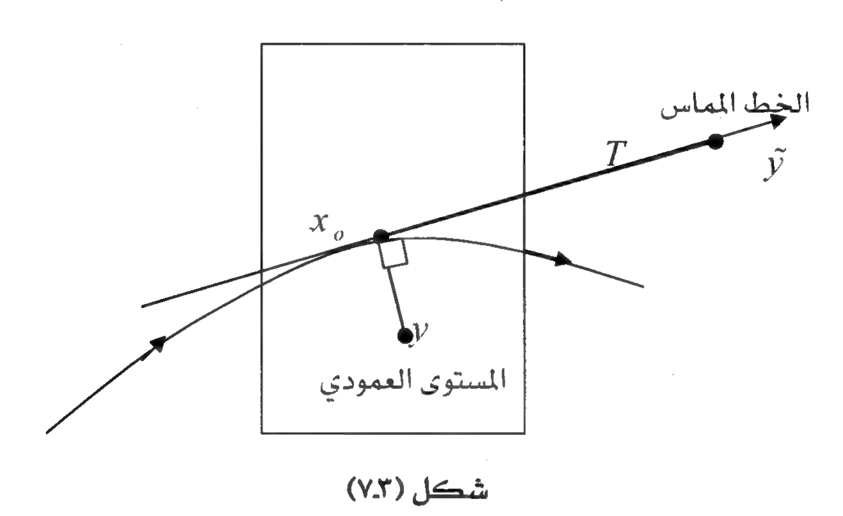
معادلة خط المماس عند النقطة التي لها بارامتر طول القوس $s = s_o$ على المنحنى $x = x(s)$ هي معادلة خط مستقيم اتجاهه يوازي المتجه $\dot{x}(s_o)$ وتعطى في الصورة:

$$\underline{\tilde{y}} = \underline{x}(s_o) + u\underline{\dot{x}}(s_o)\,,\, u \in \mathbb{R}, . = \frac{d}{ds} \qquad (3.13)$$

ومعادلـة **المستوى العمـودي** (علـى المماس T للمنحنـى) عنـد النقطـة $p(s=s_o)$ هـي معادلة مستوى يمر بالنقطة $\underline{x}(s_o)$ والعمودي عليه هو $\underline{\dot{x}}(s_o)$ وتعطى من

$$<\underline{y}-\underline{x}(s_o),\ \underline{\dot{x}}(s_o)>=0 \qquad (3.14)$$

حيث $\underline{y}$ نقطة على المستوى (بخلاف $x_o=x(s_o)$) وليست على المنحنى كما هو موضح في الشكل (٧.٣).



شكل (٧.٣)

مثال (١٠.٣):

أوجد معادلة المستوى العمودي ومعادلة المماس للمنحنى

$$x_1=\frac{\sin t}{\sqrt{2}},\ x_2=\frac{\sin t}{\sqrt{2}},\ x_3=\cos t$$

عند النقطة p التي تناظر البارامتر $t=\frac{\pi}{4}$.

الحل:

اتجاه المماس للمنحنى المعطى يعطى من

$$\frac{dx}{dt}=(\frac{\cos t}{\sqrt{2}},\frac{\cos t}{\sqrt{2}},-\sin t)$$

إذاً متجه الوحدة في اتجاه المماس عند النقطة p يعطى من

$$\underline{T} = \dot{x} = \frac{dx}{dt} / |\frac{dx}{dt}|,$$

$$\therefore \quad \underline{T} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ at } t = \frac{\pi}{4}$$

والنقطة p التي تناظر $t = \frac{\pi}{4}$ هي $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

المعادلات البارامترية للمماس تعطى من المعادلة الاتجاهية (3.13) على الصورة

$$\tilde{y} = (\tilde{y}_i) = p + uT \ , \ u \in \mathbb{R}$$

أو ما يكافئ

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{2}(1+u), \ \tilde{y}_2 = \frac{1}{2}(1+u), \ \tilde{y}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-u)$$

معادلة **المستوى العمودي** (مستوى عمودي على المنحنى عند نقطة p عليه) تعطى من (3.14) على الصورة

$$< (y - p), \underline{T} >= 0 \ , \ y = (y_i)$$

أو ما يكافئ

$$y_1 + y_2 - \sqrt{2}\, y_3 = 0$$

واضح أن العمودي على المستوى الغمودي له الاتجاه $(1,1,-\sqrt{2})$ أو يوازي متجه الوحدة T في اتجاه العمودي (المماس للمنحنى) عند النقطة p.

مثال (١١.٣):

الدالة الإتجاهية $x(t) = (t, t^2, 0)$ تمثل جزء القطع المكافئ $x_2 = x_1^2$ في المستوى $x_1 x_2$.

مثال (١٢.٣):

أوجد التمثيل البارمتري للمنحنى $x_2^2 = x_1, x_3^2 = 1 - x_1$

الحل:

المنحنى المعطى هو تقاطع سطحين ولذلك نقوم بحل المعادلتين معاً ويكون عدد لانهائي من الحلول التي تعتمد على بارامتر واحد. بالجمع نحصل على

$$x_2^2 + x_3^2 = 1$$

وهي معادلة دائرة في المستوى $x_2 x_3$ ومعادلاتها البارامترية تعطى من

$$x_2 = \sin t,\ x_3 = \cos t$$

وبالتعويض في المعادلات المعطاة نحصل على $x_1 = \sin^2 t$ ويكون التمثيل البارامتري (المعادلة الاتجاهية) هو

$$x(t) = (\sin^2 t, \sin t, \cos t),\quad 0 \le t < 2\pi$$

وإذا كانت $x_1 = u \ge 0$ ، $0 \le x_1 \le 1$ فإن

$$x_1 = u, x_2 = \pm\sqrt{u},\ x_3 = \pm\sqrt{1-u},\ u \le 1$$

فيكون لدينا تمثيلين بارامتريين يتوقفان على أجزاء المنحنى في الفراغ

$$x(t) = (u, \sqrt{u}, \sqrt{1-u})$$

$$x(t) = (u, -\sqrt{u}, -\sqrt{1-u})$$

ملاحظة (٦.٣):

المنحنى في المثال السابق هو تقاطع أسطوانتين مكافئتين أي قاعدتهما قطاعات مكافئة في المستوى x_1x_2 ، x_1x_3 على الترتيب والتمثيل البارامتري بدلالة البارامتر t يكافئ التمثيل البارامتر بدلالة البارامتر u أي أنهما يصفا نفس المنحنى من خلال التحويل $u = \sin^2 t$ وبالتالي فهو منحنى منتظم.

(٤.٣) المستوى اللاصق : Osculating plane

المستوى المماس Tangent plane لمنحنى فراغي عند نقطة ما عليه هو أي مستوى يحتوي على المماس عند تلك النقطة. عموماً يوجد أحد هذه المستويات المماسية للمنحنى ويختلف عن أي مستوى آخر ويسمى بالمستوى اللاصق.

تعريف (٢.٣) :

يقال أن الدالة $\phi(t)$ لها موضع صفري عند $t=t_o$ رتبته n إذا كان وفقط إذا كان

$$\phi^{(k)}(t_o)=0,\ k=0,1,...,n-1,\quad \phi^{(n)}(t_o)\neq 0 \qquad (3.15)$$

والتي تكافئ تكرار الجذور (المواضع الصفرية) حيث

$$\lim_{t\to t_o}\frac{\phi(t)}{(t-t_o)^n}=A\neq 0 \quad \text{(const.)}$$

أو

$$\therefore\ \phi(t)=A(t-t_o)^n+O(t-t_o)^{n+1} \qquad (3.16)$$

تعريف (٣.٣):

يقال أن المنحنى $\underline{x}=\underline{x}(t)$ والمستوى $<\underline{x}-\underline{a},\underline{\gamma}>=0$ لهما التصاق من رتبة n عند النقطة المشتركة $\underline{a}$ إذا كان وكان فقط دالة المسافة $\phi(t)$ بين نقطة على المنحنى $x(t)$ ونقطة على المستوى لها موضع صفري من رتبة $n+1$ عند $t=t_o$. حيث $\phi(t)$ هي الدالة الناتجة من التعويض بنقط المنحنى في معادلة المستوى. يقال أن الالتصاق من رتبة أكبر من n إذا كان وإذا كان فقط

$$\phi^{(k)}(t_o)=0, k=0,1,...,n+1 \qquad (3.17)$$

مثال (١٣.٣):

أوجد رتبة الالتصاق بين منحنى الحلزون

$$x_1=\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, x_2=\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, x_3=\frac{s}{\sqrt{2}}$$

والمستوى $x_2 = x_3$ عند النقطة $s = 0$ حيث s بارامتر طول قوس المنحنى.

الحل:

واضح أن النقطة $(1, 0, 0)$ ($s = 0$ في المعادلات البارامترية للمنحنى) واقعة على المستوى والمنحنى في نفس الوقت (نقطة مشتركة). المستوى المعطى معادلته هي

$$\sigma : x_2 - x_3 = 0$$

دالة المسافة $\phi(s)$ تعني طول العمود الساقط من النقطة $x(s)$ على المنحنى إلى المستوى σ (هندسة تحليلية في الفراغ) أي هي

$$\phi(s) = \frac{x_2(s) - x_3(s)}{\sqrt{2}}$$

ومن معادلات المنحنى نحصل على

$$\phi(s) = -\frac{s}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}$$

واضح أن

$$\phi(0) = \phi'(0) = \phi''(0) = 0, \ \phi'''(0) \neq 0 \ , \ ' = \frac{d}{ds}$$

إذاً الموضع الصفري $s = 0$ لدالة المسافة $\phi(s)$ من الرتبة الثالثة والالتصاق من الرتبة الثانية.

تعريف (٤.٣):

المستوى المماس للمنحنى والذي له الالتصاق من رتبة أكبر من الواحد يسمى المستوى اللاصق osculating plane.

معادلة المستوى اللاصق تعطى من النظرية التالية :

نظرية (٤.٣):

نفرض أن $\underline{x} = \underline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ منحنى فراغ يحقق :

(i) $x_i(t) \in C^2$, (ii) $\underline{x}' \times \underline{x}''(t) \neq \underline{0}$ at $t = t_o$

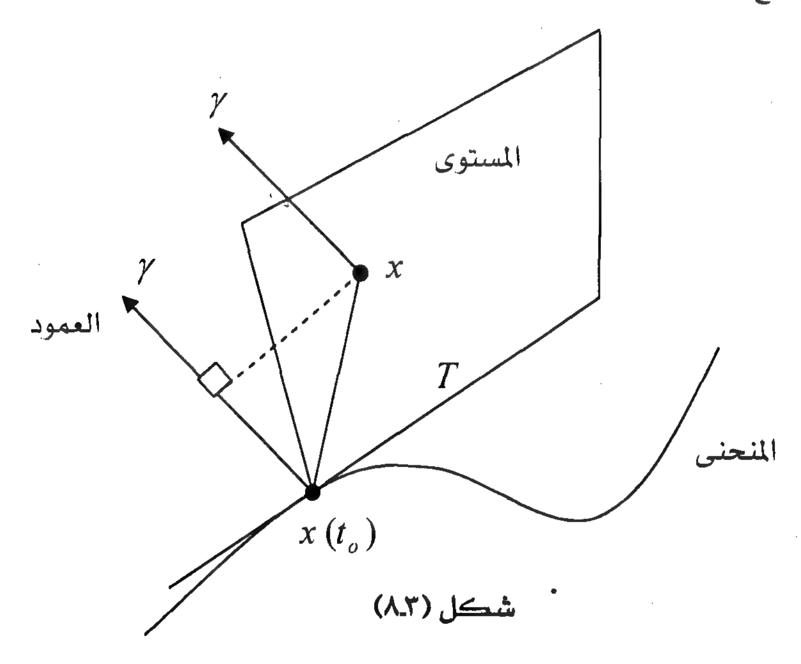
إذاً المنحنى $\underline{x} = \underline{x}(t)$ له مستوى التصاق وحيد عند النقطة $t = t_o$ معادلته هي

$$[\underline{x} - \underline{x}(t_o), \underline{x}'(t_o), \underline{x}''(t_o)] = 0 \qquad (3.18)$$

أو ما يكافئ

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1(t_o) & x'_1(t_o) & x''_1(t_o) \\ x_2 - x_2(t_o) & x'_2(t_o) & x''_2(t_o) \\ x_3 - x_3(t_o) & x'_3(t_o) & x''_3(t_o) \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.19)$$

كما هو موضح في شكل (٨.٣).



شكل (٨.٣)

البرهان:

بعد النقطة t_o على المنحنى عن المستوى

$$< \underline{x} - \underline{x}(t_o), \underline{\gamma} > = 0$$

(العمودي عليه $\underline{\gamma}$ وله نقطة مشتركة $x(t_o)$ مع المنحنى)

يعطى من

$$\phi(t)=\pm\frac{<\underline{x}(t)-\underline{x}(t_o),\underline{\gamma}>}{\sqrt{<\underline{\gamma},\underline{\gamma}>}} \qquad (3.20)$$

حيث $\underline{\gamma}$ متجه ثابت وهو العمودي على المستوى.

بالتفاضل بالنسبة إلى t نحصل على

$$\therefore\ \pm\sqrt{<\underline{\gamma},\underline{\gamma}>}\ \phi'(t)=<\underline{x}'(t_o),\underline{\gamma}> \quad , \quad (\underline{x}(t_o)\ \text{ثابت})$$

وبالتفاضل مرة أخرى نحصل على

$$\pm\sqrt{<\underline{\gamma},\underline{\gamma}>}\ \phi''(t)=<\underline{x}''(t_o),\underline{\gamma}>$$

إذا كان

$$\phi'(t_o)=\phi''(t_o)=0$$

$$\therefore <\underline{x}'(t_o),\underline{\gamma}>=<\underline{x}''(t_o),\underline{\gamma}>=0$$

أي أن المتجه γ عمودي على كل من $x''(t_o), x'(t_o)$ إذاً المتجه γ يوازي المتجه

$$\underline{x}'(t_o)\times\underline{x}''(t_o)$$

وهذا معناه أن دالة المسافة $\phi(t)$ لها موضع صفري من رتبة أعلى من 2 عند $t=t_o$ أي

$$\phi(t_o)=\phi'(t_o)=\phi''(t_o)=0$$

وهذا يكافئ أن المتجه $\underline{x}'(t_o)\times\underline{x}''(t_o)$ يوازي المتجه γ . إذاً يوجد مستوى مماس وحيد له التصاق من رتبة أعلى من الأولى وهو المستوى اللاصق الذي معادلته (3.18) أو (3.19).

مثال (١٤،٣):

أوجد معادلة المستوى اللاصق عند (1, 0, 0) على المنحنى

$$\underline{x}(t)=(\cos\frac{t}{\sqrt{2}},\sin\frac{t}{\sqrt{2}},\frac{t}{\sqrt{2}})$$

الحل:

معادلة المستوى اللاصق عند $t = 0$ أي عند $(1, 0, 0)$ (باستخدام النظرية والعلاقة (3.19)) هي

$$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_2 & x_3 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

أو ما يكافئ $x_2 = x_3$ (في المحدد (3.19) بدلنا الأعمدة بالصفوف).

تعريف (٣-٥):

- يقال أن المنحنى $y = f(x)$ له تلاصق من الرتبة الثانية مع المنحنى $y = \Phi(x)$ عند النقطة $x = x_o$ إذا تحقق

$$f^{(k)}(x) = \Phi^{(k)}(x), k = 0,1,2$$

أي أن المشتقات التفاضلية حتى الرتبة الثانية عند $x = x_o$ متطابقة بمعنى

$$f(x_o) = \Phi(x_o), f'(x_o) = \Phi'(x_o), f''(x_o) = \Phi''(x_o) \quad (3.21)$$

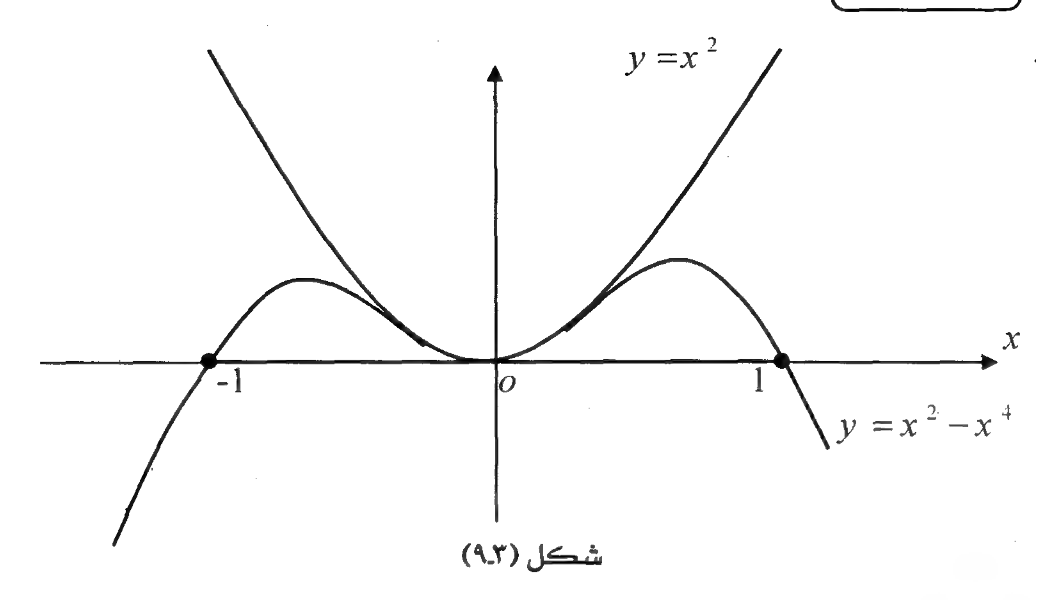
مثال (٣-١٥):

بين أن المنحنى $y = f(x) = x^2$ له تلاصق من الرتبة الثانية مع المنحنى $y = \Phi(x) = x^2 - x^4$ عند النقطة $(0,0)$.

الحل:

النقطة $(0,0)$ هي نقطة أصل الإحداثيات وواقعة على كل من المنحنيين وتحقق شروط التلاصق (3.21) كما هو موضح في شكل (٣-٩) حيث

$$f^{(k)}(0) = \Phi^{(k)}(0), k = 0,1,2$$



شكل (٣-٩)

ملاحظة (٣-٧):

تذكر أن الخط المماس عند نقطة p على منحنى يعرف على أنه الوضع النهائي للخط الذي يمر خلال نقطتين متجاورتين على المنحنى عندما تقترب النقطتين من النقطة p.

ملاحظة (٣-٨):

المستوى اللاصق عند نقطة p على منحنى يمكن تعريفه على أنه الوضع النهائي للمستوى المار خلال ثلاث نقط متجاورة على المنحنى عندما تقترب النقاط الثلاث من النقطة p.

(٣-٥) الثلاثي المتحرك عند أي نقطة على المنحنى (حقل المتجهات):

Moving Frame:

لكل نقطة من نقاط المنحنى $\underline{x} = \underline{x}(t)$ يصاحبها ثلاث متجهات وحدة متعامدة فيما بينها ولتكن $\underline{T}, \underline{n}, \underline{b}$ Orthonormal Vectors هذه الثلاثية تسمى الثلاثي المتحرك Frame field أو الإطار المتحرك على امتداد المنحنى.

أولاً : نعرف الثلاثي المتحرك للمنحنى المعطى بالتمثيل الطبيعي $\underline{x}=\underline{x}(s)$ حيث

$$\underline{T}=\dot{\underline{x}}(s),\ \underline{n}=\frac{\ddot{\underline{x}}(s)}{|\ddot{\underline{x}}(s)|},\underline{b}=\frac{\dot{\underline{x}}\times\ddot{\underline{x}}}{|\dot{\underline{x}}(s)\times\ddot{\underline{x}}|},\dot{\ }=\frac{d}{ds}\qquad(3.22)$$

ولإثبات ذلك نستخدم المتطابقات المعرفة في الباب الأول:

مثلاً :

$$<\dot{\underline{x}}.\dot{\underline{x}}>=1,$$

$$\therefore \frac{d}{dt}<\dot{\underline{x}},\dot{\underline{x}}>\equiv 0$$

ويكون

$$<\dot{x}(s),\ddot{x}(s)>=0$$

أي أن $\ddot{x}(s)$ عمودي على $\dot{x}$ وليكن n متجه الوحدة على امتداد $\ddot{x}(s)$ حيث

$$n=\frac{\ddot{x}(s)}{|\ddot{x}(s)|}$$

وبالحساب المباشر نجد أن (من (3.22)).

$$\begin{aligned}&<\underline{T},\underline{n}>=<\underline{n},\underline{b}>=<\underline{b},\underline{T}>=0\\&<\underline{T},\underline{T}>=<\underline{n},\underline{n}>=<\underline{b},\underline{b}>=1\\&\underline{T}=\underline{n}\times\underline{b}\ ,\ \underline{n}=\underline{b}\times\underline{T},\ \underline{b}=\underline{T}\times\underline{n}\\&[\underline{T},\ \underline{n},\underline{b}]=1\end{aligned}\qquad(3.23)$$

لاحظ أن المتجهات $\underline{T},\underline{n},\underline{b}$ في هذا الترتيب لها نفس الترتيب في الوضع لمحاور الاحداثيات وتسمى بمتجهات الوحدة للمماس tangent $\underline{T}$ والعمود الأساسي $\underline{n}$ principal normal والعمود الجانبي (الثانوي) $\underline{b}$ binormal والمستقيمات غير المحددة الواقع عليها هذه المتجهات تسمى بخط المماس والعمود الأساسي والعمود الثانوي حيث العمود الأساسي يقع في المستوى اللاصق والعمود الثانوي عمودي عليه.

أوجه الثلاثي المكون من حقول المتجهات T, n, b عبارة عن ثلاث مستويات هي

المستوى العمودي normal plane

$$<\underline{X} - \underline{x}(s), \underline{T}> = 0 \qquad (3.24)$$

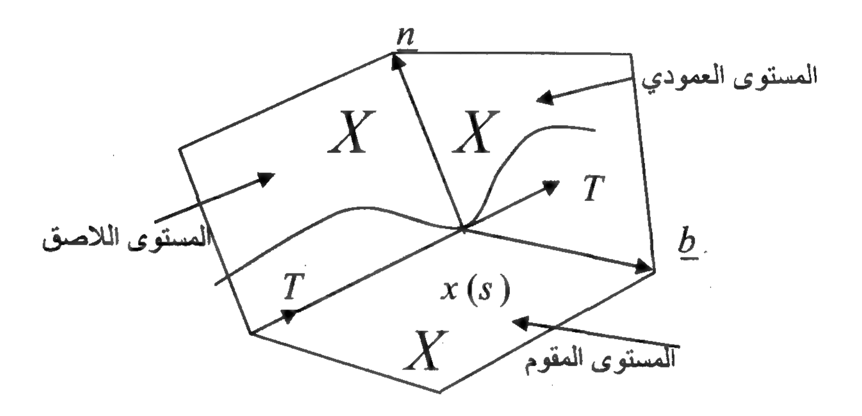
والمستوى المقوم rectifying plane

$$<\underline{X} - \underline{x}(s), \underline{n}> = 0 \qquad (3.25)$$

والمستوى اللاصق

$$<\underline{X} - \underline{x}(s), \underline{b}> = 0 \qquad (3.26)$$

حيث $\underline{X}$ متجه الموضع لأي نقطة في هذه المستويات كما هو موضح في شكل (٣-١٠).



شكل (٣-١٠)

لاحظ أن المستوى المقوم هو مستوى تماس يحتوي على العمود الثانوي. وعليه فإنه عند كل نقطة على المنحنى يوجد ثلاثي متحرك من المتجهات وثلاثي متحرك من المستويات وهي إطارات ملازمة للمنحنى وهي حقول المستويات plane vector field وحقول المتجهات المصاحبة لمنحنى الفراغ.

ملاحظة (٩.٣):

الثلاثي (T,n,b) يكون إطار متحرك عند أي نقطة على المنحنى كما لو كان هناك راصد observer يتحرك على المنحنى. هذا الإطار يعتبر صورة للإطار الثابت (e_1,e_2,e_3) بالنسبة للفراغ الثلاثي $\mathbb{R}^3$.

مثال (١٦.٣):

بالنسبة لمنحنى الحلزون

$$x_1 = \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, x_2 = \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, x_3 = \frac{s}{\sqrt{2}}, \quad (s \text{ بارامتر طول القوس})$$

أوجد الثلاثي المتحرك $\underline{T},\underline{n},\underline{b}$ والمستويات التي تحدد بأوجه الثلاثي المتحرك عند النقطة $s = 0$

الحل:

بالتفاضل واستخدام العلاقات (3.22)، (3.23)، (3.24)، (3.25)، (3.26) نحصل على الثلاثي

$$\underline{T} \equiv (0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}), \quad \underline{n} \equiv (-1,0,0), \quad \underline{b} \equiv (0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$$

عند البارامتر $s = 0$ الذي يناظر النقطة $x(0) = (1,0,0)$ على المنحنى.

إذاً المستوى العمودي والمستوى اللاصق والمستوى المقوم يعطى من

$$x_2 + x_3 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0, \; x_1 = 0,$$

على الترتيب.

ملاحظة (١٠.٣):

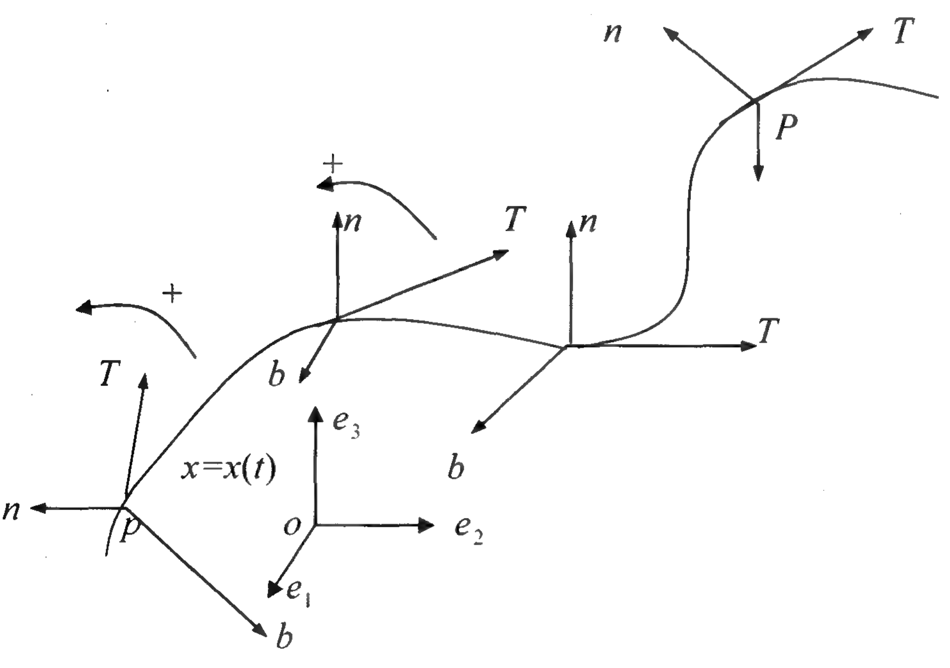
في المثال السابق $|\frac{dx}{ds}| = 1$ لأن s بارامتر طول القوس.

ثانياً: للمنحنى المنتظم $\underline{x} = \underline{x}(t)$ يكون $\frac{ds}{dt} = |\dot{\underline{x}}(t)| \neq 0$ وباستخدام طريقة

جرام شميدت Gram Schmidtt والعلاقة بين الضرب القياسي والاتجاهي في الباب الثاني يمكن تكوين حقل الثلاثي العياري المتعامد $(\underline{T},\underline{n},\underline{b})$ على الصورة :

$$\begin{aligned} \underline{T} &= \frac{\underline{x}'}{|\underline{x}'|}, \\ \underline{n} &= \frac{<\underline{x}',\underline{x}'>\underline{x}''-<\underline{x}',\underline{x}''>\underline{x}'}{|\underline{x}'||\underline{x}'\times\underline{x}''|}, \\ \underline{b} &= \frac{\underline{x}'\times\underline{x}''}{|\underline{x}'\times\underline{x}''|} \end{aligned} \qquad (3.27)$$

كما هو موضح بالشكل (٣ـ١٠).



شكل (٣ـ١٠)

العلاقات (3.27) يمكن الحصول عليها بسهولة (جرام ـ شميدت) حيث المتجه

$$u = x'' - \langle x'', T \rangle T$$

عمودي على المتجه T، $\frac{u}{|u|}$ متجه الوحدة العمودي n ، $b = T \times n$.

تعريف (٦.٢):

الثلاثي المتحرك $\{T, n, b\}$ على امتداد المنحنى المنتظم $\underline{x} = \underline{x}(s)$ يسمى إطار فرينيه المتحرك Frenet Frame field.

مثال (١٧.٢):

إذا كانت $x = x(s)$ ، $x = x^*(s^*)$ تمثيلات طبيعية لنفس المنحنى. إذاً

$$s = \pm s^* + \text{const.}$$

الحل:

نفرض أن $s = s(s^*)$ إذاً

$$\frac{dx}{ds^*} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{ds^*},$$

$$\left|\frac{dx}{ds^*}\right| = \left|\frac{dx}{ds}\right| \left|\frac{ds}{ds^*}\right|$$

وحيث أن x، x^* تمثيلات طبيعية فيكون لدينا

$$\left|\frac{dx}{ds}\right| = \left|\frac{dx}{ds^*}\right| = 1$$

$$\therefore \left|\frac{ds}{ds^*}\right| = 1 \quad \text{or} \quad \frac{ds}{ds^*} = \pm 1$$

وبالتكامل نحصل على

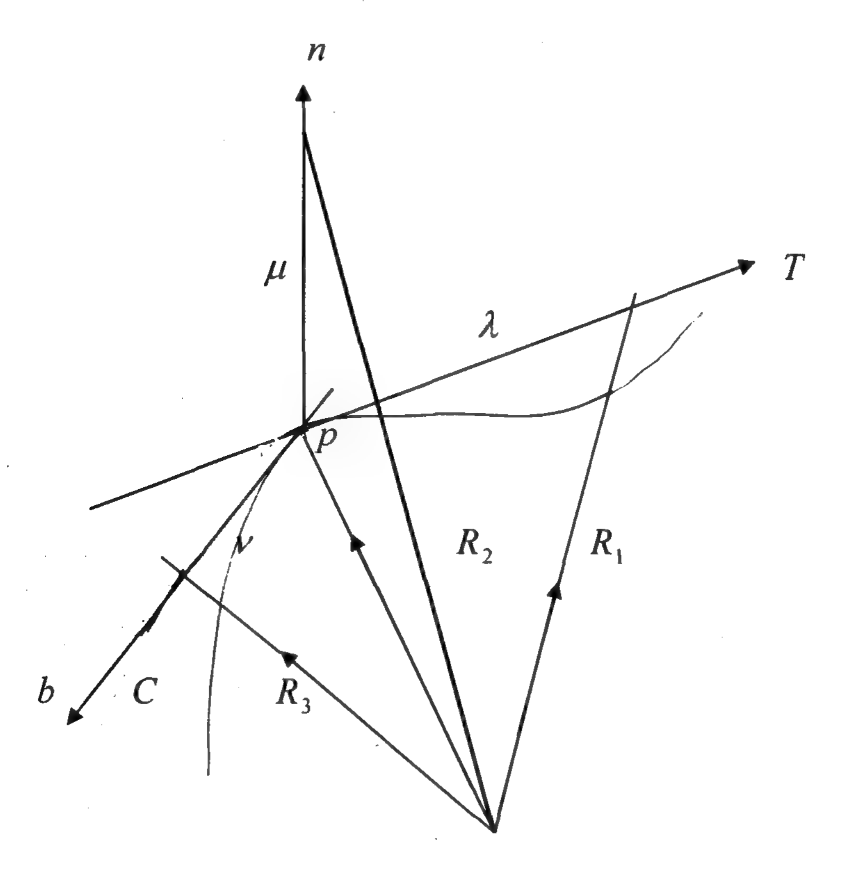
$$s = \pm s^* + \text{const.}$$

وهو المطلوب إثباته.

ملاحظة (٣.١١):

باستخدام الاتجاهات T, n, b نحصل على معادلات خط المماس وخط العمود الأساس وخط العمود الثانوي عند نقطة $p = x(s_o)$ على المنحنى $C : x = x(s)$ كما هو موضح في شكل (٣.١١).

$$R_1 = x(s_o) + \lambda T$$
$$R_2 = x(s_o) + \mu n \qquad , \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \qquad (3.28)$$
$$R_3 = x(s_o) + \nu b$$



شكل (٣.١١)

تمارين (٣)

(١) أوجد المعادلات البارامترية لمنحنى الحلزون الدائري الذي يقع على الاسطوانة $x_1^2 + x_2^2 = 4$ ويمر خلال النقط $(2,0,0)$, $(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})$. هل يوجد أكثر من حلزون دائري من هذا النوع؟

(**إرشاد:** منحنى الحلزون الدائري له التمثيل البارامتري $r(\theta)=(a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta)$ وبالتعويض بالنقط المعطاة نجد أن $a = 2$، $b = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$).

(٢) أوجد المعادلات البارامترية لمنحنى القطع الناقص الذي يقع في المستوى $x_2 = \frac{x_1}{\sqrt{3}}$ ومحوره الأكبر يقع في المستوى $x_1 x_2$ ومحورة الأصغر هو محور ox_3.

(**إرشاد:** $x_3 = b\sin t$ ، $x_2 = a\cos t$ ، $x_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}\cos t$ ، $a > b$)

(٣) بين أن المنحنى التكعيبي $(a = b = c = 1)$ هو تقاطع الاسطوانات الآتية:

$$x_2 = x_1^2,\ x_3 = x_1^3$$

(**إرشاد:** ضع $x_1 = t$ والمنحنى التكعيبي $x(t) = (at, bt^2, ct^3)$)

(٤) أوجد التمثيل البارامتري للمنحنى

$$x_2^2 = x_1, x_3^2 = 1 - x_1 \quad 0 \le t \le 2\pi$$

(**إرشاد:** $x_2^2 + x_3^2 = 1, x_2 = \sin t, x_3 = \cos t, x_1 = \sin^2 t$)

(٥) أوجد التمثيل البارامتري للمنحنى

(أسطوانتين دائريتين قائمتين) $x_1^2 + x_2^2 = \rho^2\ ,\ x_1^2 + x_3^2 = \rho^2$

ما هي المنحنيات التي لها هذا التمثيل البارامتري؟

(إرشاد: استخدم نظرية الدوال الضمنية وتأكد من أن $\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x_2,x_3)} \neq 0$ وعبر عن x_2, x_3 بدلالة x_1 نجد أن المنحنى دائرة في المستوى $x_2 = x_3$).

(٦) أوجد التمثيل البارامتري للمنحنى $x_1 x_2 x_3 = 1,\ x_2^2 = x_1$

(إرشاد: مثل التمرين السابق)

(٧) هل المنحنى التكعيبي في تمرين (٣) يقطع الخط المستقيم

$$x_1 = 1+u,\ x_2 = -1+5u,\ x_3 = 1+7u\ \ ?$$

(إرشاد: ساوي المركبات للخط المستقيم مع مركبات المنحنى وأوجد قيم u المناسبة).

(٨) ما هو المنحنى المعطى بالمعادلات البارامترية

$$x_1 = 1+\sin t,\ x_2 = -1-\sin t,\ x_3 = 2\sin t\ ?$$

(إرشاد: راجع النظريات (2.1) & (2.2))

(٩) هل المنحنى

$$x_1 = \cos e^t, x_2 = \sin e^t, x_3 = \sin e^t$$

خط مستقيم أو منحنى مستوي.

(إرشاد: راجع النظريات (2.1) & (2.2))

(١٠) أوجد كل الدوال $f(t)$ من الطبقة الثالثة C^3 التي تجعل المنحنى

$$x_1 = \cos t,\ x_2 = \sin t,\ x_3 = f(t)$$

منحنى مستوي.

(إرشاد: الدالة $f(t)$ يقال أنها من طبقة C^k إذا كانت متصلة ولها مشتقات تفاضلية متصلة حتى الرتبة k وكذلك تحقق $[\underline{x}', \underline{x}'', \underline{x}'''] \equiv 0$).

(١١) أوجد التمثيل البارامتري للدائرة $<\underline{x},\underline{x}>=4a^2, x_1=a$ وأوجد طول محيطها عن طريق التكامل.

(إرشاد: الدائرة المعطاة هي تقاطع مستوى مع كرة نصف قطرها $2a$ ومركزها نقطة الأصل).

(١٢) أوجد طول قوس المنحنى $\underline{x}(t)=(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ من $t=0$ إلى t_0.

(١٣) أوجد طول المنحنى التكعيبي $\underline{x}(t)=(6t, 3t^2, t^3)$ من $t=0$ إلى $t=6$.

(١٤) أوجد معادلات خط التماس والمستوى العمودي عند أي نقطة اختيارية للمنحنى في (١٣).

(١٥) أوجد معادلات المماس والمستوى العمودي للمنحنى الحلزوني $\underline{x}(t)=(\cos t, \sin t, t)$ عند أي نقطة أختيارية P. إذا قطع المستوى العمودي محور x_3 في نقطة Q، بين أن المستقيم PQ يوازي المستوى x_1x_2.

(١٦) أوجد الزاوية بين المنحنين

(i) $x_2^2=x_1 \;,\; x_3^2=2-x_1$ (أسطوانتين مكافئتين)

(ii) $x_1=t \;,\; x_2=t^2,\; x_3=t^3$ (منحنى تكعيبي)

عند النقطة $(1, 1, 1)$.

(إرشاد: أوجد التمثيل البارامتري للمنحنى (i) والزاوية بين المنحنيين هي الزاوية بين المماسين لهذين المنحنيين).

(١٧) أوجد معادلة المماس والمستوى العمودي للمنحنيات

(i) $x_2=f(x_1) \;,\; x_3=g(x_1)$

(ii) $F(x_1,x_2)=0,\; G(x_1,x_3)=0$

(iii) $F(x_1,x_2,x_3)=0 \;,\; G(x_1,x_2,x_3)=0$

(إرشاد : أوجد التمثيل البارمتري للمنحنيات مستعيناً بنظرية الدالة الضمنية ومناقشة كل الحالات الممكنة للدوال المعطاة).

(١٨) أوجد مركبات متجه المماس للمنحنى (تقاطع سطحين)

(سطح مجسم ناقصي (بيضاوي)) $x_1^2+3x_2^2+2x_3^2=9$

(سطح كرة) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=6$

عند النقطة $(2, 1, 1)$.

(إرشاد: مثل تمرين (١٧)).

(١٩) أوجد اتجاه متجه التماس عند النقطة المفردة للمنحنى $\underline{x}(t)=(t^2,t^3,t^4)$

(إرشاد: النقاط المفردة تتعين من $\underline{x}'(t)=\underline{0}$)

(٢٠) هل البارامتر t هو بارامتر طول قوس للمنحنى (بارامتر طبيعي)

$$x_1=\frac{\sqrt{t^2+t+4}}{2}, x_2=\frac{\sqrt{t^2+4-t}}{2}, x_3=\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{t^2+4+t}}{2}.$$

(إرشاد : تحقق من أن $|\underline{x}'|=1$).

(٢١) بين أن المستوى اللاصق للمنحنى $\underline{x}(t)=(t,1-t,t+t^2)$ عند النقطة $(1,0,2)$ يوازي محور x_3 (العمودي على المستوى عمودي على محور x_3).

(إرشاد: أوجد $\underline{b}$ وأثبت أن $<\underline{b},\underline{e}_3>=0$).

(٢٢) أوجد المستوى اللاصق للمنحنى التكعيبي عند أي نقطة اختيارية.

(٢٣) أوجد رتبة التصاق المنحنى $x_3=x_2^2,\ x_1^2=1-x_3$ مع المستوى اللاصق عند النقطة $(1,0,0)$.

(إرشاد: أوجد التمثيل البارامتري للمنحنى حيث أنه تقاطع أسطوانتين).

(٢٤) أوجد رتبة التصاق المنحنى $\underline{x}(t)=(t,t^2,t^3)$ مع كل من المستويات الإحداثية الثلاث.

(٢٥) بين أن المستوى اللاصق لمنحنى مستوي هو المستوى الواقع فيه المنحنى.

(٢٦) بين أن المنحنى الذي له كل المستويات اللاصقة عند النقاط على امتداد المنحنى توازي مستوى ثابت هو منحنى مستوي.

(٢٧) أوجد حقل المتجهات $\underline{T},\underline{n},\underline{b}$ للمنحنيات

(i) $\underline{x}(t)=(2\sin^2 t,\ \sin 2t, 2\cos t)$

(ii) $x_1^2+x_2^2=a^2, 2x_1x_2=ax_3$

(منحنى تقاطع أسطوانة دائرية قائمة مع مجسم زائدي).

(٢٨) أوجد رتبة التصاق المنحنى

$$\underline{x}(t)=(4(t-1),-6(t+2\cos t),3(1-e^{-2t}))$$

مع المستوى $x_1+x_2-x_3+16=0$ عند النقطة $(-4,-12,0)$، هل هذا المستوى هو مستوى لاصق للمنحنى؟

(٢٩) بين أن التمثيل البارامتري

$$x(s)=(\frac{1}{2}f(s),\frac{1}{2f(s)},\frac{1}{\sqrt{2}}\log f(s)),\ f(s)>0$$

تمثيل طبيعي حيث $f(s)=s+\sqrt{s^2+1}$

(**إرشاد:** أثبت أن $|\frac{dx}{ds}|=1$).

(٣٠) أوجد التمثيل البارامتري الطبيعي للمنحنى

$$x=(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t), t\in\mathbb{R}$$

(إرشاد: استخدم العلاقة $s=\int_0^t |\frac{dx}{dt}|dt$ لنحصل على s دالة في t ومنها نحصل على $(t=t(s)$

(٢١) بين أن الدوال الاتجاهية

$$x=(t,\sin t,e^t),-\infty<t<\infty \; ; \; x=(\log u,\sin\log u,u),\ 0<u<\infty$$

هي تمثيلات بارامترية لنفس المنحنى الموجة (منحنى منتظم).

(إرشاد: استخدم تغير البارامتر المسموح به $t=\log u$ وتأكد من أن $(\frac{dt}{du}=\frac{1}{u}>0$

(٢٢) أوجد طول قوس المنحنى $x=(3\cosh 2t,3\sinh 2t,6t),0\le t\le \pi)$

(٢٣) بين أن المماسات للمنحنى $x=(at,bt^2,t^3)\ ,2b^2=3a$ تصنع زاوية ثابتة مع الاتجاه الثابت $\underline{a}=(1,0,1)$

(٢٤) بين أن المنحنى $x(u)=(u,1-\frac{1}{u},\frac{1}{u}-u)$ يقع في مستوى حيث $u\in\mathbb{R}-\{0\}$.

(٢٥) أوجد تقاطع المستوى x_1x_2 مع خطوط التماس للمنحنى

$$C:x=(\cos u,\sin u,u),u>0$$

(إرشاد: أوجد معادلة المماس للمنحنى C عند أي نقطة اختيارية u وضع $x_3=0$ (المركبة الثالثة في معادلة المماس) نحصل على نقاط التقاطع وهي تمثل منحنى واقع في المستوى $x_3=0$).

الباب الرابع

الهندسة الخارجية لمنحنى الفراغ

Extrinsic Geometry of Space Curve

بعد أن قدمنا تعريف منحنى الفراغ من خلال دالة اتجاهية منتظمة في متغير واحد وقدمنا كذلك طرق الحصول على التمثيل البارامتري المنتظم للمنحنى وعرفنا دالة المسافة القوسية على المنحنى من خلال المشتقة الأولى للدالة الاتجاهية التي تعرف المنحنى. المشتقة الاتجاهية هذه تمثل متجه السرعة من خلال المشتقة الأولى. عرفنا كذلك الإطار المتحرك (إطار فرينيه) والمستويات المصاحبة له عند أي نقطة على المنحنى. والسؤال الذي يطرح نفسه الآن ماذا عن متجه التسارع ونعني به الانحناء وكيف نفرق بين منحنى في المستوى ومنحنى في الفراغ وذلك من خلال دالة الليّ وهذا هو موضوع هذا الباب الذي يحتوي على طرق حساب الانحناء والليّ وصيغ سيريه - فرينيه التفاضلية المصاحبة لإطار فرينيه وأخيراً نطبق ذلك على المنحنى الحلزوني.

(١-٤) دالة (حقل) الانحناء لمنحنى فراغ:

Curvature Function of Space Curve:

تعريف (١-٤):

يعرف الانحناء عند نقطة ما على منحنى فراغ منتظم بأنه مقياس المعدل الذي عنده يدور المنحنى مبتعداً عن خط المماس عند تلك النقطة.

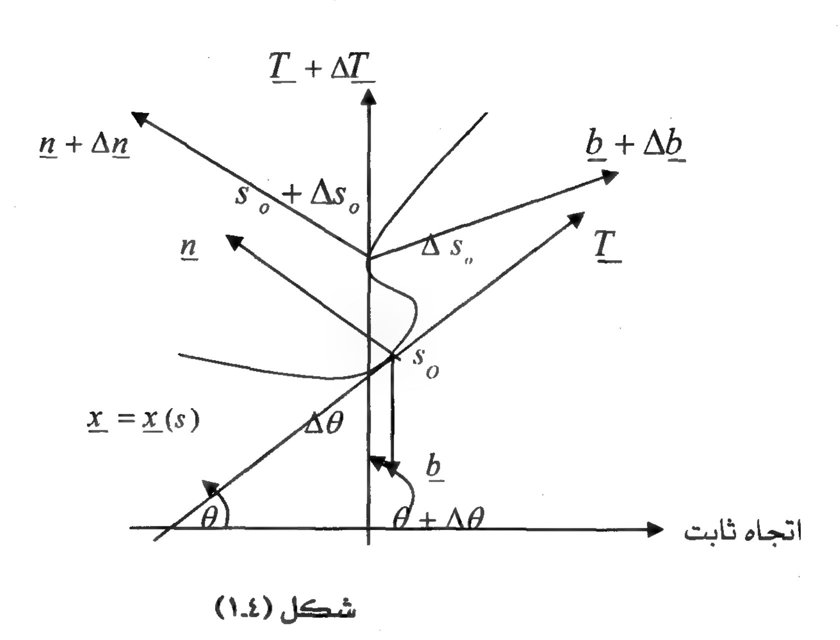
نعتبر منحنى في الفراغ له المعادلة الاتجاهية (بدلالة بارامتر طول القوس s) الآتية:

$$\underline{x} = \underline{x}(s) \qquad (4.1)$$

الانحناء للمنحنى (4.1) عند النقطة التي لها البارامتر $s = s_o$ هو معدل دوران المماس ويعطى من

$$\frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| \qquad (4.2)$$

حيث $\Delta\theta$ هي الزاوية بين المماس $\underline{T}$ عند النقطة s_o والمماس $\underline{T}+\Delta\underline{T}$ عند النقطة $s_o+\Delta s_o$ كما هو موضح في شكل (١.٤).



شكل (١.٤)

مثال (١.٤):

أوجد الانحناء للدائرة التي نصف قطرها a وتمثيلها البارامتري هو

$$\underline{x}(s) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{a}, \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\frac{s}{a}, a\cos\frac{s}{a}\right) \quad (s \text{ بارامتر طول القوس})$$

الحل:

اتجاه المماسات للمنحنى (الدائرة) عند النقط المتجاورة s_o , $s_o+\Delta s_o$ تعطى من

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_{s=s_o} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s_o}{a}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s_o}{a}, -\sin\frac{s_o}{a}\right), \quad (\text{متجه الوحدة})$$

و $(\frac{dx}{ds})_{s_o+\Delta s_o} = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s_o+\Delta s_o}{a}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{s_o+\Delta s_o}{a}, -\sin\frac{s_o+\Delta s_o}{a})$

على الترتيب. إذاً الزاوية $\Delta\theta$ بين المماسين تعطى من

$$\cos\Delta\theta = \cos\frac{s_o}{a}\cos\frac{s_o+\Delta s_o}{a} + \sin\frac{s_o}{a}\sin\frac{s_o+\Delta s_o}{a}$$

(باستخدام المتطابقات المثلثية) $= \cos\frac{\Delta s_o}{a} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\Delta s_o}{a}$

حيث $\Delta\theta$ هي الزاوية بين المماسين عند النقطتين $s_o + \Delta s_o, s_o$

$$\therefore \quad \frac{\Delta\theta}{\Delta s_o} = \frac{1}{a}, \quad \text{i. e.,} \quad \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s_o} = \frac{1}{a} = \frac{1}{R}$$

أيّ أنه بالنسبة للدائرة يكون الانحناء مساوي مقلوب نصف القطر وعموماً مقلوب الانحناء يسمى نصف قطر الانحناء كما سوف نرى ذلك في الباب القادم. لاحظ أن هذا المنحنى هو دائرة واقعة في المستوى $x_1 = x_2$.

تعريف (٢٤):

يعرف متجه الانحناء لمنحنى C عند نقطة ما بأنه معدل دوران متجه المماس عند هذه النقطة.

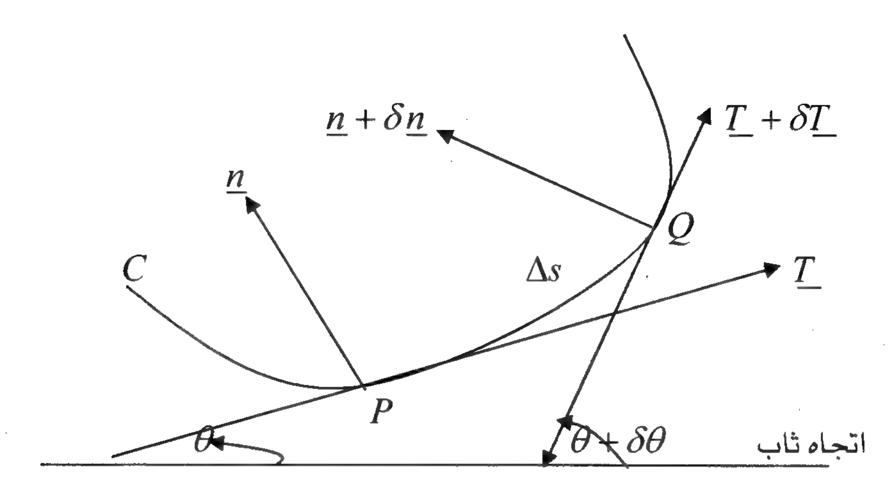
نظرية (١٤):

المنحنى المنتظم $C: \underline{r} = \underline{r}(s)$ (متصل وقابل للتفاضل مرتين) له انحناء محدد k عند كل نقطة من نقطه ويعطى من $k = |\frac{d^2\underline{r}(s)}{ds^2}|$ حيث $\underline{r} = \underline{r}(s)$ هو التمثيل الطبيعي للمنحنى C.

البرهان:

نفرض أن P نقطة ما على المنحنى C وأن المماس عند P هو $\underline{T}$ والعمودي الأساسي عند P هو $\underline{n}$ ونفرض أن Q نقطة قريبة قرباً كافياً من P أي أن المماس

عند Q هو $\underline{T}+\delta\underline{T}$ والعمودي الأول (الأساسي) هو $\underline{n}+\delta\underline{n}$ كما هو موضح في شكل (٢.٤).



شكل (٢.٤)

وباستخدام تمرين (٣) من تمارين (٢) في الباب الثاني نحصل على:

$$\delta\underline{T}=2\sin\frac{\delta\theta}{2}.\ \underline{k}$$

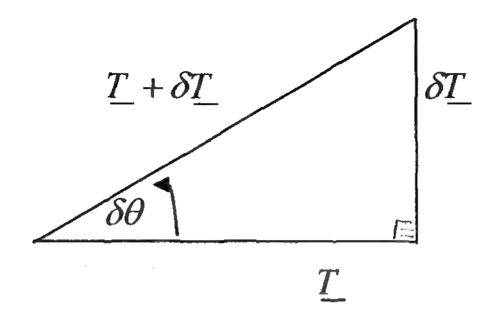
حيث $\underline{k}$ وحدة المتجهات في اتجاه δT كما هو موضح في شكل (٢.٤) حيث

$$|\underline{T}|=|\underline{T}+\delta\underline{T}|=1$$

$$\therefore\ \frac{\delta\underline{T}}{\delta s}=\frac{2\sin\frac{\delta\theta}{2}}{\delta\theta}\ \frac{\delta\theta}{\delta s}.\underline{k}=\frac{\sin\frac{\delta\theta}{2}}{\frac{\delta\theta}{2}}.\frac{\delta\theta}{\delta s}.\underline{k}$$

$$\therefore\ \lim_{\substack{\delta\underline{T}\to 0\\ \delta s\to 0}}\frac{\delta\underline{T}}{\delta s}=\frac{d\underline{T}}{ds}=\frac{d\theta}{ds}.\underline{n}\ ,\qquad \lim_{\substack{\delta\underline{T}\to 0\\ \delta s\to 0}}\underline{k}=\underline{n}$$

$$\therefore\ \dot{\underline{T}}=k\ \underline{n}\qquad (4.3)$$



شكل (٣.٤)

حيث

$$T=\frac{dr}{ds} \text{ ، } \underline{T}+\delta\underline{T}=(\frac{dr}{ds})_{s+\Delta s}$$

عند النقطة $Q(s+\Delta s)$ ، $P(s)$ على الترتيب.

المتجه $\underline{k}$ المعرف من خلال الدالة الاتجاهية

$$\ddot{\underline{r}}(\text{s})=\frac{d^2\underline{r}}{ds^2}=\frac{d\underline{T}}{ds}=\underline{k} \qquad (4.4)$$

يسمى بمتجه الانحناء Curvature Vector ويكون طول هذا المتجه هو الانحناء k ويعطى من

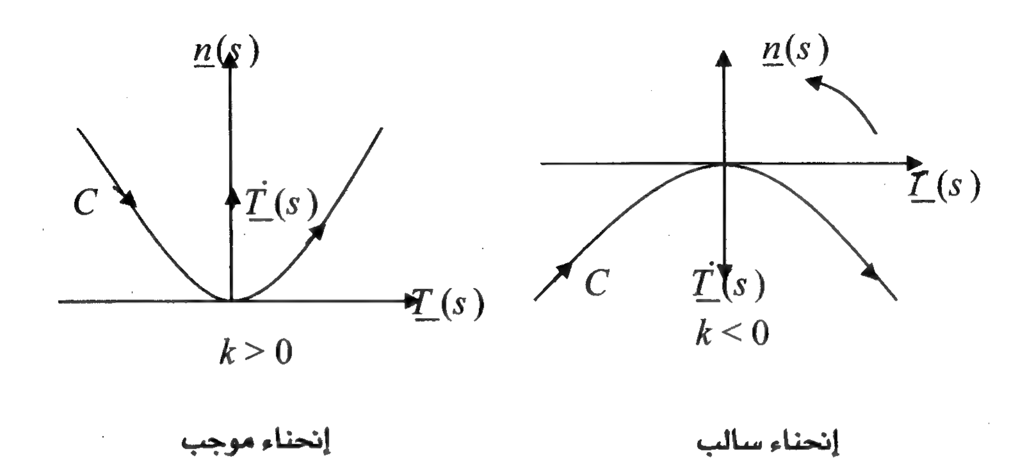
$$k=|\dot{\underline{T}}|=|\frac{d^2\underline{r}}{ds^2}|=[\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}]^{\frac{1}{2}} ,. \frac{d}{ds} \qquad (4.5)$$

وبهذا نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية.

اتجاه متجه الانحناء يتحدد بالطريقة الآتية:

إذا أخذنا $\underline{n}$ ناحية الجهة المقعرة convex من المنحنى فإن الانحناء يكون موجب أما إذا أخذنا $\underline{n}$ متجه ناحية الجهة المحدبة convex من المنحنى فإن k تكون سالبة ويسمى $\rho=\frac{1}{k}$ بنصف قطر الانحناء radius of curvative. وسنتفق من

الآن على أن يكون الزوج $(\underline{T}(s),\underline{n}(s))$ بريمة يمينية في الفراغ $E^3=\mathbb{R}^3$ كما هو مبين بالشكل (٤-٤).

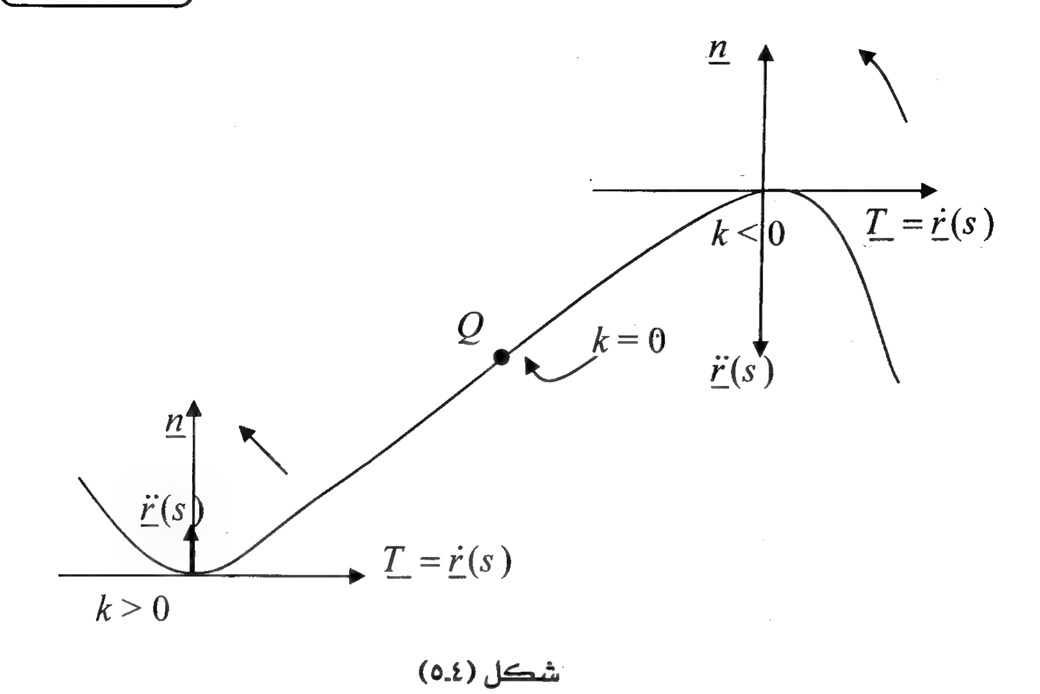


إنحناء موجب **إنحناء سالب**

شكل (٤-٤)

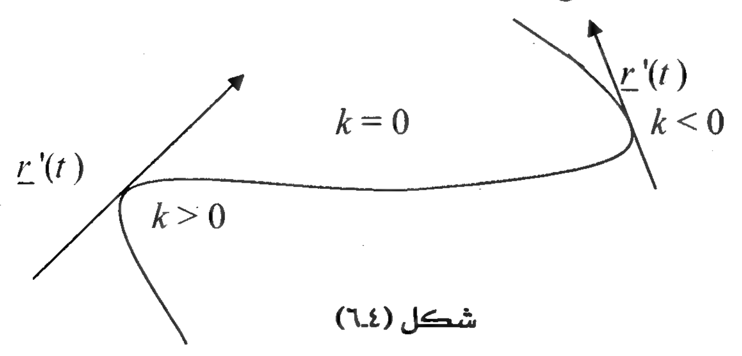
النقطة التي عندها يكون $\ddot{\underline{r}}(s)=\underline{0}$ أو $\ddot{\underline{r}}(s)=\lambda\ \dot{\underline{r}}(s)$ بحيث $\ddot{\underline{r}}(s)\neq\underline{0}$ تسمى نقطة انقلاب للمنحنى Inflection Point أو نقطة انعطاف أي النقطة التي يغير فيها المنحنى انحنائه من سالب إلى موجب أو العكس.

ويمكن القول بأن انحناء المنحنى موجب إذا كان $\dot{T}=\dfrac{d^2r}{ds^2}$ في اتجاه العمود الأساسي n أما إذا كان يوازي n في الاتجاه المعاكس فإن الانحناء يكون سالب (أنظر شكل (٤-٥).



شكل (٤ـ٥)

واضح أن Q نقطة انقلاب للمنحنى المبين بالشكل (٤ـ٥) وبمقتضى هذا الاتفاق يتضح أن انحناء المنحنى في الفراغ غير سالب ولكن بالنسبة للمنحنيات التي تقع في المستوى تظهر غالباً إشارة تصاحب الانحناء ولتحديد هذه الإشارة نستخدم الاعتبارات التالية : متجه التماس $\underline{r}'(t)$ للمنحنى $\underline{r}=\underline{r}(t)$ يدور أثناء حركته على المنحنى في اتجاه زيادة t (البارامتر) وبالتالي الانحناء يكون موجب أو سالب بالاعتماد على اتجاه دوران المتجه $\underline{r}'(t)$ كما هو موضح بالشكل (٤ـ٦).



شكل (٤ـ٦)

ملاحظة (١٤):

نقطة الانقلاب أو الإنعطاف تسمى أحياناً نقطة مستقيمة straight point حيث $k = 0$.

نظرية (٢٤):

إذا كان انحناء المنحنى ينعدم عند كل نقطه عليه فإن المنحنى خط مستقيم.

البرهان:

$$\because k = \left|\frac{d^2 \underline{r}}{ds^2}\right| = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \underline{r}}{ds^2} = \underline{0}$$

وبالتكامل مرتين نحصل على

$$\underline{r}(s) = \underline{a}s + \underline{b}$$

حيث $\underline{a}$, $\underline{b}$ متجهات ثابتة والمعادلة $\underline{r}(s) = \underline{a}\, s + \underline{b}$ تمثل المعادلة الاتجاهية للخط المستقيم الذي اتجاهه $\underline{a}$ ويمر بالنقطة $\underline{b}$ أي أن المنحنى الذي له الانحناء ينعدم عند كل نقطه عليه يكون إما خط مستقيم أو فترة مفتوحة (قطعة مستقيمة) من خط مستقيم والعكس صحيح.

(٢٤) دالة اللي لمنحنى الفراغ: Torsion function of a space curve

نعلم أنه بالنسبة للمنحنيات في المستوى يكون المستوى اللاصق للمنحنى ثابت دائماً ($\underline{b} = \text{const.}$) ويكون هو المستوى الذي يقع فيه المنحنى نفسه. ولكن لمنحنى الفراغ لا يكون هذا صحيحاً ($\underline{b}$ دالة في s) دائماً حيث أن المستوى اللاصق للمنحنى يغير اتجاهه عند كل نقطة من نقط المنحنى وعلى ذلك فإنه يكون لهذا المستوى معدل دوران هو في نفس الوقت معدل دوران العمود الثانوي للمنحنى أي معدل دوران $\underline{b}$ والذي يساوي $\dot{\underline{b}} = \frac{d\underline{b}}{ds}$ ولذلك نعطي التعريف الآتي:

تعريف (٤-٣):

يعرف اللي عند نقطة على منحنى الفراغ بأنه مقياس المعدل الذي عنده المنحنى يلتوي عن المستوى اللاصق له عند هذه النقطة وعليه يكون للمنحنى المستوى الليّ منعدم.

فإذا رمزنا إلى $|\dot{\underline{b}}|$ بالرمز τ فإن (τ تسمى الليّ torsion للمنحنى):

$$\tau = |\dot{\underline{b}}| = |\frac{d\underline{b}}{ds}| \qquad (4.6)$$

إذا كان $\tau = 0$ فإن $\dot{\underline{b}} = \frac{d\underline{b}}{ds} = 0$ أي أن $\underline{b}$ متجه ثابت المقدار والاتجاه وليكن مساوياً $\underline{b}_o$ وبناء على ذلك إذا كانت معادلة المنحنى هي $\underline{r} = \underline{r}(s)$ فإن:

$$\frac{d}{ds} < \underline{r}(s), \underline{b}_o > = < \dot{\underline{r}}(s), \underline{b}_o > = < \underline{T}, \underline{b}_o > = 0$$

لأن $\underline{b}_o$ عمودي على $\underline{T}$ وهذا يعني أن

$$< \underline{r}(s), \underline{b}_o > = \text{const.}$$

وهي معادلة خطية في مركبات الدالة $\underline{r}(s)$ ، إذاً فهي معادلة مستوى.

وحيث أن $< \underline{n}, \underline{b}_o > = 0$ فإننا نستنتج أن المنحنى يقع بأكمله في المستوى المولد بالمتجهات $T, \ n$ (المستوى اللاصق) ويسمى المنحنى في هذه الحالة منحنى مستوى plane curve. أيضاً إذا كان لدينا منحنى مستوى فإن المنحنى يقع في المستوى الذي يحتوي المماس والعمودي الأول (العمود الأساسي) n على المنحنى وبذلك يكون العمودي على المستوى الذي يقع فيه المنحنى ثابت الاتجاه أي أن

$$\dot{\underline{b}} = \frac{d\underline{b}}{ds} = 0 \quad \text{وهذا يكافئ أن} \quad \tau = |\dot{\underline{b}}| = 0$$

وبالتالي نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية :

نظرية (٣.٤):

الشرط الضروري والكافي كي يكون منحنى الفراغ مستوياً هو أن الليّ له يتلاشى تطابقياً أي لجميع نقاطه..

ملاحظة (٢.٤):

إذا كانت ψ هي الزاوية التي يدور بها المستوى اللاصق فإن الليّ τ يعرف من خلال $\tau = \frac{d\psi}{ds}$ حيث s البارامتر الطبيعي للمنحنى $\underline{r} = \underline{r}(s)$.

نظرية (٤.٤):

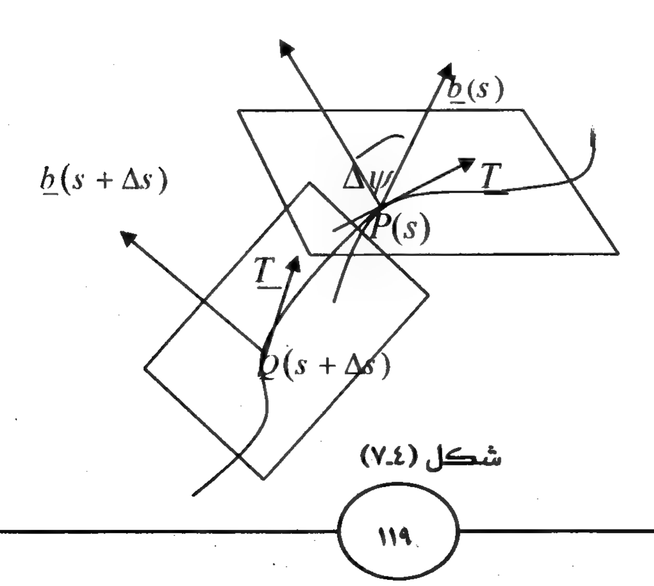
المنحنى المنتظم (مستمر وقابل للتفاضل ثلاث مرات) له ليّ مطلق محدود عند كل نقطة من نقطه والتي عندها الانحناء k يختلف عن الصفر ويعطى بالعلاقة

$$|\tau| = \frac{1}{k^2}|[\frac{d\underline{r}}{ds}, \frac{d^2\underline{r}}{ds^2}, \frac{d^3\underline{r}}{ds^3}]| \qquad (4.7)$$

حيث $\underline{r} = \underline{r}(s)$ هو التمثيل البارامتري الطبيعي للمنحنى.

البرهان:

إذا كان الانحناء للمنحنى عند النقطة $P(s)$ يختلف عن الصفر فهو لا يساوي الصفر عند جميع النقط القريبة جداً من $P(s)$ بسبب خاصية الاتصال.



شكل (٧.٤)

عند كل ألنقط التي فيها $k \neq 0$ تكون المتجهات $\underline{\dot{r}}(s),\ \underline{\ddot{r}}(s)$ تختلف عن الصفر وغير متوازية وبالتالي فإن المستوى اللاصق يكون موجود عند كل نقطة $Q(s+\Delta s)$ مجاورة للنقطة $P(s)$. نفرض أن $\underline{b}(s),\ \underline{b}(s+\Delta s)$ هي متجهات العمود الثاني (الثانوي) عند $P,\ Q$ على الترتيب على امتداد المنحنى $\underline{r}=\underline{r}(s)$، $\Delta\psi$ هي الزاوية بين هذين المتجهين كما في شكل (٤ـ٨). بما أن $\underline{b}(s), \underline{b}(s+\Delta s)$ متجهات وحدة فإن

$$|\underline{b}(s+\Delta s)-\underline{b}(s)|=2\sin\frac{\Delta\psi}{2}$$ (أنظر تمرين (٣) في تمارين الباب الثاني)

$$\therefore \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\underline{b}(s+\Delta s)-\underline{b}(s)}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\psi}{2}}{\Delta s}$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\psi}{2}}{\frac{\Delta\psi}{2}}.\frac{\Delta\psi}{\Delta s}$$

$$=\frac{d\psi}{ds}=|\tau|$$

وباستخدام تعرف اللّيّ نجد أن

$$|\tau|=\left|\frac{d\underline{b}}{ds}\right|$$

وحيث أن

$$\frac{d\underline{b}}{ds}=\frac{d}{ds}(\underline{T}\wedge\underline{n})$$ (من تعريف $\underline{b}$)

فإن

$$\frac{d\underline{b}}{ds}=\frac{d\underline{T}}{ds}\wedge\underline{n}+\underline{T}\wedge\frac{d\underline{n}}{ds}=\underline{T}\wedge\frac{d\underline{n}}{ds}$$ (من (4.3))

ومنها ينتج أن $\dot{\underline{b}}$ عمودي على كل من $\underline{T}$ و $\frac{d\underline{n}}{ds}$ وبما أن $\frac{d\underline{n}}{ds}$ عمودي على $\underline{n}$ إذاً $\dot{\underline{b}}$ يوازي n وبالتالي يكون (من (4.3)، (4.4))

$$|\tau| = |<\frac{d\underline{b}}{ds}, \underline{n}>| = |<\frac{d\underline{b}}{ds}, \frac{1}{k}\frac{d^2\underline{r}}{ds^2}>|$$

$$= \frac{1}{k}|<\frac{d\underline{b}}{ds}, \frac{d^2\underline{r}}{ds^2}>|$$

ولكن

$$\underline{b} = \underline{T} \wedge \underline{n} = \frac{1}{k}\frac{d\underline{r}}{ds} \wedge \frac{d^2\underline{r}}{ds^2}$$

إذاً

$$\frac{d\underline{b}}{ds} = \frac{1}{k}\frac{d\underline{r}}{ds} \wedge \frac{d^3\underline{r}}{ds^3}$$

إذاً

$$|\tau| = \frac{1}{k^2}\ |[\frac{d\underline{r}}{ds}, \frac{d^2\underline{r}}{ds^2}, \frac{d^3\underline{r}}{ds^3}]|$$

وهذا يكمل برهان النظرية.

نعتبر

$$\tau = \pm\frac{1}{k^2}[\frac{d\underline{r}}{ds}, \frac{d^2\underline{r}}{ds^2}, \frac{d^3\underline{r}}{ds^3}]$$

حيث الإشارة الموجبة تدل على دوران المستوى اللاصق في الاتجاه من $\underline{b}$ إلى $\underline{n}$ والإشارة السالبة تدل على أن الدوران في الاتجاه من $\underline{n}$ إلى $\underline{b}$.

ملاحظة (٢،٤):

الانحناء k للمنحنى يمكن أن يتخذ مقياساً لمدى انحراف المنحنى عن أن يكون خط مستقيم وكذلك اللّيّ τ يمكن أن يتخذ مقياساً لمدى انحراف المنحنى عن أن يكون منحنى مستوى.

مثال (٢٤):

أثبت أن انحناء المنحنى

$$\underline{r} = (a\cos\theta,\ a\sin\theta, b\theta)$$

ثابت وأن المماس للمنحنى يصنع زاوية ثابتة مع محور oz .

الحل :

بما أن

$$\frac{d\underline{r}}{d\theta} = (-a\sin\theta,\ a\cos\theta, b)$$

$$\therefore \left|\frac{d\underline{r}}{d\theta}\right| = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{ds}{d\theta}$$

$$\underline{T} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin\theta\ , a\cos\theta, b)$$

حقل متجه الانحناء $\underline{k}$ يعطى من

$$\underline{k} = \frac{d\underline{T}}{ds} = \frac{d\underline{T}}{d\theta}.\frac{d\theta}{ds}$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2}(-\cos\theta, -\sin\theta, 0)$$

لاحظ أن

$$\frac{1}{|r'|} = 1/\left|\frac{d\underline{r}}{d\theta}\right| = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}, ' = \frac{d}{d\theta}$$

إذاً دالة الانحناء تعطى من

$$\therefore\quad k = |\underline{k}| = \frac{a}{a^2+b^2} = \text{const.}$$ (لاحظ أنه ثابت وليس دالة)

وهذا يوضح أن الانحناء $k > 0$ إذا كانت $a > 0$ ، الانحناء $k < 0$ إذا كانت $a < 0$.

الزاوية ϕ بين المماس T للمنحنى ومحور oz تعطى من

$$\cos\phi = <\underline{T},\underline{e}_3> = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \text{const.}$$ (T, e_3 متجهات وحدة)

حيث $\underline{e}_3$ وحدة المتجهات في اتجاه محور oz .

إذاً الزاوية بين محور oz والمماس $\underline{T}$ هي

$$\phi = \cos^{-1}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ملاحظة (٤.٤):

منحنى الفراغ في المثال السابق يسمى حلزون دائري (أنظر شكل (١.٣)).

(٣.٤) صيغ سيريه ـ فرينيه التفاضلية:

Serret – Frenet Differential formulas

نفرض أن لدينا منحنى $\underline{r} = \underline{r}(s)$ في الفراغ حيث s هو بارامتر طول القوس.

من سابقاً نعلم أنه عند النقطة P على هذا المنحنى يوجد الثلاثي $(\underline{T},\underline{n},\underline{b})$ حيث $\underline{T} = \underline{T}(s), \underline{n} = \underline{n}(s), \underline{b} = \underline{b}(s)$ والمطلوب الآن هو إيجاد صيغ للمشتقات $\dot{\underline{T}}(s), \dot{\underline{n}}(s), \dot{\underline{b}}(s)$. لذلك سنرمز للثلاثي $(\underline{T},\underline{n},\underline{b})$ بالرمز $\underline{v}_i(s)$ حيث $i = 1, 2, 3$ أي أن:

$$\underline{v}_1 = \underline{T}, \underline{v}_2 = \underline{n}, \underline{v}_3 = \underline{b}$$

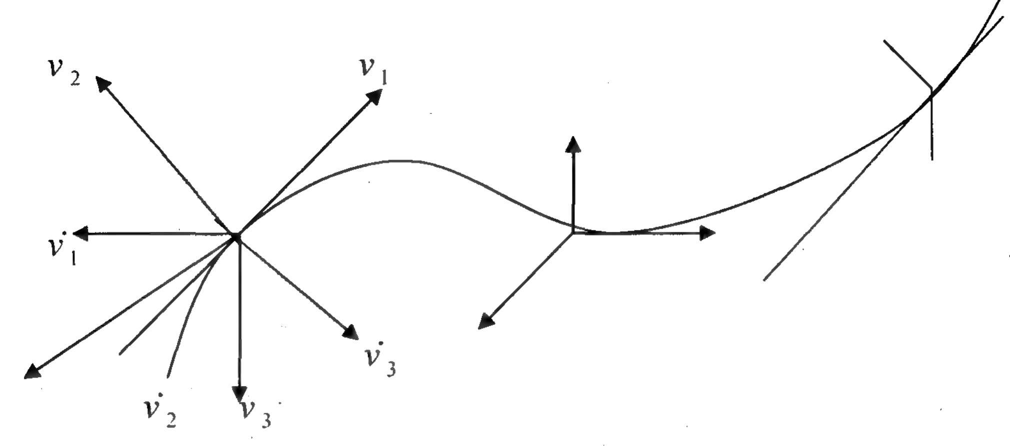
وحيث أن هذا الثلاثي عياري متعامد فإن:

$$<\underline{v}_i, \underline{v}_j> = \delta_i^j \qquad (4.8)$$

بالطبع عندما نفاضل أي دالة متجهة $\underline{v}_i(s)$ بالنسبة إلى s ينتج حقل متجه على امتداد المنحنى ولذلك فإنه يمكن كتابة $\dot{\underline{v}}_i(s)$ كعلاقة خطية من المتجهات $\underline{v}_j$ أي أن :

$$\dot{\underline{v}}_i(s) = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\underline{v}_j \ , \quad \frac{d}{ds} =\dot{}, \forall i \qquad (4.9)$$

حيث (a_{ij}) هي مصفوفة من الرتبة الثالثة ومحددها موجب ولا يساوي الصفر كما هو موضح في شكل (٨.٤).



شكل (٨.٤)

بضرب طرفي المعادلة (4.9) ضرباً قياسياً في $\underline{v}_k$ ثم استخدام (4.8) نحصل على:

$$<\dot{\underline{v}}_i, \underline{v}_k> = <\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\underline{v}_j, \underline{v}_k> = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\delta_{jk} = a_{ik} \qquad (4.10)$$

$$\therefore \; a_{ik} = <\dot{\underline{v}}_i, \underline{v}_k>$$

وبتفاضل العلاقة (4.8) وباستخدام (4.10) نحصل على

$$<\underline{v}_i, \underline{v}_j> + <\underline{v}_i, \dot{\underline{v}}_j> = 0$$

$$\therefore \; a_{ij} + a_{ji} = 0 \quad \text{or} \quad a_{ij} = -a_{ji} \qquad (4.11)$$

بوضع $i = j$ في (4.11) نحصل على

$$a_{ii} = 0 \qquad (4.12)$$

من (4.11)، (4.12) نستنتج أن المصفوفة (a_{ij}) شبه متماثلة.

والآن بوضع $i = 1,2,3$ في المعادلة (4.9) واستخدام (4.11)، (4.12) نجد أن:

$$\dot{\underline{v}}_1(s)=\dot{\underline{T}}(s)=\ a_{12}\underline{n}+a_{13}\underline{b},$$

$$\dot{\underline{v}}_2(s)=\dot{\underline{n}}(s)=-\ a_{12}\underline{T}+a_{23}\underline{b}, \qquad (4.13)$$

$$\dot{\underline{v}}_3(s)=\dot{\underline{b}}(s)=-a_{13}\underline{T}-a_{23}\underline{n}$$

وبما أن $\dot{\underline{T}}=k\,\underline{n}$. إذاً من المعادلة الأولى في (4.13) نجد أن $a_{12}=k\ ,\ a_{13}=0$

ومن المعادلة الثالثة في (4.13) نحصل على $\dot{\underline{b}}(s)=-\ a_{23}\underline{n}$ ولكن (من (4.6))
$|\dot{\underline{b}}|^2=\ \tau^2$ إذاً $a_{23}=\pm\ \tau$.

وسنأخذ الإشارة الموجبة إذا كان الثلاثي يكون بريمة يمينية وكان البارامتر على المنحنى في اتجاه تزايد s أي نختار $a_{23}=\tau$ وهذا يؤدي إلى $\dot{\underline{b}}=-\tau\,\underline{n}$

وبذلك نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية:

نظرية (٤-٥):

لمنحنى الفراغ المنتظم $r=r(s)$ يتحقق

$$\dot{\underline{T}}=k\,\underline{n}\ ,\ \dot{\underline{n}}=\tau\underline{b}-k\underline{T}\ \ ,\dot{\underline{b}}=-\tau\underline{n}\ \ ,\ \dot{.}=\frac{d}{ds} \qquad (4.14)$$

وهذه الصيغ تعرف بصيغ سيريه - فرينية التفاضلية لأي منحنى منتظم في الفراغ.
وفيزيائياً تمثل معادلات الحركة لنقطة تتحرك على منحنى فراغ.
المعادلات (4.14) يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix}T\\n\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&k&0\\-k&0&\tau\\0&-\tau&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T\\n\\b\end{bmatrix}$$

باستخدام هذه الصيغ يمكننا إيجاد صيغة للليّ والتي يمكن منها حساب $k\ ,\tau$ بسهولة ولذلك نعتبر الحالات الآتية:

أولاً : إذا كان المنحنى معطى في الصورة $\underline{r}=\underline{r}\ (s)$ (تمثيل طبيعي) فإن

$$\underline{\dot{r}}(s)=\underline{T}\,,\underline{\ddot{r}}(s)=\underline{\dot{T}}=k\,\underline{n}\;,\;k=|\,\ddot{r}(s)\,|$$

$$\underline{\dddot{r}}(s)=k\,\underline{\dot{n}}+\dot{k}\,\underline{n}=k\,(\tau\underline{b}-k\underline{T})+\dot{k}\,\underline{n} \qquad \text{((4.14) من)}$$

$$\therefore\;\underline{\dddot{r}}(s)=-k^{2}\underline{T}+\dot{k}\,\underline{n}+k\,\tau\underline{b}$$

حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $\underline{\ddot{r}},\underline{\dddot{r}}$ يعطى من

$$\underline{\ddot{r}}\times\underline{\dddot{r}}=k^{2}\tau\underline{T}+k^{3}\underline{b}$$

وحاصل الضرب الثلاثي القياسي للمتجهات $\dddot{r}$ ، $\ddot{r}$ ، $\dot{r}$ هو:

$$<\underline{\dot{r}},(\underline{\ddot{r}}\times\underline{\dddot{r}})>=[\underline{\dot{r}},\underline{\ddot{r}},\underline{\dddot{r}}]=k^{2}\tau$$

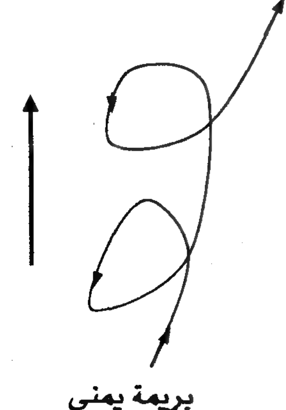
$$\therefore\tau=\frac{1}{k^{2}}[\underline{\dot{r}},\underline{\ddot{r}},\underline{\dddot{r}}],k^{2}=|\,\underline{\ddot{r}}\,|^{2}$$

أو في الصورة

$$k=|\,\ddot{r}\,|\,,\;\tau=\frac{1}{|\,\underline{\ddot{r}}\,|^{2}}[\underline{\dot{r}},\underline{\ddot{r}},\underline{\dddot{r}}] \qquad (4.15)$$

ملاحظة (٤ـ٥):

الثلاثي $\{\underline{T},\underline{n},\underline{b}\}$ بهذا الترتيب يكون بريمة يمينية أي الدوران عكس عقارب الساعة يؤدي إلى الصعود. ومع عقارب الساعة يؤدي إلى الهبوط (بريمية يسارية) كما في شكل (٤ـ٩).



بريمة يمنى

$(\tau>0)$

بريمة يسرى

$(\tau<0)$

شكل (٤ـ٩)

ثانياً: إذا كان المنحنى غير معطى في الصورة الطبيعية أي بدلالة بارامتر طول القوس s كبارامتر ولكن بدلالة أي بارامتر آخر u مثلاً أي $\underline{r}=\underline{r}(u)$ فكيف تكون الصيغ (4.15) بدلالة البارامتر u ؟

للإجابة على هذا السؤال نعلم أن :

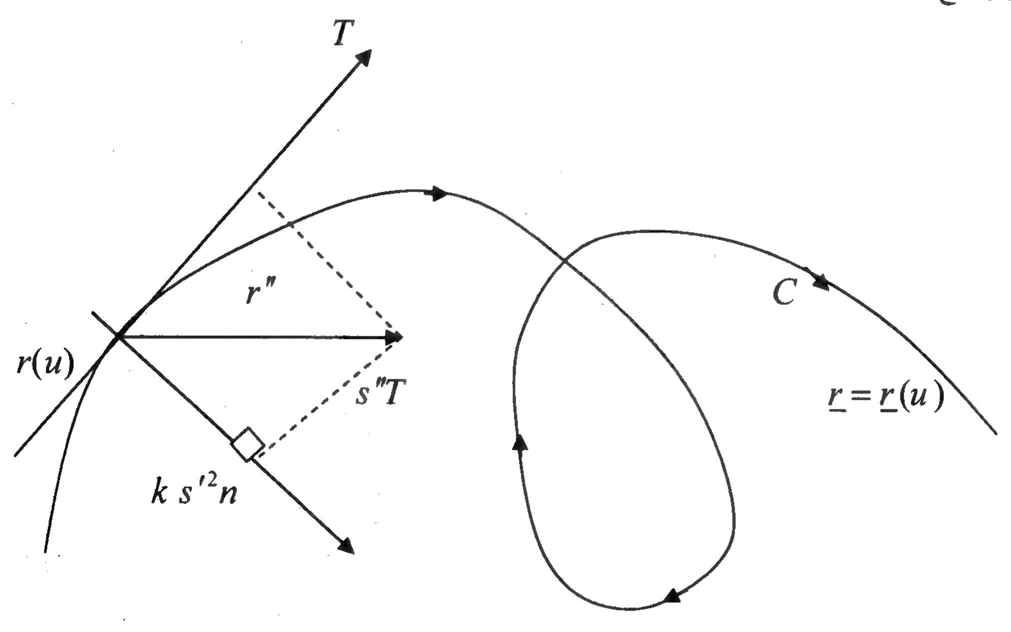
$$\underline{r}'(u)=\frac{d\underline{r}}{du}=\frac{d\underline{r}}{ds}.\frac{ds}{du}=\underline{T}s'\ ,\ '=\frac{d}{du}\ ,\ |r'|=s'\neq 0$$

$$\therefore\ \underline{r}''(u)=\frac{d}{du}(\underline{T}s')=\ \underline{T}s''+\dot{\underline{T}}s'^2$$

ومن (4.14) نحصل على

$$\underline{r}''(u)=\ \underline{T}s''+ks'^2\,\underline{n} \qquad (4.14)'$$

ونوضح ذلك في شكل (٤-١٠).



شكل (٤-١٠)

ملاحظة (٤-٦):

المتجه $r'(u)$ يسمى متجه السرعة velocity بينما قيمته $|r'(u)|$ تسمى السرعة speed وتساوي $v = s' = \frac{ds}{du}$ ومتجه التسارع هو $r''(u)$ acceleration vector.

ملاحظة (٤-٧):

من الصيغة التفاضلية $r''(u) = v'T + kv^2 n$ حيث $v = s' = \frac{ds}{dt}$ هي السرعة يتضح ما يأتي:

المركبة المماسية $s''T = v'T$ لمتجه التسارع $r''(u)$ تقيس معدل تغير السرعة v (قيمة $r'(u)$). بينما المركبة العمودية $kv^2 n$ تقيس معدل تغير اتجاه $r'(u)$. ومن قوانين الحركة لنيوتن نرى أن هذه المركبات تمثل قوى تؤثر على الجسيم المتحرك أثناء حركته.

مثال (٤-٣):

أثناء حركة سيارة على طريق مستقيم فإن القوة الوحيدة التي تؤثر أو يشعر بها السائق أثناء تزايد أو تناقص السرعة هي القوة المماسية $s''T = v'T$.

مثال (٤-٤):

في المثال السابق إذا كان الطريق منحني (بدون جوانب unbounded) والسرعة هي v فإن القوة المؤثرة على جانبي الطريق هي $kv^2 n$.

ملاحظة (٤-٨):

في المثال السابق الانحناء k يقيس مدى تغير اتجاه الطريق وتأثير السرعة هو v^2 .

وبالتفاضل مرة أخرى للعلاقة $(4.14)'$ بالنسبة إلى u يكون لدينا

$$\underline{r}'''(u) = \underline{T}s''' + k\underline{n}s's'' + \dot{k}s'^3\underline{n} + 2ks's''\underline{n} + ks'^3(\tau\underline{b} - k\underline{T})$$

حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $\underline{r}''', \underline{r}''$ يعطى من

$$\underline{r}'' \times \underline{r}''' = 3ks's''\underline{b} - k\tau s'^2 s''\underline{n} - ks'^2(s'' - k^2 s'^3)\underline{b} + k^2\tau s'^5\underline{T}$$

وبالضرب قياسياً في r' نحصل على

$$<\underline{r}',(\underline{r}''\times\underline{r}''')>=k^2\tau s'^6 \qquad (4.16)$$

حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين $\underline{r}',\underline{r}''$ هو

$$\underline{r}'\times\underline{r}''=k\,s'^3\underline{b}$$

$$\therefore\ k^2=\frac{|\underline{r}'\times\underline{r}''|^2}{s'^6} \quad \text{أو} \quad k=\frac{|\underline{r}'\times\underline{r}''|}{s'^3} \qquad (4.17)$$

من (4.16)، (4.17) نحصل على

$$k=\frac{|r'\times r''|}{|r'|^3},\ \ \tau=\frac{[\underline{r}',\underline{r}'',\underline{r}''']}{|\underline{r}'\times\underline{r}''|^2} \qquad (4.18)$$

وهذه هي صيغ الانحناء واللي لأي منحنى في الفراغ معطى بدلالة أي بارامتر عام u.

مثال (٥٤):

أوجد متجه الانحناء $\underline{k}$ والانحناء k للمنحنى التكعيبي

$$\underline{r}=(u,\frac{1}{2}u^2,\frac{1}{3}u^3),u\in\mathbb{R}$$

عند النقطة التي لها البارامتر $u=1$.

الحل:

من معادلة المنحنى نحصل على

$$\underline{r}'(u)=\underline{T}s'=(1,u,u^2)\ \ ,\ '=\frac{d}{du}$$

بأخذ المقياس للطرفين يكون لدينا

$$s'^2=1+u^2+u^4,$$

$$\therefore \frac{ds}{du}\sqrt{1+u^2+u^4}=s'$$

$$\therefore\ \underline{T} = (1+u^2+u^4)^{-\frac{1}{2}}\ (1,u,u^2)$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى u نجد أن

$$\underline{T}' = (1+u^2+u^4)^{-\frac{1}{2}}(0,1,2u) - (1+u^2+u^4)^{-\frac{3}{2}}(u+2u^3)(1,u,u^2)$$

بعد الاختصار وتجميع الحدود نحصل على

$$\underline{T}' = -(1+u^2+u^4)^{-\frac{3}{2}}(u+2u^3, u^4-1, u^3+2u)$$

وبما أن
$$\dot{\underline{T}} = \frac{d\underline{T}}{ds} = \underline{T}'\ \frac{du}{ds} = \frac{\underline{T}'}{s'}$$

إذاً متجه الانحناء $\underline{k}$ يأخذ الصورة

$$\underline{k} = \dot{\underline{T}} = -(1+u^2+u^4)^{-2}(u+2u^3, u^4-1, u^3+2u)$$

عند النقطة $u = 1$ يكون

$$\underline{k} = -\frac{1}{3}(1,0,1), \quad \text{or} \quad \underline{k} = -\frac{1}{3}(\underline{e}_1+\underline{e}_3) \quad , k = |\underline{k}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

مثال (٦٤):

عين الثلاثي $(\underline{T}, \underline{n}, \underline{b})$ عند أي نقطة على المنحنى

$$r(u) = (3u-u^3, 3u^2, 3u+u^3)\ , u \in \mathbb{R}$$

ومن ثم أثبت أن $k = \tau$ عند أي نقطة على المنحنى.

الحل:

من معادلة ا لمنحنى (مثل المثال السابق) نحصل على

$$\underline{T}s' = (3-3u^2, 6u, 3+3u^2)\ ,\ ' = \frac{d}{du}$$

$$\therefore \underline{T}s' = 3(1-u^2, 2u, 1+u^2)$$

$$\therefore s'^2 = 9((1-u^2)^2 + 4u^2 + (1+u^2)^2) = 18(1+u^2)^2$$

$$\therefore \quad \underline{s}' = \frac{ds}{du} = 3\sqrt{2}(1+u^2)$$

ومنها نحصل على متجه التماس على الصورة

$$\underline{T} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+u^2)}(1-u^2, 2u, 1+u^2)$$

بالاشتقاق بالنسبة إلى u للدالة T نحصل على (تفاضل حاصل ضرب دالتين إحداهما قياسية).

$$\underline{T}' = \frac{1}{\sqrt{2}(1+u^2)^2}(-4u, 2(1-u^2), 0)$$

$$\therefore \underline{T}' = \frac{\sqrt{2}}{(1+u^2)^2}(-2u, 1-u^2, 0)$$

ومن تعريف متجه الانحناء نحصل على

$$\underline{k} = \dot{\underline{T}} = \frac{\underline{T}'}{s'} = \frac{1}{3(1+u^2)^3}(-2u, 1-u^2, 0) \;\; ,\dot{} = \frac{d}{ds}$$

إذاً العمود الأساسي يعطى من

$$\underline{n} = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|} = \frac{1}{1+u^2}(-2u, 1-u^2, 0)$$

ومن تعريف العمودي الثانوي b نحصل على

$$\underline{b} = \underline{T} \times \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}\,(1+u^2)^2}\begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 1-u^2 & 2u & 1+u^2 \\ -2u & 1-u^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \; \underline{b} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+u^2)}((u^2-1)\underline{e}_1 - 2u\;\underline{e}_2 + (1+u^2)\underline{e}_3)$$

وبالإشتقاق بالنسبة إلى u نحصل على

$$\underline{b}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(1+u^2)(2u)-(u^2-1)(2u)}{(1+u^2)^2}, \frac{(1+u^2)(-2)-(-2u)(2u)}{(1+u^2)^2}, 0\right)$$

$$\therefore\ \underline{b}' = \frac{1}{\sqrt{2}(1+u^2)^2}(4u, 2(u^2-1), 0)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{(1+u^2)^2}(2u, u^2-1, 0)$$

ومن تعريف $\dot{b}$ نحصل على

$$\dot{\underline{b}} = \frac{\underline{b}'}{s'} = \frac{1}{3(1+u^2)^3}(2u, u^2-1, 0)$$

$$\therefore\ \dot{\underline{b}} = \frac{-1}{3(1+u^2)^3}(-2u, 1-u^2, 0) = \frac{-1}{3(1+u^2)^3}.(1+u^2)n$$

$$\therefore \dot{\underline{b}} = -\frac{1}{3(1+u^2)^2}\underline{n} = -\tau\underline{n}\ ,\ \tau = \frac{1}{3(1+u^2)^2} = k$$

مثال (٧.٤):

بالنسبة لمنحنى الفراغ $\underline{r} = (u^3, 6u, 3u^2)\ , u \in \mathbb{R}$

(i) أوجد الانحناء واللّيّ للمنحنى

(ii) أثبت أن العمودين الجانبين للمنحنى عند النقطتين $(-8,-12,12)$, $(1,6,3)$ متعامدان.

(iii) أوجد معادلة المستوى اللاصق للمنحنى عند النقطة $(-1,-6,3)$

(iv) أثبت أن المماس للمنحنى عند جميع نقطه يصنع زاوية ثابتة مع اتجاه ثابت وأوجد هذا الاتجاه.

الحل:

بما أن $\underline{r} = (u^3, 6u, 3u^2)$

وبالاشتقاق مرتين بالنسبة إلى u نحصل على

$$\underline{r}' = (3u^2, 6, 6u) = \underline{T}s' \qquad (4.19)$$

$$\underline{r}'' = (6u,0,6) = \underline{T}s'' + ks'^2\underline{n} \qquad (4.20)$$

حيث $' = \frac{d}{du}, s$ بارامتر طول القوس.

بضرب (4.20) ,(4.19) اتجاهياً نحصل على:

$$\underline{r}'\wedge\underline{r}'' = (36,18u^2,-36u) = ks'^3\underline{b} \qquad (4.21)$$

بتربيع العلاقة (4.19) نحصل على $(<r',r'>=s'^2)$:

$$s'^2 = 9u^4 + 36 + 36u^2 = (3(u^2+2))^2$$

$$\therefore\ s' = \frac{ds}{du} = \pm 3(u^2+2)$$

فإذا ما اتفقنا على اختيار قياس s في اتجاه تزايد u أي تكون s دالة تزايديه في u فإن $\frac{ds}{du}$ تكون موجبة وبالتالي نختار الإشارة الموجبة أي أن

$$s' = 3(u^2+2) \qquad (4.22)$$

كذلك إذا ما اتفقنا أن يكون العمود الأساس اتجاه الناحية المقعرة من المنحنى فإن k تكون موجبة. ومن (4.21) نجد أن اتجاه $\underline{b}$ يطابق تماماً اتجاه المتجه $\underline{r}'\wedge\underline{r}''$ أي له الاتجاه $(2,u^2,-2u)$. إذاً $\underline{b}$ تكون مساوية لهذا المتجه مقسومة على طوله أي

$$\underline{b} = \frac{(2,u^2,-2u)}{\sqrt{u^4+4u^2+4}} = \frac{1}{u^2+2}(2,u^2,-2u) \qquad (4.23)$$

الانحناء k نحصل عليه أيضاً من (4.21) وذلك بتربيع الطرفين أي أن

$$k^2 s'^6 = (18)^2(u^4+4u^2+4) = (18)^2(u^2+2)^2$$

$$\therefore k^2 = \left(\frac{18(u^2+2)}{s'^3}\right)^2 \qquad (4.24)$$

بأخذ الجذر التربيعي مع ملاحظة أن s',k موجبة وبالتعويض من (4.22) عن s' نحصل على

$$k=\frac{2}{3(u^2+2)^2} \qquad (4.25)$$

لإيجاد الليّ τ نفاضل (4.20) مع التركيز فقط على الحد المشتمل على $\underline{b}$ فنحصل على (باستخدام صيغ فرينيه (4.14))

$$\underline{r}'''=(6,0,0)=(\ldots)\underline{T}+(\ldots)\underline{n}+(ks'^3\tau)\underline{b} \qquad (4.26)$$

بضرب (4.21) في (4.26) قياسياً نحصل على

$$216=k^2s'^6\tau \Rightarrow \tau=\frac{216}{k^2s'^6} \qquad (4.25)'$$

وباستخدام العلاقة (4.24) نجد أن

$$\tau=\frac{2}{3(u^2+2)^2}$$

عند النقطة الأولى (1,6,3) يكون البارامتر $u=1$ وعند النقطة الثانية (-8,-12,12) يكون البارامتر $u=-2$. يمكن حساب $\underline{b}$ عند $u=1$, $u=-2$ من (4.23) كالآتي:

$$(\underline{b})_{u=1}=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}),\ (\underline{b})_{u=-2}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$$

واضح أن $\quad <(\underline{b})_{u=1},(\underline{b})_{u=-2}>=0$

وبالتالي يكون المتجهان $(\underline{b})_{u=-2};(\underline{b})_{u=1}$ متعامدان.

من المعادلة (4.21) نجد أن المتجه $(36,18u^2,-36u)$ يوازي العمود الثاني $\underline{b}$

إذاً المتجه $(2,u^2,-2u)$ يوازي $\underline{b}$ (//). بالتالي فإن المتجه (2,1,2) يوازي $\underline{b}$ عند $u=-1$ وهو عمودي على المستوى اللاصق للمنحنى عند النقطة (-1,-6,3).

إذاً معادلة المستوى اللاصق المطلوب هي

$$2(x+1) + (y+6) + 2(z-3) = 0 \quad \text{or} \quad 2x + y + 2z + 2 = 0$$

من المعادلة (4.19) نجد أن المماس $\underline{T}$ للمنحنى يوازي المتجه الذي مركباته $(u^2, 2, 2u)$ ويعطى بالآتي:

$$\underline{T} = \frac{(u^2,2,2u)}{\sqrt{u^4+4u^2+4}} \quad \text{or} \quad \underline{T} = \frac{(u^2,2,2u)}{u^2+2}$$

لنعتبر المتجه الثابت $\underline{a} = (1,1,0)$ حيث وحدة المتجهات $\underline{e}$ على امتداد a تعطى من:

$$e = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \ \ <\underline{e}, \underline{T}> = \cos\ \theta$$

حيث θ الزاوية بين $\underline{e}, \underline{T}$. واضح أن

$$\cos\theta = <\underline{T}, \underline{e}> = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

أي أن المماس للمنحنى يصنع دائماً زاوية ثابتة $\frac{\pi}{4}$ مع الاتجاه الثابت $\underline{e}$.

ملاحظة (٤-٩):

المنحنى في المثال السابق يحقق $k = \tau$ ويصنع زاوية ثابتة مع اتجاه ثابت a ويسمى منحنى الحلزون.

ملاحظة (٤-١٠):

طريقة حل المثال السابق تعتبر خطوات ثابتة ومحددة يمكنك إتباعها في حل أي تمرين من هذا النوع حيث يمكن عمل برنامج حاسوب مناسب لهذه الطريقة وفي هذه الحالة نقوم بإعطاء معادلة المنحنى البارامترية ونأخذ النتائج كما نريد.

مثال (٤-٨):

أثبت أنه على طول المنحنى المنتظم من نوع C^4 على الأقل وله المعادلة الاتجاهية $\underline{r} = \underline{r}(s)$ يكون

$$[\dot{\underline{r}},\ddot{\underline{r}},\underline{r}^{(4)}]=k^5\frac{d}{ds}(\frac{\tau}{k})$$

حيث s البارامتر الطبيعي (بارامتر طول القوس)، $\frac{d}{ds}=.$

الحل:

من معادلة المنحنى $r=r(s)$ نعلم أن

$$\ddot{\underline{r}}=\dot{\underline{T}}=k\,\underline{n} \qquad (4.27)$$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى s نحصل على

$$\dddot{\underline{r}}=-k^2\underline{T}+\dot{k}\,\underline{n}+\tau k\,\underline{b} \qquad (4.28)$$

$$\therefore\ \ddot{\underline{r}}\wedge\dddot{\underline{r}}=k^2\tau\underline{T}+k^3\underline{b} \qquad (4.29)$$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى s لطرفي (4.29) واستخدام صيغ سرية . فرينيه التفاضلية مع مراعاة قواعد التفاضل لحاصل الضرب الاتجاهي نحصل على

$$\ddot{\underline{r}}\wedge\underline{r}^{(4)}=(\frac{1}{ds}k^3)\underline{b}+k^3\tau\underline{n}-\tau k^3\underline{n}+\frac{d}{ds}(\tau k^2)\underline{T}$$

$$=(\frac{d}{ds}k^3)\underline{b}+\frac{d}{ds}(\tau k^2)\underline{T} \qquad (4.30)$$

بضرب (4.28), (4.30) قياسياً نحصل على

$$<\dddot{\underline{r}},\ddot{\underline{r}}\wedge r^{(4)}>=\tau k\frac{d}{ds}k^3-k^2\frac{d}{ds}\tau k^2$$

$$=3\tau k^3\dot{k}-k^2(\dot{\tau}k^2+2k\tau\dot{k})=\tau k^3\dot{k}-k^4\dot{\tau}$$

$$=k^5.\frac{\tau\dot{k}-k\dot{\tau}}{k^2}$$

$$\therefore\ [\dot{\underline{r}},\ddot{\underline{r}},\underline{r}^{(4)}]=-k^5\frac{d}{ds}(\frac{-\tau}{k})=k^5\frac{d}{ds}(\frac{\tau}{k})$$

وهو المطلوب.

(٤.٤) المنحنى الحلزوني The Helix:

تعريف (٤.٤):

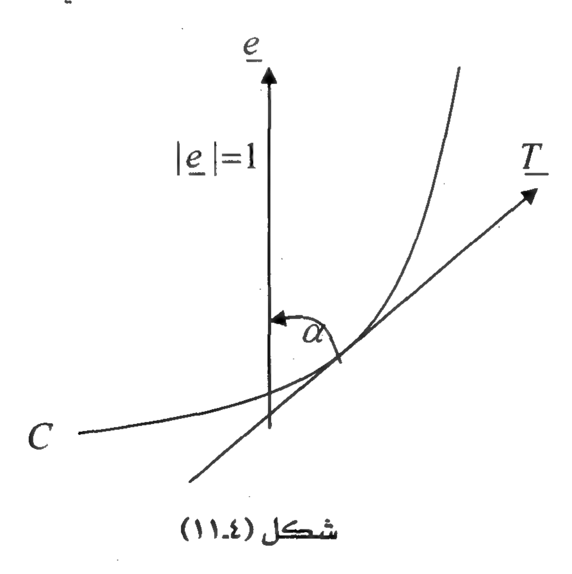
يعرف المنحنى الحلزوني بأنه المنحنى C الذي يصنع المماس $\underline{T}$ له عند أي نقطة عليه زاوية ثابتة مع اتجاه ثابت كما في شكل (١١.٤).

ويمكن أن يعرف أيضاً على أنه المنحنى المرسوم على أسطوانة بحيث يصنع المماس للمنحنى زاوية ثابتة مع رواسم الأسطوانة.

ليكن $\underline{e}$ هو متجه الوحدة في اتجاه المتجه الثابت أي في اتجاه رواسم الأسطوانة مثلاً فإن

$$<\underline{T}(s),\underline{e}>=\cos\alpha = \text{const.} = \text{ثابت} \qquad (4.31)$$

حيث $T(s)$ حقل المماس للمتجه $r=r(s)$ ، s بارامتر طبيعي، α زاوية الحلزون.



شكل (١١.٤)

بتفاضل العلاقة (4.31) بالنسبة إلى s واستخدام صيغة فرينيه نحصل على

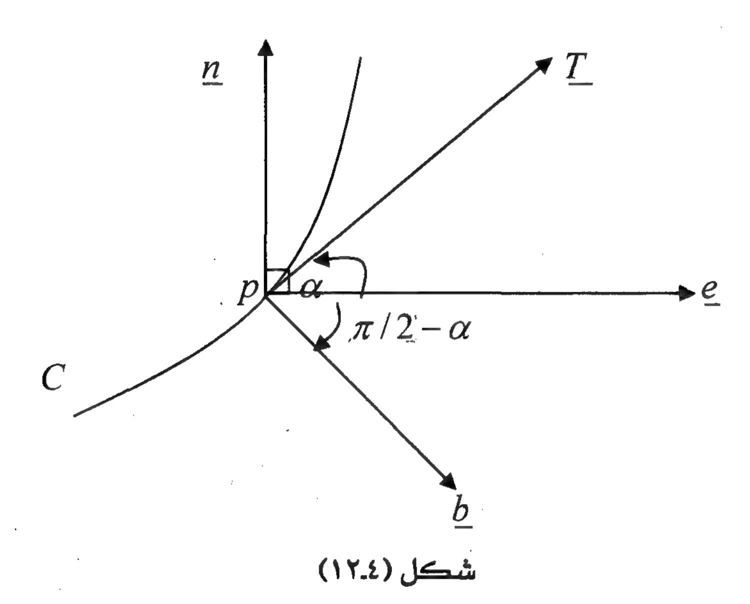
$$<k\,\underline{n},\underline{e}>=0$$

وبغض النظر عن الحالة التي يكون فيها المنحنى الحلزوني هو أحد رواسم الأسطوانة

أي مع استبعاد الحالة التي فيها $k = 0$ $(k \neq 0)$ ، أي أن المنحنى ليست خط مستقيم أو يتكون من نقاط مستقيمة أو نقاط انقلاب

$$\therefore <\underline{n},\underline{e}>=0 \qquad (4.32)$$

وهذا يعني أن العمود الأساسي للمنحنى الحلزوني يكون عمودياً على رواسم الأسطوانة (الاتجاه الثابت) المرسوم عليها هذا المنحنى كما في شكل (١٢.٤).



شكل (١٢.٤)

بتفاضل العلاقة (4.32) بالنسبة إلى s واستخدام صيغ فرينيه نحصل على

$$<(\tau\underline{b}-k\underline{T}),\underline{e}>=0\,,$$

$$\therefore <\tau\underline{b},\underline{e}>-<k\underline{T},\underline{e}>=0$$ (من خواص الضرب القياسي)

ولكن $\underline{e}\perp\underline{n}$ أي أن المتجه $\underline{e}$ يقع في المستوى المقوم للمنحنى أي المستوى الذي يحتوي على $\underline{b},\underline{T}$ وحيث أن المتجه e يصنع زاوية ثابتة α مع $\underline{T}$ وكذلك يصنع زاوية ثابتة مقدارها $(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ مع $\underline{b}$ فإننا نحصل على

$$<\underline{T},\underline{e}>=\cos\alpha\ ,<\underline{b},\underline{e}>=\sin\alpha \qquad (4.33)$$

أي أن (باستخدام المساقط على الاتجاهات $\underline{b}$, $\underline{T}$)

$$\underline{e} = \underline{T}\cos\alpha + \underline{b}\sin\alpha \qquad (4.34)$$

بتفاضل هذه العلاقة بالنسبة إلى s واستخدام صيغ فرينيه نجد أن:

$$\underline{0} = k\,\underline{n}\cos\alpha - \tau\underline{n}\sin\alpha = (k\cos\alpha - \tau\sin\alpha)\underline{n}$$

$$\therefore\ k\cos\alpha - \tau\sin\alpha = 0 \quad \text{or} \quad \frac{k}{\tau} = \tan\alpha = \text{const.}$$

والعكس إذا كان لأي منحنى $\frac{k}{\tau} = c$ ثابت مثلاً فإن المنحنى لابد أن يكون منحنى حلزوني ولإثبات ذلك نعتبر الآتي:

$$\frac{d}{ds}(\underline{T} + c\,\underline{b}) = \dot{\underline{T}} + c\dot{\underline{b}}$$

$$= k\,\underline{n} - c\,\tau\,\underline{n} = 0\,,\ \frac{k}{\tau} = c$$

إذاً $\underline{T} + c\,\underline{b}$ متجه ثابت الاتجاه و $\frac{\underline{T} + c\,\underline{b}}{\sqrt{1+c^2}}$ هو متجه الوحدة في هذا الاتجاه الثابت.

بوضع $\underline{e} = \frac{\underline{T} + c\underline{b}}{\sqrt{1+c^2}}$ يكون لدينا العلاقات الآتية:

$$<\underline{e}, \underline{T}> = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\,,\ <\underline{e}, \underline{b}> = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$$

$\therefore$ $\underline{T}$ يصنع زاوية ثابتة α مع الاتجاه $\underline{e}$ حيث

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\ ,\ \tan\alpha = c = \text{const.}$$

وبالتالي نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية:

نظرية (٤.٦):

الشرط الضروري والكافي كي يكون منحنى الفراغ $C : r = r(s)$ منحنى حلزوني هو أن يتحقق $\frac{k}{\tau} = c$ حيث k , τ هما الانحناء واللّيّ للمنحنى.

ملاحظة (٤.١١):

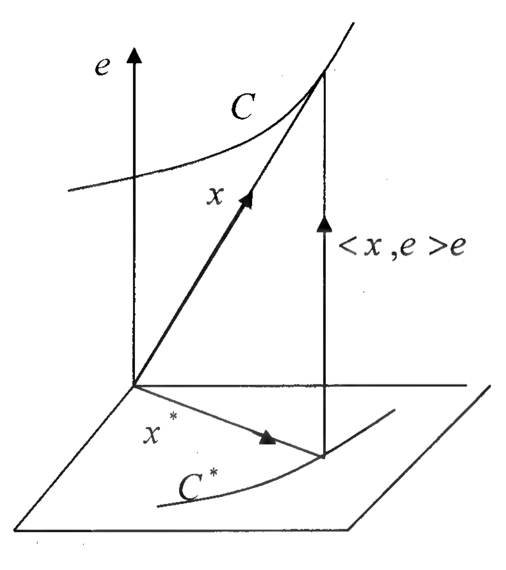
يمكن إيجاد تعريف آخر للمنحنى الحلزوني بأنه المنحنى الذي يتميز بأن النسبة بين الانحناء واللّيّ له تكون ثابتة.

تعريف (٤.٥):

مسقط المنحنى الحلزوني العام C على مستوى عمودي عليه هو منحنى C^* يعطى من

$$C^* : x^* = x(s) - < x , e > e$$

حيث e متجه الوحدة في اتجاه محور الحلزون ويتحقق $< e , T > = \cos\alpha$ كما هو مبين في شكل (٤.١٣).

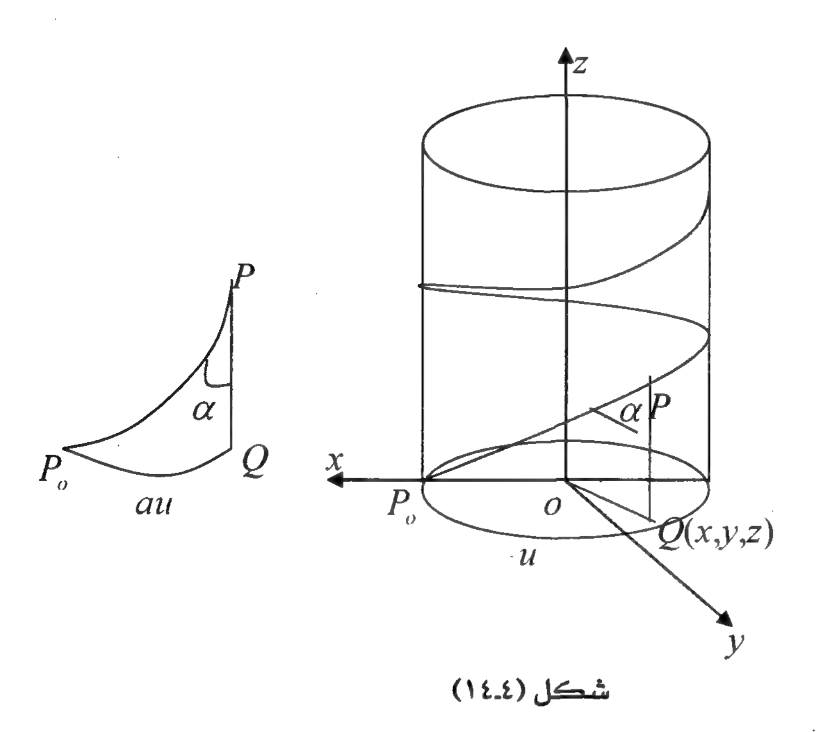


شكل (٤.١٣)

تعريف (٦٤):

الحلــزون الــدائري هــو المنحنــى المرسـوم علـى سـطح أسـطوانة دائريـة قائمـة $x^2 + y^2 = a^2$ ويكون محور الأسطوانة هو محور الحلزون الدائري (الاتجاه الثابت) حيث محور z هو محور الأسطوانة (يوازي رواسم الأسطوانة).

معادلات الحلزون الدائري يمكن استنتاجها من هندسة الشكل (١٤.٤).



شكل (١٤.٤)

حيث في المثلث P_oPQ نجد $\frac{QP}{P_oQ} = \cot\alpha$ ، $\widehat{P_oQ}$ قوس من دائرة نصف قطرها a

$$\therefore\ QP = z\ , P_oQ = au \qquad \text{(طول قوس من قطاع دائري)}$$

$$\therefore\ z = au\cot\alpha$$

حيث $P(x, y, z) \in C$ على الأسطوانة

واضح أن P_oQ قوس من الدائرة ويصنع زاوية مركزية قياسها البارامتر u وبالتالي نجد أن:

$$x = a\cos u\,,\ y = a\sin u,\ z = au\cot\alpha \qquad (4.35)$$

وعليه فإن الدالة الاتجاهية التي تعرف منحنى الحلزون الدائري تعطى من

$$\underline{r} = (a\cos u, a\sin u, au\cot\alpha) \qquad (4.36)$$

ملاحظة (٤-١٢):

يسمى الجزء على المنحنى المناظر لتغير في البارامتر u مقداره 2π بالخطوة the pitch على المنحنى الحلزوني حيث $Q = P_{xy}P$ هي مسقط النقطة P على المستوى xy وتقع على الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ قاعدة الأسطوانة.

سندرس الآن الهندسة الذاتية لهذا النوع من المنحنيات في الفراغ حيث التمثيل البارامتري (4.36) يعرف الدالة الاتجاهية التي تصف المنحنى الحلزوني

$$\therefore \dot{\underline{r}} = \frac{d\underline{r}}{ds} = \underline{T} = (-a\sin u, a\cos u, a\cot\alpha)\frac{du}{ds} = \frac{dr}{du}.\frac{du}{ds}$$

$$\therefore |\underline{T}|^2 = 1 = (a^2 + a^2\cot^2\alpha)\dot{u}^2 = a^2\operatorname{cosec}^2\alpha\ \dot{u}^2,$$

$$\therefore \dot{u} = \frac{\sin\alpha}{a} \neq 0,\ (\alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z})$$

$$\therefore\ \dot{\underline{r}} = (-\sin u \sin\alpha, \cos u \sin\alpha, \cos\alpha)$$

وبالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى s واستخدام صيغ فرينيه نحصل على:

$$\ddot{\underline{r}} = \dot{\underline{T}} = k\,\underline{n} = (-\cos u \sin\alpha, -\sin u \sin\alpha, 0)\dot{u}$$

$$k\,\underline{n} = (-\frac{1}{a}\cos u \sin^2\alpha, -\frac{1}{a}\sin u \sin^2\alpha, 0) \qquad (4.37)$$

بأخذ مربع المقياس للطرفين نجد أن

$$k^2=\frac{\sin^4\alpha}{a^2} \quad \text{or} \quad k=\frac{\sin^2\alpha}{a}= \text{ const.} \qquad (4.38)$$

بالتعويض في (4.37) يكون لدينا

$$\underline{n}=(-\cos u,-\sin u,0)$$

إذاً العمود الثانوي $\underline{b}=\underline{T}\wedge\underline{n}$ يمكن الحصول عليه على الصورة:

$$\underline{b}=(\sin u\cos\alpha,-\cos u\cos\alpha,\sin\alpha)$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى s واستخدام صيغ فرينيه نحصل على

$$\dot{\underline{b}}=-\tau\underline{n}=\frac{1}{a}\sin\alpha\cos\alpha(\cos u,\sin u,0)$$

$$\therefore\ -\tau\underline{n}=-\frac{1}{a}\sin\alpha\cos\alpha\underline{n}$$

وبذلك يكون الليّ لمنحنى الحلزون الدائري على الصورة

$$\tau=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{a}=\text{const.} \qquad (4.39)$$

ومن (4.38)، (4.39) نحصل على $\frac{k}{\tau}=\tan\alpha=\text{ const.}$

وعموماً أي منحنى في الفراغ معطى على الصورة:

$$\underline{r}=(a\cos u,a\sin u,bu),b=a\cot\alpha$$

هو متجه حلزون دائري حيث a,b ثوابت $a>0,b\neq0$.

وبذلك نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية:

نظرية (٤-٧):

بالنسبة لمنحنى الحلزون الدائري يكون كل من الانحناء والليّ ثابت.

ملاحظة (١٣.٤):

إذا كان كل من الانحناء واللي ثابت لجميع نقاط منحنى فراغ فإن المنحنى هو حلزون دائري.

مثال (٩.٤):

بين أن حقل الإطار الثلاثي $(\underline{T},\underline{n},\underline{b})$ على امتداد المنحنى الحلزوني الدائري يعطى من:

$$\left.\begin{aligned} \underline{T} &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin u, a\cos u, b) \\ \underline{n} &= -(\cos u, \sin u, 0) \\ \underline{b} &= \underline{T}\times\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin u, -b\cos u, a) \end{aligned}\right\} \qquad (4.40)$$

الحل:

استخدم نتائج النظرية السابقة حيث $b = a\cot\alpha$ والحسابات التي اتبعناها في المثال (٨.٤) نصل إلى العلاقات (4.40).

مثال (١٠.٤):

وضح برسم توضيحي اتجاهات متجه الانحناء ومتجه الوحدة في اتجاه متجه الانحناء ومتجه العمود الأساسي للمنحنى التكعيبي

$$x = t\,e_1 + \frac{1}{3}t^3 e_2$$

الحل:

اتجاه المماس T للمنحنى التكعيبي يعطى من

$$x' = \frac{dx}{dt} = e_1 + t^2 e_2$$

$$\therefore T = \frac{x'}{|x'|} = (1+t^4)^{-\frac{1}{2}}(e_1 + t^2 e_2)$$

ومتجه الانحناء $\underline{k}$ يعطى من

$$\underline{k} = \dot{T} = \frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

$$= T' / \left| \frac{dx}{dt} \right| = -2t\,(1+t^4)^{-2}\,(t^2 e_1 - e_2)$$

واضح أن عند $t = 0$ توجد نقطة انقلاب ومتجه الوحدة $\underline{u}_k$ في اتجاه متجه الانحناء $\underline{k}$ يعطى من

$$\underline{u}_k = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|} = \frac{-t}{|t|\,(1+t^4)^{\frac{1}{2}}}\,(t^2 e_1 - e_2)$$

حيث دالة الانحناء تعطى من

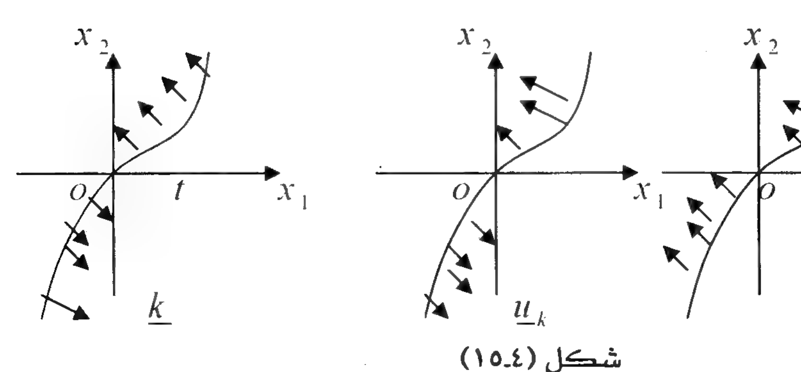
$$k = |\underline{k}| = 2|t|\,(1+t^4)^{-\frac{5}{2}}$$

$$= \begin{cases} 2t\,(1+t^4)^{-\frac{5}{2}} & , t > 0 \\ 0 & , t = 0 \\ -2t\,(1+t^4)^{-\frac{5}{2}} & , t < 0 \end{cases}$$

وبالتالي $\underline{u}_k$ يكون اتجاهه لقيم $t > 0$ عكس اتجاهه لقيم $t < 0$ حيث

$$\lim_{t \to 0^-} \underline{u}_k = e_2 \ , \ \lim_{t \to 0} \underline{u}_k = -e_2$$

كما هو مبين في الشكل (١٥.٤)



شكل (١٥.٤)

تمارين (٤)

(١) أثبت أن الانحناء k للمنحنى $r(u)=(u,\frac{u^2}{2},\frac{u^3}{3})$

عند النقطة التي لها البارامتر $u=1$ يحقق $2\sqrt{3}\,k=2$.

(٢) بالنسبة لمنحنى الفراغ $C : r = r(s)$ بين أنه يوجد حقل متجه $\underline{d}$ على امتداد المنحنى يحقق

$$\frac{dT}{ds}=\underline{d}\wedge\underline{T}\ ,\ \frac{dn}{ds}=\underline{d}\wedge\underline{n},\frac{db}{ds}=\underline{d}\wedge\underline{b}$$

(**إرشاد:** ضع $\underline{d}=f\,T+g\,n+h\,b$ حيث f, g, h دوال في s أي دوال معرفة على امتداد المنحنى واستخدام صيغ فرينيه ومقارنة طرفي العلاقات المعطاة نصل إلى المطلوب. المتجه $\underline{d}$ يسمى متجه داربوا Darboux ويعطى من $\underline{d}=\tau b+k\,b$)

(٣) عين إنحناء المنحنى

$$r(u)=(a(u-\sin u),a(1-\cos u),bu),\qquad (a, b \text{ ثوابت})$$

وبين أن الليّ τ_o عند $u=0$ والليّ $\tau_{\pi/2}$ عند $u=\frac{\pi}{2}$ يحقق

$$\tau_o\,\tau_{\pi/2}=\frac{1}{a^2+b^2}$$

(**إرشاد:** اتبع نفس خطوات أي مثال في هذا الباب).

(٤) أثبت أن المنحنى $r(u)=(u,1+\frac{1}{u},\frac{1}{u}-u),u\neq 0$ يقع بأكمله في المستوى.

(**إرشاد:** أثبت أن الليّ منعدم لجميع قيم u).

(٥) أوجد الانحناء والليّ للمنحنى

$$r(u)=(a\cos u,a\sin u,a\cos 2u)\ ,\quad a \text{ ثابت}$$

(٦) لأي منحنى فراغ منتظم $C : r = r(s)$ من طبقة C^3 وممثل بدلالة بارامتر طول القوس s أثبت أن :

$$\text{(i)} \quad <\dot{r},\dddot{r}>=-k^2 \qquad \text{(ii)} \quad <\ddot{r},\dddot{r}>=k\dot{k}$$

$$\text{(iii)} \quad \dddot{r}=-k^2T+\dot{k}n+k\tau b \quad \text{(iv)} \quad <\ddot{T},\dot{b}>=-\dot{k}\tau \;,\; .=\frac{d}{ds}$$

حيث k, τ هما حقول اللّيّ والانحناء للمنحنى C.

(**إرشاد**: بالتفاضل بالنسبة إلى s واستخدام صيغ فرينيه التفاضلية).

(٧) احسب قيمة حاصل الضرب الثلاثي القياسي $[\dot{b},\ddot{b},\dddot{b}]$, $[\dot{T},\ddot{T},\dddot{T}]$

حيث T ,b هما حقول متجهات المماس والعمود الثانوي على امتداد منحنى فراغ منتظم $C : r = r(s)$

(٨) أثبت أن متجه الموضع لأي نقطة على المنحنى المنتظم $C : r = r(s)$ من طبقة C^4 حيث s بارامتر طول القوس يحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{d}{ds}(\sigma(\frac{d}{ds}\rho\frac{d^2r}{ds^2}))+\frac{d}{ds}(\frac{\sigma}{\rho}\frac{dr}{ds})+\frac{\rho}{\sigma}\frac{d^2r}{ds^2}=0$$

حيث ρ ، σ هما أنصاف أقطار الانحناء واللّيّ عند أي نقطة على المنحنى.

(٩) أثبت أن الشرط الضروري والكافي كي يكون المنحنى $C : r = r(s)$ حلزون هو

$$[\frac{d^2r}{ds^2},\frac{d^3r}{ds^3},\frac{d^4r}{ds^4}]=0 \,, \quad (s \text{ بارامتر طول القوس})$$

(**إرشاد**: استخدم تعريف الحلزون ومثال (٤ـ٨)).

(١٠) أثبت أن الخواص الآتية متكافئة بالنسبة لمنحنى فراغ منتظم:

(i) المماسات للمنحنى تكون زاوية ثابتة مع اتجاه ثابت.

(ii) الأعمدة الثانوية (الجانبية) تكون زاوية ثابتة مع اتجاه ثابت.

(iii) الأعمدة الأساسية للمنحنى توازي مستوى ما.

(iv) النسبة بين الانحناء والليّ للمنحنى تساوي مقدار ثابت.

(**إرشاد:** الخواص السابقة هي خواص الحلزون العام التي تم استنتاجها في هذا الباب).

(١١) إذا كانت الزوايا التي يصنعها المماس والعمود الثانوي لمنحنى منتظم $C:r=r(s)$ في الفراغ مع اتجاه ثابت e هي θ ، ϕ على الترتيب فأثبت أن

$$\frac{d\phi}{d\theta}+\frac{\tau}{k}\frac{\sin\theta}{\sin\phi}=0$$

حيث τ,k هي الانحناء والليّ على الترتيب.

(**إرشاد:** $<e,T>=\cos\theta$ ، $<e,b>=\cos\phi$ وبالتفاضل واستخدام صيغ فرينيه حيث θ,ϕ دوال في بارامتر طول القوس s نصل إلى المطلوب).

(١٢) أثبت أن المماسات للمنحنى التكعيبي

$$r(u)=(2u^3,3u^2,6u)$$

تصنع زاوية ثابتة مع اتجاه ثابت وأن المحل الهندسي للنقط التي يقطع فيها المماس المستوى $x=0$ هو قطع مخروطي.

(**إرشاد:** معادلة المماس هي $R=r(u)+\lambda t$ ، ضع المركبة الأولى تساوي صفر وأوجد قيمة λ المناظرة).

(١٣) أثبت أنه إذا كانت المماسات لمنحنى منتظم توازي مستوى معلوم فإن المنحنى يقع في المستوى.

(**إرشاد:** ضع $<T(s),e>=0$ حيث e اتجاه العمودي على المستوى وهو اتجاه ثابت وبالتفاضل نحصل على $<n,e>=0$ وبالتالي فإن $e=b$ أي أن b ثابت وبالتالي فإن الليّ τ ينعدم).

(١٤) أثبت أن اللّيّ τ والانحناء k للمنحنى

$$r(u)=(a\int \sin f(u)du, a\int \cos f(u)du, bu)$$

يحقق العلاقة $k=c\tau$ حيث a, b, c ثوابت، $f(u)$ دالة منتظمة من طبقة C^3.

(**إرشاد:** المشتقة الأولى $r'(u)=(a\sin f(u), a\cos f(u), b)$ وأكمل مثل أي مثال في هذا الباب مع ملاحظة تفاضل دالة الدالة).

(١٥) أوجد اللّيّ للمنحنى

$$r(u)=a\int R(u)\wedge R'(u)du \;,'=\frac{d}{du}$$

حيث $R(u)$ دالة اتجاهية تحقق $|R(u)|=1, R'(u)\neq 0,$ $a,$ مقدار ثابت

(**إرشاد:** المشتقة الأولى $r'=aR\wedge R'$ ، المشتقة الثانية $r''=aR\wedge R''$ ، المشتقة الثالثة $r'''=aR'\wedge R''+aR\wedge R'''$ واستخدام العلاقات التي تعطي الانحناء واللّيّ ومتطابقات الضرب الاتجاهي لأربع متجهات).

(١٦) أخذت نقطة Q على العمود الأساسي لمنحنى منتظم C في الفراغ له اللّيّ ثابت ويساوي τ بحيث النقطة Q تبعد مسافة ثابتة مقدارها λ عن المنحنى أوجد الزاوية بين العمود الثانوي $\tilde{b}$ للمنحنى $\tilde{C}$ المرسوم بالنقطة Q والعمودي الثانوي b.

(**إرشاد:** المنحنى $\tilde{C}$ المرسوم بالنقطة Q له التمثيل البارامتري $\tilde{r}=r(s)+\lambda n(s)$ حيث s بارامتر عام بالنسبة للمنحنى $\tilde{C}$ ولكنه بارامتر طبيعي بالنسبة للمنحنى C وبالاشتقاق وتعيين $\tilde{b}$ نصل إلى المطلوب).

(١٧) أخذت نقطة Q على المماس لمنحنى منتظم $C: r=r(s)$ بحيث تبعد مسافة ثابتة μ عن المنحنى C . أوجد الانحناء واللّيّ للمحل الهندسي $\hat{C}$ الذي ترسمه النقطة Q عندما يتحرك المماس على امتداد نقاط المنحنى C.

(**إرشاد:** المحل الهندسي للنقطة Q هو $\hat{r}=r(s)+\mu T(s)$ حيث s بارامتر عام بالنسبة للمنحنى $\hat{C}$ ولكنه بارامتر طبيعي للمنحنى C).

(١٨) في التمرين السابق إذا كان ρ هو نصف قطر أنحناء المنحنى C عند نقطة p (نقطة التماس) وأن s هو بارامتر طول قوس المنحنى C مقاساً من نقطة ثابتة حتى النقطة p فإن نصف قطر إنحناء المحل الهندسي $\hat{C}$ عند النقطة Q هو $\hat{\rho}$ ويعطى من $\hat{\rho}=\dfrac{(\rho^2+\mu)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+\mu^2+\mu\dot{\rho}}$ حيث $\dot{}=\dfrac{d}{ds}$.

(١٩) أثبت أن دالة الانحناء k والليّ τ لمنحنى ڤيفياني يعطى من

$$k(u)=\frac{\sqrt{13+3\cos u}}{a(3+\cos u)^{\frac{3}{2}}} \quad , \; \tau(u)=\frac{6\cos\frac{u}{2}}{a(13+3\cos u)}$$

(**إرشاد:** التمثيل البارامتري لهذا المنحنى موجود في مثال (٣ـ٧) في الباب الثالث).

(٢٠) عبر عن حقل متجه داربوا $\underline{d}$ من خلال إطار فرينيه وبين أنه يقع في المستوى المقوم.
(**إرشاد:** انظر تمرين (٢) واكتب $\underline{d}$ كتركيبة خطية من $\underline{T}$، $\underline{n}$، $\underline{b}$).

(٢١) أوجد الانحناء k^* لمسقط الحلزون العام على مستوى عمودي على محوره.
(**إرشاد:** انظر تعريف (٤ـ٥) حيث $\dfrac{dx^*}{ds}=T-<T,e>e$ أي أن $\dfrac{dx^*}{ds}=T-e\cos\phi$ ومنها $|\dfrac{dx^*}{ds}|=\dfrac{ds^*}{ds}=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$ حيث s^* بارامتر طول قوس المسقط وأكمل باقي الحسابات).

(٢٢) أثبت أن الانحناء k^* لمسقط الحلزون العام على مستوى عمودي عليه يعطى من

$$|k^*|=|k|\sin^2\alpha \, , \; \alpha\neq 0$$

حيث α زاوية الحلزون).

(**إرشاد:** نفس التمرين السابق مع اختلاف الصياغة).

الباب الخامس

المنحنيات المصاحبة لمنحنى فراغ

Associated Curves of a Space Curve

هذا الباب يتناول دراسة المنحنيات المرتبطة بحركة الإطار المتحرك لمنحنى فراغ معلوم (منتظم). وبالتفصيل فإننا نقوم بدراسة المميز الكروي أو الصورة الكروية ومنحنى المحل الهندسي لمراكز كل من دائرة وكرة الانحناء والمنحنى الناشر والمنتشر ومنحنيات برتراند.

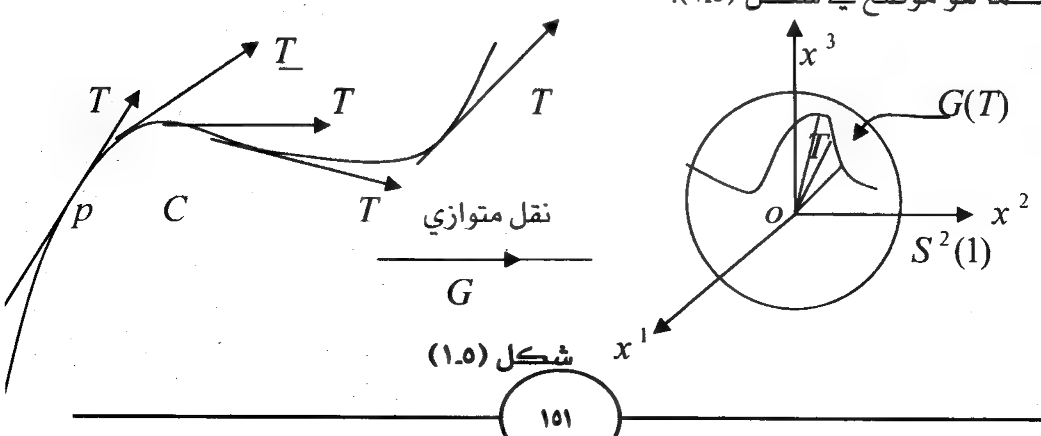
(١.٥) المميز الكروي Spherical Indicatrix:

تعريف (١.٥):

نفرض أن لدينا منحنى منتظم $C : r = r(s)$ وT وحدة متجه التماس للمنحنى عند أي نقطة عليه. فإذا استخدمنا النقل المتوازي G للمماس بحيث نقطة التماس للمنحنى تنقل إلى مركز كرة الوحدة $S^2(1)$. المنحنى $G(T)$ والمرسوم برؤوس المماسات T يقع على كرة الوحدة ويسمى راسم جاوس أو الصورة الكروية أو المميز الكروي للمماس T للمنحنى C حيث

$$G(T):r_1(s)=T(s) \qquad (5.1)$$

كما هو موضح في شكل (١.٥).



شكل (١.٥)

تعريف (٢.٥):

إذا رسمنا عند نقطة الأصل وحدة المتجهات n (العمود الأول) في اتجاه العمود الأساسي للمنحنى $C : r = r(s)$ فإن رأس هذا المنحنى ترسم منحنى يقع على سطح كرة الوحدة $S^2(1)$ (مركزها نقطة الأصل) وهذا المنحنى يسمى الصورة الكروية للعمود الأساسي الأول ويرمز له بالرمز $G(n)$ حيث

$$G(n):r_2(s)=n(s) \qquad (5.2)$$

تعريف (٣.٥):

بالنقل المتوازي (كما في تعريف (١.٥)، (٥-٢)) للعمود الثانوي $b(s)$ إلى نقطة أصل الإحداثيات فإننا نحصل على $G(b)$ المميز الكروي للعمود الثانوي حيث

$$G(b):r_3(s)=b(s) \qquad (5.3).$$

ملاحظة (١.٥):

الصور الكروية $G(T)$، $G(n)$، $G(b)$ أخذت أسمها من كونها ممثلة بدوال اتجاهية أطوالها الوحدة، وبالتالي فهي تمثل منحنيات نقاطها لها متجهات موضع أطوالها الوحدة وتقع على سطح كرة الوحدة $S^2(1)$ (مركزها نقطة أصل الإحداثيات ونصف قطرها الوحدة).

ملاحظة (٢.٥):

الدوال الإتجاهية (5.1)، (5.2)، (5.3) تمثل منحنيات الصور الكروية حيث s بارامتر طول قوس المنحنى الأصلي ولكن s يعتبر بارامتر عام على هذه المنحنيات. ولذلك نفرض أن $s_1(s)$، $s_2(s)$، $s_3(s)$ هي بارامترات طول القوس على الصور الكروية $G(T)$، $G(n)$، $G(b)$ على الترتيب وكل منها دوال منتظمة في s.

مثال (١.٥):

أوجد الانحناء k_1 للمميز الكروي للمماس للمنحنى المنتظم $C : r = r(s)$ حيث s بارامتر طول قوس المنحنى C.

الحل:

المعادلة الاتجاهية للمميز الكروي للمماس $G(T)$ هي

$$r_1 = T(s) \qquad (5.4)$$

نفرض أن s_1 هو بارامتر طول قوس المنحنى $G(T)$. وبأخذ البارامتر s_1 كبارامتر طبيعي على المنحنى $G(T)$ فإن s يكون بارامتر عام للمنحنى $G(T)$. إذاً بالتفاضل بالنسبة إلى s نحصل على

$$T_1 \frac{ds_1}{ds} = \dot{T}(s), \, . = \frac{d}{ds}, T_1 = \frac{dr_1}{ds_1} \qquad (5.5)$$

وباستخدام صيغ فرينيه بالنسبة للمنحنى C نحصل على

$$T_1 \frac{ds_1}{ds} = kn \qquad (5.6)$$

بالضرب قياسياً لهذه المعادلة في نفسها أو بالتربيع نحصل على $(\frac{ds_1}{ds})^2 = k^2 \neq 0$

$$\therefore \quad \frac{ds_1}{ds} = k \qquad (5.7)$$

أخذنا الإشارة الموجبة حيث s_1 دالة تزايدية في s لأن $k > 0$ للمنحنى C.

وبالتعويض في (5.6) نحصل على

$$T_1 = n \qquad (5.8)$$

أي أن المماس للمميز الكروي $G(T)$ يوازي العمود الأساسي للمنحنى C.

وبتفاضل العلاقة (5.8) بالنسبة إلى s نحصل على

$$\frac{dT_1}{ds_1} \frac{ds_1}{ds} = \dot{n}$$

وباستخدام صيغ فرينيه بالنسبة للمنحنى C والمنحنى $G(T)$ نحصل على

$$k_1 n_1 \frac{ds_1}{ds} = \tau b - kT \qquad (5.9)$$

وبالتربيع نحصل على

$$k_1^2 \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = k^2 + \tau^2 \qquad (5.10)$$

وباستخدام (5.7) نحصل على

$$k_1^2 k^2 = k^2 + \tau^2 \quad \text{or} \quad k_1 = \frac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{k}$$

$$\therefore\ k_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{k}\right)^2} \qquad (5.11)$$

وبالتعويض في (5.9) نحصل على

$$n_1 = \frac{\tau b - kT}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} \qquad (5.12)$$

أي أن العمود الأساسي n_1 للمميز الكروي $G(T)$ يقع في المستوى المولد بالمتجهات T, b (المستوى المقوم للمنحنى C).

وباستخدام (5.8)، (5.12) نحصل على

$$b_1 = T_1 \wedge n_1 = n \times \frac{(\tau b - kT)}{\sqrt{\tau^2 + k^2}}$$

$$\therefore\ b_1 = \frac{\tau T + kb}{\sqrt{\tau^2 + k^2}}\ . \qquad (5.13)$$

أي أن العمود الثانوي b_1 للمميز $G(T)$ يقع أيضاً في المستوى المقوم للمنحنى C.

مثال (٥.٢):

بين أن المستوى المقوم للمنحنى C يوازي المستوى العمودي للمميز الكروي $G(T)$ للمنحنى C عند أي نقطة عليه.

الحل:

المستوى المقوم للمنحنى C يحتوي على المتجهات T، b وبالتالي فإن العمودي عليه هو حقل المتجه n. المستوى العمودي للمنحنى $G(T)$ يحتوي على المتجهات n_1، b_1 وبالتالي العمودي عليه هو $n_1 \times b_1 = T_1$. ومن العلاقة (5.8) نجد أن $T_1 = n$ أي أن العمودي على كل من المستوى المقوم للمنحنى C والمستوى العمودي للمميز $G(T)$ يوازي العمود الأساسي الأول n وبالتالي فإن المستوى المقوم للمنحنى C والمستوى العمودي للمميز الكروي متوازيان (لهما نفس العمودي).

مثال (٥.٣):

أوجد العلاقة بين إطاري فرينيه على كل من المنحنى C ومنحنى المميز الكروي $G(T)$ من خلال التحويلات الخطية.

الحل:

العلاقات (5.8)، (5.12)، (5.13) يمكن كتابتها في شكل مصفوفي كالآتي:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ n_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k\,\xi & 0 & \tau\xi \\ \tau\xi & 0 & k\,\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix} \;,\; \xi = \frac{1}{\sqrt{\tau^2 + k^2}} \qquad (5.14)$$

واضح أن مصفوفة هذا التحويل محددها يساوي الوحدة وبالتالي فإن المصفوفة مصفوفة عمودية أي أن العلاقة بين الإطارات المتحركة على كل من C، $G(T)$ تعطى من خلال تحويل خطي عمودي (5.14) (ارجع إلى التحويلات الخطية في الجبر الخطي).

مثال (٥.٤):

أوجد اللّيّ للمميز الكروي $G(T)$ للمماس لمنحنى منتظم $C : r = r(s)$ عند أي نقطة عليه.

الحل:

من العلاقة (5.13) وبالتفاضل بالنسبة إلى s للدالة الاتجاهية $b_1 = b_1(s)$ نحصل على (**صيغ فرينيه بالنسبة للمنحنى $G(T)$**)

$$-\tau_1 n_1 \frac{ds_1}{ds} = \frac{(k\dot{\tau} - \dot{k}\tau)(kT - \tau b)}{(\tau^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{k\dot{\tau} - \dot{k}\tau}{\tau^2 + k^2} \cdot \frac{kT - \tau b}{\sqrt{k^2 + \tau^2}}$$

$$\therefore\ \tau_1 n_1 k = \frac{\tau b - kT}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} \frac{d}{ds} \tan^{-1}(\frac{\tau}{k})$$

$$= n_1 \frac{d}{ds} \tan^{-1}(\frac{\tau}{k}) \qquad \text{(من (5.12))}$$

$$\therefore\ \tau_1 = \frac{1}{k} \frac{d}{ds} \tan^{-1}(\frac{\tau}{k}) \qquad (5.15)$$

مثال (٥.٥):

أثبت أن اللي τ_3 للمميز الكروي $G(b)$ لمنحنى منتظم $C : r = r(s)$ عند أي نقطة عليه تعطى من

$$\tau_3 = -\frac{1}{\tau} \frac{d}{ds} \tan^{-1} \frac{\tau}{k} \qquad (5.16)$$

الحل:

في هذا المثال نتبع أسلوب مخالف للأسلوب الذي اتبعناه في المثال السابق حيث المعادلة الإتجاهية للمميز $G(b)$ هي $G(b): r_3 = b(s)$

ولحساب اللي τ_3 نستخدم الصيغة (4.18) التي تعطي اللي لأي منحنى فراغ ممثل بدلالة بارامتر عام حيث في هذه الحالة يكون

$$\tau_3 = \frac{[\dot{r}_3, \ddot{r}_3, \dddot{r}_3]}{|\dot{r}_3 \times \ddot{r}_3|^2} = \frac{[\dot{b}, \ddot{b}, \dddot{b}]}{|\dot{b} \times \ddot{b}|^2} \quad , \dot{} = \frac{d}{ds} \qquad (*)$$

وبحساب المشتقات $\dot{b}$ ، $\ddot{b}$ ، $\dddot{b}$ من صيغ فرينيه ومشتقاتها نحصل على

$$\dot{b} = -\tau n \quad , \ddot{b} = -\dot{\tau} n - \tau(\tau b - kT)$$

$$\dddot{b} = -\ddot{\tau} n - \dot{\tau}(\tau b - kT) - 2\tau \dot{\tau} b + \tau^3 n + (k\tau)\dot{} T + k^2 \tau n$$

$$= (k\dot{\tau} + (k\tau)\dot{})T + (\tau^3 + k^2\tau - \ddot{\tau})n + (-3\tau\dot{\tau})b$$

$$\therefore \dot{b} \times \ddot{b} = \tau^2(\tau T + kb) \, , \quad |\dot{b} \times \ddot{b}| = \tau^2 \sqrt{\tau^2 + k^2}$$

وبما أن $[\dot{b}, \ddot{b}, \dddot{b}] = <\dot{b} \times \ddot{b}, \dddot{b}>$ وبالتعويض عن $\dddot{b}$ نحصل على

$$[\dot{b}, \ddot{b}, \dddot{b}] = \dot{k}\tau^4 + k\tau^3\dot{\tau} - 2k\tau^3\dot{\tau}$$

$$= \dot{k}\tau^4 - k\tau^3\dot{\tau} = \tau^3(\dot{k}\tau - k\dot{\tau})$$

وبالتعويض في الصيغة (*) التي تعطي اللي τ_3 نحصل على

$$\tau_3 = \frac{1}{\tau} \frac{\dot{k}\tau - k\dot{\tau}}{\tau^2 + k^2} = -\frac{1}{\tau} \frac{d}{ds} \tan^{-1}(\frac{\tau}{k})$$

وهو المطلوب.

ملاحظة (٥ـ٣):

هذه النتيجة يمكن الحصول عليها كما في المثال (٥ـ٤) حيث نعين أولاً $T_3(s) \times n_3(s) = b_3(s)$ وبالتفاضل بالنسبة إلى s نصل إلى المطلوب.

مثال (٥ـ٦):

أوجد نصف قطر انحناء المميز الكروي $G(T)$ لمتجه التماس لمنحنى الحلزون الدائري $r(u) = (a\cos u, a\sin u, bu)$ حيث a, b ثوابت.

الحل:

المميز الكروي $G(T)$ يعطى بالتمثيل البارامتري $G(T): r_1(s_1)=T(s)$

حيث s_1 بارامتر طول قوس منحنى المميز الكروي $G(T)$.

وسبق أن أوجدنا في مثال (٥.١) أن الانحناء k_1 للمميز الكروي $G(T)$ يعطى من

$$k_1=\sqrt{1+(\frac{\tau}{k})^2} \tag{5.17}$$

وفي الباب السابق رأينا أن المنحنى الحلزوني الدائري يحقق $\frac{\tau}{k}$ ثابت ويساوي $\frac{b}{a}$. إذاً نصف قطر الانحناء ρ_1 يعطى من

$$\rho_1=\frac{1}{k_1}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\tau}{k})^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}}$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\text{const.} \tag{5.18}$$

هذا المثال صحيح في حالة الحلزون العام وبالتالي يمكن صياغته على الصورة:

مثال (٥.٧):

أثبت أن نصف قطر انحناء المميز الكروي للمماس لمنحنى الحلزون العام ثابت.

مثال (٥.٨):

أثبت أن المميز الكروي $G(T)$ لمنحنى الحلزون العام هو منحنى مستوي.

الحل:

من العلاقة (5.15) التي تعطي ليّ المميز الكروي $G(T)$ نجد أن

$$\tau_1=\frac{1}{k}\frac{d}{ds}\tan^{-1}\frac{\tau}{k}\ ,\frac{\tau}{k}=\text{const.}$$

$$=\frac{1}{k}\frac{d}{ds}\tan^{-1}\ (\text{const.}) = \text{zero}$$

وبما أن اللّيّ τ_1 منعدم تطابقياً على المميز الكروي $G(T)$ لمنحنى الحلزون العام، إذاً فهو منحنى مستوي.

مثال (٥.٩):

أثبت أن المميز الكروي $G(T)$ لمنحنى الحلزون العام هو دائرة.

الحل:

في مثال (٥ـ٧)، (٥ـ٨) بينا أن $\tau_1=0\ ,k_1=\text{const.}$ وبالتالي فإن المميز الكروي $G(T)$ للحلزون العام هو دائرة.

بالمثل نعطي المثال التالي:

مثال (٥.١٠):

المميز الكروي $G(n)$ ، $G(b)$ للحلزون العام يحقق

$$\tau_3=0,k_3=\text{const.};\ \ \tau_2=0,k_2=\text{const.}$$

أي أن المميز الكروي $G(n)$ ، $G(b)$ للحلزون العام هو دائرة.

النتائج التي توصلنا إليها في مثال (٥.٨)، (٥.٩) يمكن الحصول عليها بطريقة أخرى من خلال المثال التالي:

مثال (٥.١١):

بالنسبة لمنحنى الحلزون الدائري بين أن:

(i) المميز الكروي $G(T)$ هو دائرة في المستوى $z=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\text{const.}$ ومركزها يقع على محور الحلزون.

(ii) المميز الكروي $G(n)$ هو دائرة في المستوى $z=0$ ومركزها نقطة الأصل.

(iii) المميز الكروي $G(b)$ هو دائرة في المستوى $z=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\text{const.}$ ومركزها يقع على محور الحلزون.

الحل:

التمثيل البارامتري لمنحنى الحلزون الدائري هو

$$r(u)=(a\cos u, a\sin u, bu)$$

حيث a, b ثوابت.

وبالحسابات الروتينية التي تعودنا عليها في الباب السابق يمكن الوصول بسهولة إلى

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin u, a\cos u, b), \\ n &= (-\cos u, -\sin u, 0), \\ b &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin u, -b\cos u, a). \end{aligned} \tag{5.19}$$

وبحساب الليّ للمميز الكروي $G(T)$، $G(n)$، $G(b)$ نجد (في المثال (٥-٩)، (٥-١٠)) أنه يساوي الصفر أي أن $\tau_1=0, \tau_2=0, \tau_3=0$ لأن

$$\frac{k}{\tau}=\text{const.}, \frac{d}{ds}\tan^{-1}\frac{\tau}{k}=0, \frac{d}{ds}\tan^{-1}\frac{k}{\tau}=0$$

بينما الانحناءات k_1، k_2، k_3 تحقق

$$\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{1+(\frac{\tau}{k})^2}=\text{const.}=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2} \\ k_2 &= 1, \quad k_3=\sqrt{1+(\frac{k}{\tau})^2}=\sqrt{1+(\frac{a}{b})^2}=\text{const.} \end{aligned} \tag{5.20}$$

من التمثيلات البارامترية (5.19) للمميزات الكروية $G(T)$، $G(n)$، $G(b)$ نلاحظ أن المركبة الثالثة (المركبة في اتجاه e_3 أي محور z) ثابتة وهذا يعني أن الصورة الكروية لكل حقل متجه من الإطار المصاحب للحلزون الدائري هي دائرة حول محور z (محور الحلزون). وبهذا نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية:

نظرية (١.٥):

الصورة الكروية لكل حقل متجه من حقول الإطار $\{T, n, b\}$ المصاحب لمنحنى الحلزون الدائري هي دائرة حول محور الحلزون.

تعريف (٤.٥):

الانحناء الكلي لمنحنى فراغ منتظم هو عبارة عن الجذر التربيعي لمجموع مربعات أطوال أقواس المميز الكروي للمماس والعمود الثانوي مقسوماً على مربع طول المسافة القوسية للمنحنى الأصلي.

التمثيل البارامتري للمميز الكروي للعمود الجانبي $b = b(s)$ لمنحنى الفراغ C
$r = r(s)$: يعطى في الصورة $G(b):r_3(s_3)=b(s)$ وبالتفاضل نحصل على

$$\frac{dr_3}{ds_3}.\frac{ds_3}{ds}=-\tau n \ ,T_3=\frac{dr_3}{ds_3}$$

حيث s_3 هو بارامتر طول قوس المميز الكروي $G(b)$.

$$\therefore T_3.\frac{ds_3}{ds}=-\tau n \ ,$$

وباختيار

$$\therefore \frac{ds_3}{ds}=\tau \ ,T_3=-n \qquad (5.21)$$

ومن العلاقة (5.7) والتعريف (٤.٥) نحصل على الانحناء الكلي في الصورة:

$$(\frac{ds_1}{ds})^2+(\frac{ds_3}{ds})^2=k^2+\tau^2 \qquad (5.22)$$

وبالتالي يمكن صياغة ما يلي:

تمهيدية (١.٥):

الانحناء الكلي لمنحنى منتظم يساوي $\sqrt{k^2+\tau^2}$.

(٢.٥) دائرة الانحناء Circle of Curvature

تعريف (٥.٥):

إذا كان $C : r = r(s)$ منحنى في الفراغ فإن نصف قطر الدائرة التي لها إلتصاق من الرتبة الثالثة مع المنحنى C عند أي نقطة p عليه يعرف بأنه نصف قطر الانحناء للمنحنى C عند النقطة p ، وتسمى هذه الدائرة بدائرة الانحناء.

هذا التعريف يمكن صياغته بأسلوب آخر كالآتي:

تعريف (٦.٥):

تعرف دائرة الانحناء عند نقطة p على المنحنى C بأنها الوضع النهائي للدائرة التي تمر بهذه النقطة p وكذلك نقطتين متجاورتين على المنحنى C عندما تقترب النقطتين من النقطة p.

من هذا التعريف نصل إلى:

تمهيدية (٢.٥):

دائرة الانحناء عند نقطة p تقع بأكملها في المستوى اللاصق عند النقطة p.

إذا كان $C : r = r(s)$ منحنى فراغ ومركز دائرة الانحناء (يقع على امتداد العمودي على المماس عند p) عند النقطة p هو الممثل بالمتجه R فإنه حسب التعريف يكون $pc = R - r$ أي أن العمود الأساسي n يكون على امتداد قطر الدائرة المار بالنقطة p.

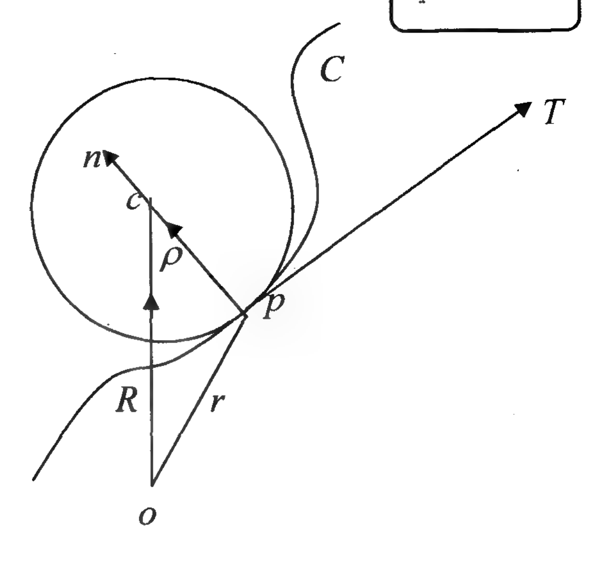
$$\therefore \; R - r(s) = \rho n \qquad (5.23)$$

حيث ρ كمية قياسية تعرف بنصف قطر الانحناء (شكل (٢.٥).

من التعاريف السابقة يتضح أن هذه الدائرة هي تقاطع الكرة

$$(R - r(s))^2 = \rho^2 \qquad (5.24)$$

مع المستوى اللاصق عند النقطة p حيث ρ ، R لا يعتمدان على بارامتر طول القوس s.



شكل (٢.٥)

المعادلة (5.24) يمكن كتابتها على الصورة

$$F(s)=(R-r(s))^2-\rho^2=0 \qquad (5.25)$$

شرط أن يكون هناك إلتصاق من الرتبة الثالثة بين المنحنى ودائرة الانحناء هو أن يتحقق

$$F=\dot{F}=\ddot{F}=0 \ , \dddot{F}\neq 0 \ , \dot{.}=\frac{d}{ds} \qquad (5.26)$$

هذه الشروط تعني أنه يوجد جذر مكرر ثلاث مرات للدالة F أي توجد ثلاث نقاط منطبقة ومشتركة بين المنحنى والدائرة.

بإشتقاق المعادلة (5.25) مرتين والتعويض في (5.26) نحصل على

$$<R-r(s),T>=0, \qquad (5.27)$$

(خواص الضرب القياسي) $<R-r(s),k\,n>-<T,T>=0$,

$$\therefore k<R-r(s),n>-1=0.$$

أو ما يكافئ

$$<R-r(s),n>=\frac{1}{k} \qquad (5.28)$$

من العلاقة (5.27) ، (5.28) نستنتج أن المتجه $R\text{-}r(s)$ عمودي على المماس T بينما له مسقط في اتجاه n يساوي $\rho=\frac{1}{k}$

$$\therefore\ R-r(s)=\frac{1}{k}n$$

وبأخذ المقياس والتربيع نجد أن

$$(R-r(s))^2=\frac{1}{k^2}$$

وباستخدام (5.25) نحصل على $\rho^2=\frac{1}{k^2}$ أو $\rho=\frac{1}{|k|}$ أي أن نصف قطر الانحناء عند النقطة p على المنحنى هو $\rho=\frac{1}{|k|}$.

إذاً مركز الانحناء لهذه الدائرة يمثل بمتجه الموضع

$$R=r(s)+\rho n\ \ ,\ \rho=\frac{1}{k} \qquad (5.29)$$

بالقياس نقترح أن نضع $\sigma=\frac{1}{\tau}$ وتسمى σ نصف قطر الليّ عند النقطة p.

ملاحظة (٥.٤):

الكمية القياسية σ ليس لها أي معنى هندسي مثل نصف قطر الانحناء (كمية جبرية وهي مقلوب الليّ).

الآن نقوم بدراسة المحل الهندسي لمركز دائرة الانحناء حيث أنه عندما تتحرك النقطة p على المنحنى فإن مركز دائرة الانحناء يرسم منحنى يسمى المحل الهندسي لمركز دائرة الانحناء.

بإشتقاق الدالة الاتجاهية (5.29) بالنسبة إلى s باعتبار s_1 هو بارامتر طول قوس المحل الهندسي لمركز دائرة الانحناء واستخدام صيغ فرينيه نحصل على

$$\frac{dR}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = T + \dot{\rho}n + \rho(\tau b - kT)$$

$$= T + \dot{\rho}n + \rho\tau b - \rho kT \quad , \quad \rho k = 1$$

$$\therefore T_1 \frac{ds_1}{ds} = \dot{\rho}n + \rho\tau b \qquad (5.30)$$

حيث T_1 هو متجه وحدة المماس للمحل الهندسي لمركز دائرة الانحناء.

وبأخذ المقياس لطرفي (5.30) نحصل على

$$\frac{ds_1}{ds} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\tau)^2} > 0 \qquad (5.31)$$

أي أنه عند زيادة s فإن s_1 تزيد بمعنى أن $s_1 = s_1(s)$ دالة تزايدية في s

ومن (5.30)، (5.31) يكون لدينا

$$T_1 = \frac{\dot{\rho}n + \rho\tau b}{\sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\tau)^2}} \qquad (5.32)$$

وبالإشتقاق مرة أخرى بالنسبة إلى s يمكنك الحصول على الانحناء k_1 ، كذلك اللّي τ_1 لمراكز دائرة الانحناء. وعلى الطالب تكملة هذا الجزء باعتباره تمرين على غرار ما سبق دراسته.

(٣.٥) كرة الانحناء Sphere of Curvature

تعريف (٧.٥):

تعرف كرة الانحناء (الكرة اللاصقة Osculating Sphere) لمنحنى في الفراغ عند نقطة p عليه بأنها الكرة التي لها التصاق من الرتبة الرابعة مع المنحنى عند هذه النقطة.

بمعنى آخر فإن كرة الانحناء هي الوضع النهائي للكرة التي تمر بالنقطة p وكذلك ثلاث نقاط متجاورة أخرى عندما تقترب هذه النقاط من النقطة p.

نفرض أن $\tilde{R}$ هو متجه الموضع لمركز كرة الانحناء التي نصف قطرها هو R فتكون معادلة الكرة على الصورة

$$<\tilde{R}-r(s),\tilde{R}-r(s)>=R^2$$

أو

$$F(s)=<\tilde{R}-r(s),\tilde{R}-r(s)>-R^2=0 \qquad (5.33)$$

شروط الالتصاق بين الكرة والمنحنى هي

$$F=\dot{F}=\ddot{F}=\dddot{F}=0,\; F^{(4)}(s)\neq 0,\; .=\frac{d}{ds}$$

وباستخدام (5.33) فإن هذه الشروط تؤول إلى

$$<\tilde{R}-r(s),T>=0, \qquad (5.34)$$

$$<\tilde{R}-r(s),kn>=1, \qquad (5.35)$$

$$<\tilde{R}-r(s),\dot{k}n+k(\tau b-kT)>=0,$$

أو

$$<\tilde{R}-r(s),\dot{k}n+k\tau b>=0 \qquad (5.36)$$

واضح من (5.34)، (5.35)، (5.36) أن حقل المتجه $\tilde{R}-r(s)$ عمودي على المماس T وله مسقط في اتجاه n وكذلك له مسقط في اتجاه b أي أن حقل المتجه $\tilde{R}-r(s)$ (المعرف على امتداد نقاط المنحنى) يمكن كتابته كتركيبه خطية من المتجهات T,n,b على الصورة

$$\tilde{R}-r(s)=\xi_1 T+\xi_2 n+\xi_3 b. \qquad (5.37)$$

وباستخدام شروط الالتصاق (5.34)، (5.35)، (5.36) نحصل على

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = \frac{1}{k} = \rho, \xi_3 = \dot{\rho}\sigma$$

إذاً الدالة الاتجاهية (5.37) التي تعرف المحل الهندسي لمراكز كرة الانحناء تأخذ الصورة

$$\tilde{R} = r(s) + \rho n + \dot{\rho}\sigma b \qquad (5.38)$$

من هذه الدالة الاتجاهية نجد أن نصف قطر كرة الانحناء يساوي

$$R = |\tilde{R} - r(s)| = \sqrt{\rho^2 + (\dot{\rho}\sigma)^2} \qquad (5.39)$$

واضح أن نصف قطر كرة الانحناء متغير ويختلف باختلاف انحناء وليّ المنحنى.

الدالة الاتجاهية (5.38) يمكن كتابتها على الصورة

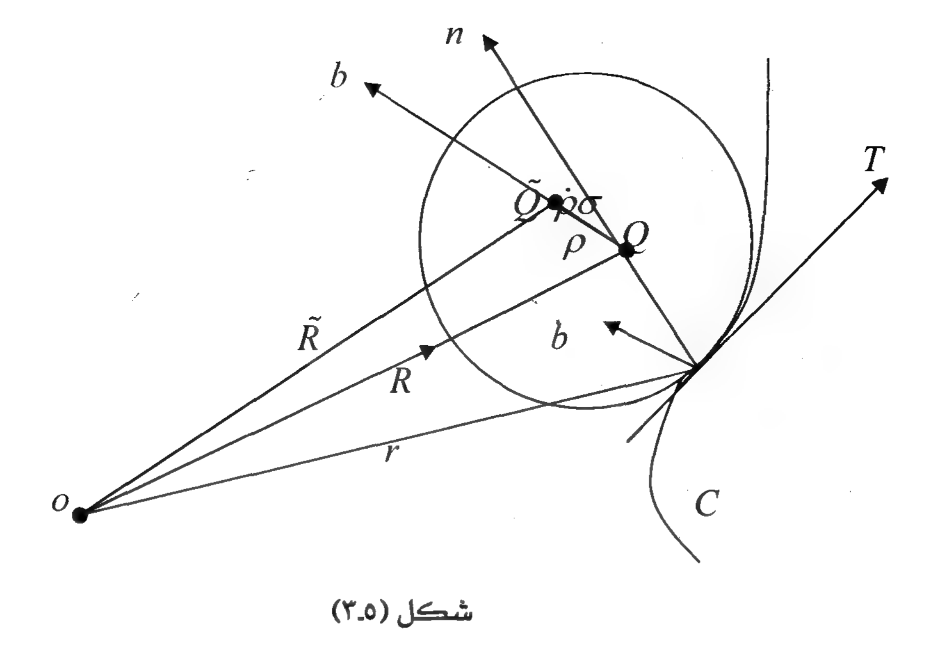
$$\tilde{R}(s) = R(s) + \dot{\rho}\sigma b \,, R(s) = r(s) + \rho n$$

حيث $R(s)$ المحل الهندسي لدائرة الانحناء والمتجه $R(s) - r(s)$ يقع على امتداد العمود الأساسي بينما المتجه $\tilde{R}(s) - R(s)$ يقع على امتداد العمود الثانوي والمتجه

$$\tilde{R}(s) - r(s) = \rho n + \dot{\rho}\sigma b$$

يقع في المستوى العمودي ومساقطه على المتجهات n, b هي $\rho, \dot{\rho}\sigma$ على الترتيب كما هو موضح في شكل (٣.٥). حيث Q مركز دائرة الانحناء و $\tilde{Q}$ مركز كرة الانحناء وبالتالي فإن

$$\overrightarrow{P\tilde{Q}} = \tilde{R} - r(s) \,, \quad \overrightarrow{PQ} = R - r(s) \,, \quad \overrightarrow{Q\tilde{Q}} = \tilde{R} - R$$



شكل (٣.٥)

نفرض أن s هو بارامتر طول قوس المنحنى $C: r = r(s)$ و $\tilde{s}$ هو بارامتر طول قوس المحل الهندسي $\tilde{C}$ لكرة الانحناء حيث

$$\tilde{C}: \tilde{R}(\tilde{s}) = r(s) + \rho n + \dot{\rho}\sigma b \qquad (5.40)$$

الآن نقوم بدراسة الهندسة الخارجية للمنحنى $\tilde{C}$ كما رأينا سابقاً في حالة دائرة الانحناء كالآتي:

نأخذ $\tilde{s}$ هو البارامتر الطبيعي بالنسبة للمنحنى $\tilde{C}$ بينما s (بارامتر طبيعي للمنحنى C) هو بارامتر عام له أي أن

$$\tilde{T} = \frac{d\tilde{R}}{d\tilde{s}} \;, \frac{d\tilde{s}}{ds} = \dot{\tilde{s}} \neq 0$$

وباشتقاق المعادلة (5.40) بالنسبة إلى s نحصل على

$$\tilde{t}\,\dot{\tilde{s}} = (\frac{\rho}{\sigma} + \dot{\sigma}\dot{\rho} + \sigma\ddot{\rho})b \qquad (5.41)$$

نأخذ في اعتبارنا أننا نقيس $\tilde{s}$ على المنحنى $\tilde{C}$ في اتجاه تزايد s على المنحنى C أي أن $\tilde{s}=\tilde{s}(s)$ دالة تزايدية في s وبالتالي فإن $\dot{\tilde{s}}=\frac{d\tilde{s}}{ds}>0$

إذاً يمكننا اختيار (بأخذ المقياس للمعادلة (5.41))

$$\tilde{T}=b\,,\ \frac{d\tilde{s}}{ds}=\frac{\rho}{\sigma}+\dot{\rho}\dot{\sigma}+\sigma\ddot{\rho} \qquad (5.42)$$

أو ما يكافئ

$$\frac{d\tilde{s}}{ds}=\frac{\rho}{\sigma}+(\dot{\rho}\sigma)^{\cdot},\quad \cdot=\frac{d}{ds} \qquad (5.43)$$

وبإشتقاق المعادلة الاتجاهية في (5.42) واستخدام صيغ فرينيه نحصل على

$$\tilde{k}\tilde{n}\frac{d\tilde{s}}{ds}=-\tau n$$

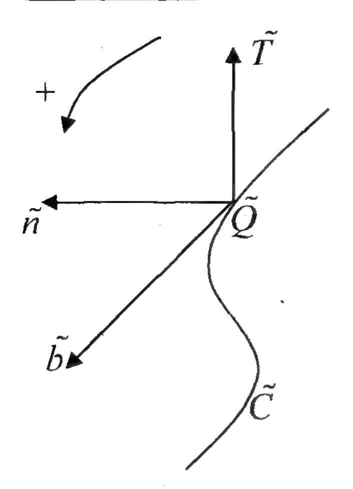
وبما أن $\frac{d\tilde{s}}{ds}>0$ فإنه يمكننا أخذ

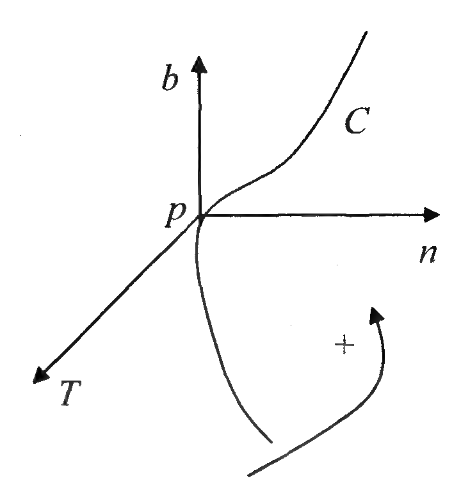
$$\tilde{n}=-n\,,\ \tilde{k}\frac{d\tilde{s}}{ds}=\tau \qquad (5.44)$$

ومن (5.43) نحصل على

$$\tilde{k}=\frac{\tau}{\frac{\rho}{\sigma}+(\dot{\rho}\sigma)^{\cdot}} \qquad (5.45)$$

وبالأخذ في الاعتبار أن الإطار (T, n, b) يكون مجموعة يمينية فإنه لابد وأن يكون الإطار $(\tilde{T},\tilde{n},\tilde{b})$ مجموعة يمينية كما هو موضح في شكل (٤.٥).





شكل (٤.٥)

إذاً العمود الثاني (الثانوي) $\tilde{b}$ للمنحنى $\tilde{C}$ يكون موازياً المماس T للمنحنى C وذلك لأن

$$\tilde{b} = \tilde{T} \wedge \tilde{n} = b \times (-n) = T$$

$$\therefore \tilde{b} = T \qquad (5.46)$$

وباشتقاق المعادلة (5.46) بالنسبة إلى s نحصل على

$$-\tilde{\tau}\,\tilde{n}\,\dot{\tilde{s}} = kn \;,\; \tilde{n} = -n$$

وبأخذ المقياس للطرفين (أو باستخدام (5.44)) نحصل على $\tilde{\tau}\dot{\tilde{s}} = k$

إذاً (باستخدام (5.43)) يكون لدينا

$$\tilde{\tau} = \frac{k}{\dfrac{\rho}{\sigma} + (\dot{\rho}\sigma)^{\dot{}}} \qquad (5.47)$$

من العلاقات (5.45)، (5.47) نحصل على (بالقسمة)

$$\frac{\tilde{k}}{\tilde{\tau}} = \frac{\tau}{k} \qquad (5.48)$$

نظرية (٢.٥):

المحل الهندسي لمركز كرة الانحناء للمنحنى الحلزوني الذي زاويته α يكون أيضاً حلزون زاويته $\frac{\pi}{2}-\alpha$.

البرهان:

بالنسبة للمنحنى الحلزون يكون $\frac{k}{\tau}=\tan\alpha$. إذاً $\frac{\tau}{k}=\cot\alpha$ وبالتعويض في العلاقة (5.48) نحصل على $\frac{\tilde{k}}{\tilde{\tau}}=\cot\alpha=\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\text{const.}$

وهو المطلوب إثباته.

نظرية (٣.٥):

الشرط الضروري والكافي لوقوع منحنى فراغ $C : r = r(s)$ على سطح كرة (منحنى كروي spherical curve) هو أن يتحقق

$$\frac{\rho}{\sigma}+(\dot{\rho}\sigma)^{\cdot}=0\ ,\ .=\frac{d}{ds} \qquad (5.49)$$

حيث ρ,σ هما أنصاف أقطار اللىّ والانحناء للمنحنى C على الترتيب.

البرهان:

إذا كان المنحنى C واقع على سطح كرة فإنه في هذه الحالة تكون كرة الانحناء (أقرب كرة للمنحنى) هي نفس الكرة ومركز كرة الانحناء هو نفسه مركز هذه الكرة لجميع نقط المنحنى. وبالتالي حينما تتحرك النقطة p على المنحنى C لا يوجد إلا مركز انحناء واحد وبالتالي المنحنى $\tilde{C}$ يختزل بالكامل إلى نقطة ويكون إذاً $\frac{d\tilde{s}}{ds}=0$ ومن (5.43) نحصل على الشرط الضروري وهو تحقق (5.49).

وبالعكس يمكن إثبات أن هذا الشرط كافي بمعنى أنه إذا تحقق الشرط (5.49) فإن المنحنى يقع على سطح كرة.

لذلك نفرض أن (5.49) محقق ومن (5.43) يكون $\frac{d\tilde{s}}{ds}=0$ وبالتالي فإن

$$\frac{d\tilde{R}}{ds}=\frac{d\tilde{R}}{d\tilde{s}}.\frac{d\tilde{s}}{ds}=0$$

إذاً المنحنى $\tilde{C}$ عبارة عن متجه ثابت (لا يعتمد على s أي لا يعتمد على نقاط المنحنى C) وبالتالي لا يوجد إلا مركز انحناء واحد لجميع نقاط المنحنى أي أنه لا يوجد إلا كرة انحناء واحدة ويقع عليها المنحنى. إذاً جميع نقاط المنحنى أي المنحنى ذاته يقع على سطح هذه الكرة. وبهذا نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية.

ملاحظة (٥.٥):

التناظر بين الإطارات المتحركة (T, n, b)، $(\tilde{T},\tilde{n},\tilde{b})$ على المنحنيات C، $\tilde{C}$ على الترتيب تعطى من خلال تحويل خطي غير الشاذ (من (4.42)، (4.44)، (4.46)) على الصورة

$$\begin{pmatrix}\tilde{T}\\ \tilde{n}\\ \tilde{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T\\ n\\ b\end{pmatrix} \qquad (5.50)$$

واضح أن هذا التحويل عمودي حيث مصفوفة التحويل (5.50) محددها يساوي الوحدة (موجب) ولذلك فإن هذا التحويل يحافظ على توجيه الإطارات المتحركة على كل من المنحنيات C، $\tilde{C}$ كما هو موضح في شكل (٤.٥).

(٤.٥) المنحنى الناشر لمنحنى فراغ The Involute of a Space Curve

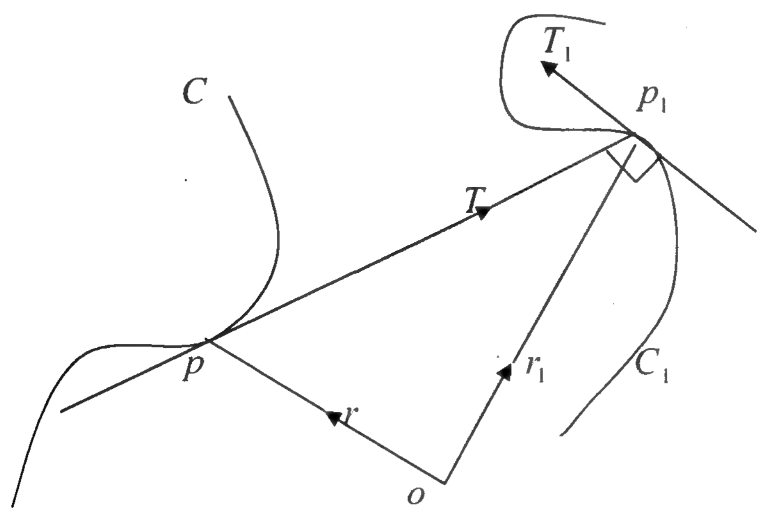
تعريف (٨.٥):

نفرض أن $C: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow E^3$ و $C_1: J\subset\mathbb{R}\longrightarrow E^3$ منحنيان فراغ بحيث المماسات للمنحنى C أعمدة على المنحنى C_1 أي أعمدة على المماسات للمنحنى C_1 في هذه الحالة المنحنى C_1 يسمى ناشر Involute للمنحنى C (معلوم).

لنعتبر نقطة p على المنحنى $C:r=r(s)$ وحسب التعريف يكون المماس للمنحنى C عند النقطة p عمودياً على المنحنى C_1 أي يقطع المنحنى $C_1:r_1=r_1(s_1)$ على التعامد عند نقطة ولتكن p_1 ومن هندسة الشكل (٥-٥) نجد أن $\overrightarrow{op_1}=\overrightarrow{op}+\overrightarrow{pp_1}$ حيث $\overrightarrow{pp_1}$ في اتجاه المماس $T=\dfrac{dr}{ds}$ للمنحنى C عند النقطة p التي لها متجه الموضع $r=r(s)$ وليكن $\overrightarrow{pp_1}=\lambda T$.

$$\therefore r_1(s_1)=r(s)+\lambda T(s) \qquad (5.51)$$

حيث $r_1(s_1)$ متجه الموضع للنقطة p_1 , s_1 بارامتر طول قوس المنحنى C_1 , λ كمية قياسية.



شكل (٥-٥)

باشتقاق المعادلة (5.51) بالنسبة إلى s مع اعتبار أن s_1 دالة في s نحصل على

$$\frac{dr_1}{ds_1}.\frac{ds_1}{ds}=T+\dot{\lambda}T+\lambda kn$$

$$\therefore T_1.\frac{ds_1}{ds}=(1+\dot{\lambda})T+\lambda kn \qquad (5.52)$$

ومن تعريف المنحنى الناشر $C_1(T \perp T_1)$ نحصل على (بضرب (5.52) في T قياسياً):

$$<T_1, T> = 0 = 1 + \dot{\lambda} \Rightarrow \dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{ds} = -1$$

بالتكامل نحصل على $\lambda = c - s$ حيث c ثابت اختياري. وبالتعويض عن λ في (5.51) نحصل على :

$$r_1(s_1) = r(s) + (c - s)T \qquad (5.53)$$

وهذه هي الصورة العامة للمنحنى الناشر.

إذاً يوجد عدد لانهائي من منحنيات النواشر لمنحنى فراغ أي أن المنحنى الناشر لمنحنى معلوم ليس وحيد (لأن المعادلة (5.53) تحتوي على ثابت اختياري c وهو بارامتر عائلة النواشر).

باشتقاق المعادلة (5.53) بالنسبة إلى s_1 نحصل على ($\frac{dr}{ds_1} = T.\frac{ds}{ds_1}$):

$$T_1 = k(c - s)\frac{ds}{ds_1}n \qquad (5.54)$$

ومنها نجد أن $T_1 = \pm n$ ونتفق على اختيار

$$T_1 = n, \qquad (5.55)$$

$$\therefore \frac{ds_1}{ds} = k(c - s) \qquad (5.56)$$

وحيث أن $\frac{ds_1}{ds} \neq 0$ إذاً يجب أن تكون $c \neq s$ عند أي نقطة على المنحنى C وإذا أخذنا $s_1 = s_1(s)$ دالة تزايدية في s فإنه يجب أن تكون $c > s$، $k > 0$.

باشتقاق العلاقة (5.55) واستخدام صيغ فرينيه التفاضلية نحصل على

$$k_1 n_1 \frac{ds_1}{ds} = \tau b - kT \qquad (5.57)$$

وبأخذ المقياس (الطول أو المعيار) للطرفين يكون لدينا

$$k_1 \frac{ds_1}{ds} = \sqrt{\tau^2 + k^2} \qquad (5.58)$$

ومن (5.56) يكون لدينا

$$k_1 = \frac{\sqrt{k^2 + \tau^2}}{k(c - s)} \qquad (5.59)$$

وبالتعويض في (5.57) نحصل على

$$n_1 = \frac{\tau b - kT}{\sqrt{\tau^2 + k^2}} \qquad (5.60)$$

حيث n_1 متجه ناحية الجهة المقعرة من المنحنى C_1.

وبالتعويض من (5.60)، (5.55) في العلاقة $b_1 = T_1 \times n_1$ نحصل على

$$b_1 = n \times \frac{\tau b - kT}{\sqrt{\tau^2 + k^2}}$$

$$\therefore\ b_1 = \frac{\tau T - kb}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} \qquad (5.61)$$

ملاحظة (٥.٦):

كل من العمود الأساسي n_1 والعمود الثانوي b_1 للمنحنى الناشر C_1 يقع في المستوى المقوم (مولد بالمتجهات T, b) للمنحنى C.

باشتقاق العلاقة (5.61) بالنسبة إلى s نحصل على

$$-\tau_1 n_1 \frac{ds_1}{ds} = \frac{(\tau \dot{k} - \dot{\tau} k)(\tau b - kT)}{(k^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore\ \tau_1 n_1 = \frac{\dot{\tau} k - \dot{k} \tau}{k^2 + \tau^2} \cdot \frac{\tau b - kt}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} \cdot \frac{ds}{ds_1}$$

بأخذ مربع المقياس والتعويض عن $\frac{ds}{ds_1}$ من (5.56) نحصل على

$$\tau_1 = \frac{\dot{\tau} k - \dot{k}\tau}{k\,|c-s|(k^2+\tau^2)}$$

أو

$$\tau_1 = \frac{-1}{k\,|c-s|} \cdot \frac{\tau\dot{k} - k\dot{\tau}}{k^2+\tau^2}$$

$$\therefore\ \tau_1 = \frac{-1}{k\,|c-s|}\frac{d}{ds}\tan^{-1}\left(\frac{k}{\tau}\right) \qquad (5.62)$$

نظرية (٤٥):

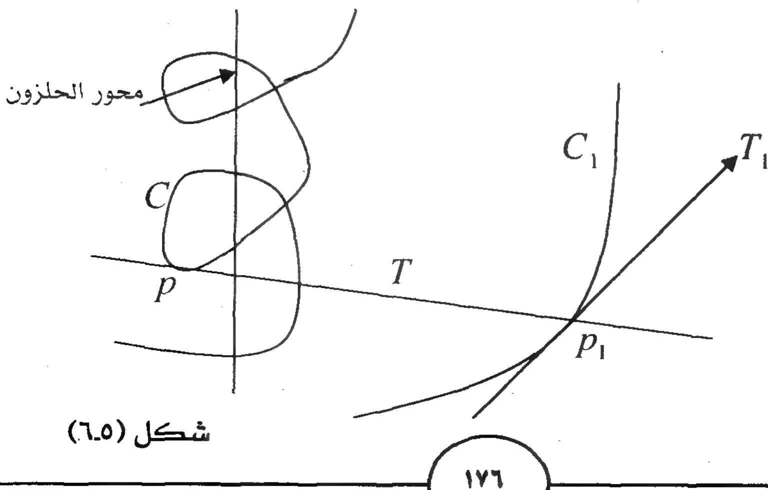
المنحنى الناشر لمنحنى حلزوني هو منحنى مستوى والعكس صحيح.

البرهان:

بما أن المنحنى الحلزون يحقق أن $\frac{k}{\tau}$ ثابت وباستخدام (5.62) نجد أن $\tau_1 = 0$ أي أن المنحنى الناشر للحلزون منحنى مستوي وإذا كانت $\tau_1 = 0$ فإن

$$\frac{d}{ds}\tan^{-1}\left(\frac{k}{\tau}\right) = 0$$

أي أن $\frac{k}{\tau}$ ثابت وبالتالي فإن C منحنى حلزوني كما هو موضح في شكل (٦.٥).



شكل (٦.٥)

من (5.61) ,(5.60)، (5.55) يمكننا صياغة العلاقة بين الإطار (T,n,b) للمنحنى C والإطار (T_1,n_1,b_1) للمنحنى C_1 (الناشر) على الصورة

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ n_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k\xi & 0 & \tau\xi \\ \tau\xi & 0 & k\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix}, \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{k^2+\tau^2}} \qquad (5.63)$$

ملاحظة (٧.٥):

واضح أن هذا التحويل خطي عمودي غير شاذ حيث أن محدد مصفوفة التحويل يساوي الوحدة (موجب) ولذلك فإنه يحافظ على اتجاه الإطارات المتحركة على كل من C، C_1 (راجع التحويلات الخطية في الجبر الخطي).

(٥.٥) المنتشر لمنحنى فراغ Evolute

تعريف (٩.٥):

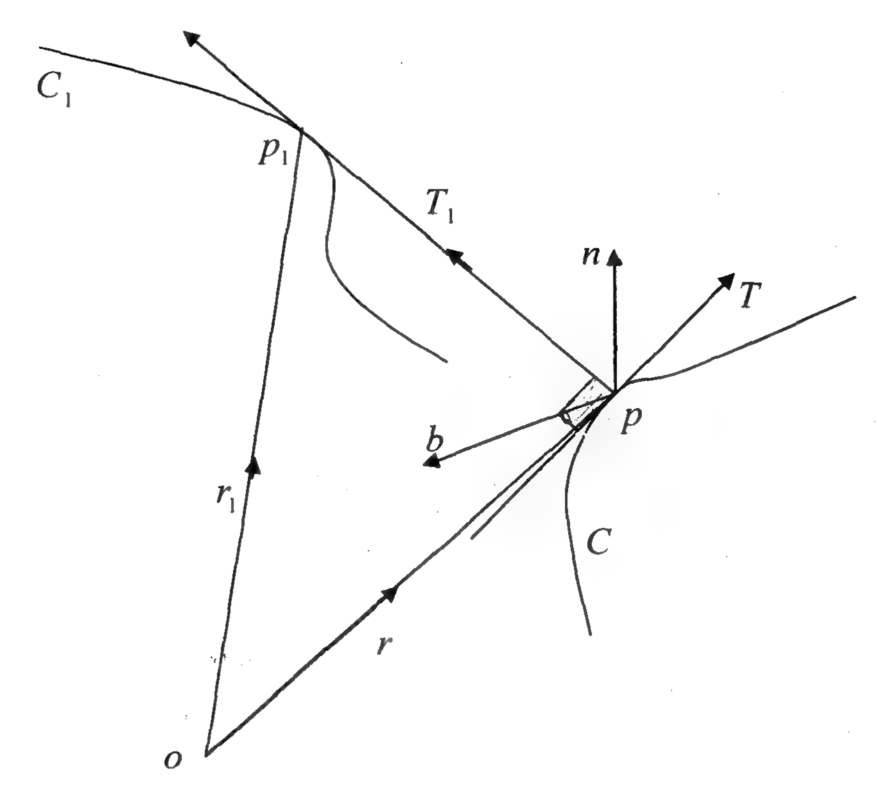
يعرف المنتشر Evolute لمنحنى فراغ C بأنه منحنى فراغ C_1 بحيث يكون ناشراً لمنحنى الفراغ C أو بعبارة أخرى هو منحنى فراغ C_1 مماساته تقطع المنحنى C على التعامد.

لإيجاد معادلة المنحنى المنتشر C_1 نفرض أن p نقطة على المنحنى C حيث $\overrightarrow{op}=\underline{r}$ ولتكن p_1 النقطة المناظرة لها على المنحنى C_1 حيث $\overrightarrow{op_1}=\underline{r}_1$ كما هو موضح في شكل (٧.٥).

ومن هندسة الشكل نجد أن $\overrightarrow{op_1}=\overrightarrow{op}+\overrightarrow{pp_1}=r+\overrightarrow{pp_1}$ ولكن حسب التعريف يكون $\overrightarrow{pp_1}$ في اتجاه المماس للمنحنى C_1 عند p_1 وكذلك يكون المماس T عمودي على $\overrightarrow{pp_1}$ وهذا يؤدي إلى أن $\overrightarrow{pp_1}$ يوازي المستوى العمودي المولد بالمتجهات b, n أي أن $\overrightarrow{pp_1}=un+vb$ حيث u, v دوال قياسية يلزم تعيينها من تعريف C_1

$$\therefore r_1(s_1)=r(s)+un+vb \qquad (5.64)$$

حيث s_1 هو بارامتر المسافة القوسية على C_1 و كل من u, v دوال في s.



شكل (٥.٧)

بالتفاضل بالنسبة إلى s للعلاقة (5.64) نحصل على

$$\therefore T_1 \frac{ds_1}{ds} = (1-uk)T + (\dot{u} - v\tau)n + (\dot{v} + u\tau)b \qquad (5.65)$$

ولكن المتجه $\overrightarrow{pp_1}$ يمكن التعبير عنه في الصورة $r_1 - r = \lambda T_1$ حيث λ كمية قياسية، T_1 المماس للمنحنى C_1 عند النقطة p_1. وباستخدام (5.64)، (5.65) نحصل على

$$(1-uk)T + (\dot{u} - v\tau)n + (\dot{v} + u\tau)b = \lambda(un + vb)$$

وبمقارنة معاملات T,n,b على الطرفين نحصل على (الاستقلال الخطي لعناصر الإطار)

$$1-uk=0, \dot{u}-v\tau=\lambda u \ , \dot{v}+u\tau=\lambda v$$

أو ما يكافئ

$$\frac{\dot{u}-v\tau}{u}=\frac{\dot{v}+u\tau}{v}=\lambda \ , u=\frac{1}{k}=\rho$$

ومن هذه العلاقات نحصل على العلاقة (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين):

$$\tau=\frac{\dot{u}v-\dot{v}u}{u^2+v^2}=\frac{\dfrac{\dot{u}v-\dot{v}u}{u^2}}{1+\dfrac{v^2}{u^2}}$$

$$\therefore \tau=\frac{d}{ds}\tan^{-1}(\frac{-v}{u}) \qquad (5.66)$$

وبتكامل الطرفين بالنسبة إلى s يكون لدينا

$$\int \tau \, ds=\tan^{-1}(\frac{-v}{u})$$

ولكن من تعريف الليّ τ نجد أن

$$\int \tau \, ds=\psi+c \quad \Rightarrow \frac{-v}{u}=\tan(\psi+c)$$

أو $\dfrac{d\psi}{ds}=\tau$ حيث $v=-u\tan(\psi+c) \ ,u=\rho$

$$\therefore v=-\rho\tan(\psi+c) \qquad (5.67)$$

حيث c ثابت اختياري، ψ الزاوية التي يدور بها المستوى اللاصق (أو العمود الثانوي) والتي تعرف الليّ.

إذاً المعادلة الإتجاهية (5.64) تصبح على الصورة

$$r_1(s_1)=r(s)+\rho(n-b\tan(\psi+c)) \qquad (5.68)$$

وهذه هي معادلة المنتشر C_1 لمنحنى منتظم $C: r=r(s)$ ومنها يتضح أنه لأي منحنى فراغ يوجد له عدد لانهائي من المنتشرات نظراً لظهور ثابت اختياري c.

كذلك نرى بسهولة من (5.68) أن المماس T_1 للمنتشر C_1 له نفس الاتجاه (أو عكس الاتجاه) للمتجه $\overrightarrow{pp_1}=r_1-r$ أي له الاتجاه

$$\frac{\rho}{\cos(\psi+c)}(n\cos(\psi+c)-b\sin(\psi+c)) \qquad (5.69)$$

أو يوازي متجه الوحدة $n\cos(\psi+c)-b\sin(\psi+c)$

نظرية (٥.٥):

إذا كان C_1'، C_1'' منتشران للمنحنى C فإن C_1' يصنع زاوية $\psi+c'$ مع العمود الأساسي n والمنحنى C_1'' يصنع زاوية $\psi+c''$ مع n والزاوية بينهما ثابتة وتساوي $c'-c''$ عند جميع النقط المتناظرة على المنحنيين.

البرهان:

نفرض أن المنتشرين C_1'، C_1'' للمنحنى C هما

$$r_1'=r+\rho(n\cos(\psi+c')-b\sin(\psi+c')),$$

$$r_1''=r+\rho(n\cos(\psi+c'')-b\sin(\psi+c'')).$$

المماسات لهما تكون في اتجاه متجهات الوحدة الآتية على الترتيب:

$$T_1'=n\cos(\psi+c')-b\sin(\psi+c'),$$

$$T_1''=n\cos(\psi+c'')-b\sin(\psi+c'').$$

وبما أن الزاوية بين المنحنيين C_1'، C_1'' هي الزاوية θ بين متجهي الوحدة T_1'، T_1'' وباستخدام تعريف جيب تمام الزاوية وكذلك المتطابقات المثلثية نحصل على

$$\cos\theta = \langle T_1', T_2'' \rangle = \cos(c'' - c') \Rightarrow \theta = c'' - c'$$

وهذا يكمل برهان النظرية.

للحصول على الانحناء k_1 للمنتشر C_1 نشتق العلاقة (5.68) بالنسبة إلى s وعمل الاختصارات اللازمة نجد أن

$$T_1 \frac{ds_1}{ds} = \sec(\psi + c)(\dot{\rho} + \rho\tau\tan(\psi + c)).$$
$$(n\cos(\psi + c) - b\sin(\psi + c)) \qquad (5.70)$$

نختار

$$T_1 = n\cos(\psi + c) - b\sin(\psi + c) \qquad (5.71)$$

$$\therefore \frac{ds_1}{ds} = \sec(\psi + c)(\dot{\rho} + \rho\tau\tan(\psi + c)) \qquad (5.72)$$

وباشتقاق العلاقة (5.71) بالنسبة إلى s نحصل على

$$k_1 \frac{ds_1}{ds} n_1 = -k\cos(\psi + c)T \ , \ \frac{d\psi}{ds} = \tau$$

وباختيار

$$n_1 = -T \qquad (5.73)$$

نحصل على

$$k_1 \frac{ds_1}{ds} = k\cos(\psi + c)$$

وبالتعويض عن $\frac{ds_1}{ds}$ من (5.72) نحصل على

$$k_1 = \frac{k\cos^2(\psi + c)}{\dot{\rho} + \rho\tau\tan(\psi + c)} \qquad (5.74)$$

ومن العلاقات (5.71)، (5.73) نجد أن

$$b_1 = T_1 \wedge n_1 = n\sin(\psi + c) + b\cos(\psi + c) \quad (5.75)$$

وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة إلى s نحصل على اللي τ_1 في الصورة

$$\tau_1 = \frac{-k\sin(\psi + c)}{(\dot{\rho} + \rho\tau\tan(\psi + c))\sec(\psi + c)}$$

وحيث أن $\rho = \frac{1}{k}$ إذاً $\dot{\rho} = -\frac{\dot{k}}{k^2}$ وبالتالي يكون لدينا

$$\tau_1 = \frac{k^3\sin(\psi + c)\cos(\psi + c)}{\dot{k}\cos(\psi + c) - k\tau\tan(\psi + c)} \quad (5.76)$$

ملاحظة (٥.٨):

العلاقة بين الإطارات المتحركة على امتداد كل من المنحنى C والمنتشر C_1 تعطى بالتحويل الخطي العمودي (غير الشاذ) الآتي:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ n_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos(\psi + c) & -\sin(\psi + c) \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\psi + c) & \cos(\psi + c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix} \quad (5.77)$$

مثال (٥.٦):

بين أن المنحنى المنتشر لمنحنى مستوى هو منحنى حلزون.

الحل:

إذا كان C منحنى مستوى أي أن $\tau = 0$ فيكون $\psi = 0$ وعلى ذلك فإن المنحنى المنتشر C_1 يعطى من.

$$r_1 = r + \rho n - \rho(\tan c)\, b\ , \quad T_1 = n\cos c - b\sin c$$

$$< T_1, b > = -\sin c = \text{const.}\ , \quad < T_1, n > = \cos c = \text{const.}$$

أي أن المماس T_1 للمنحنى المنتشر C_1 يصنع زاوية ثابتة مع كل من b و n ومن تعريف المنحنى الحلزوني نصل إلى المطلوب.

ملاحظة (٥ـ٩):

في حالة المنحنى المستوي $(\tau = 0)$ وباختيار قيمة للثابت c تساوي صفر فإننا نحصل على $r_1 = r + \rho n$ وهي معادلة المحل الهندسي لمركز دائرة الانحناء.

ملاحظة (٥ـ١٠):

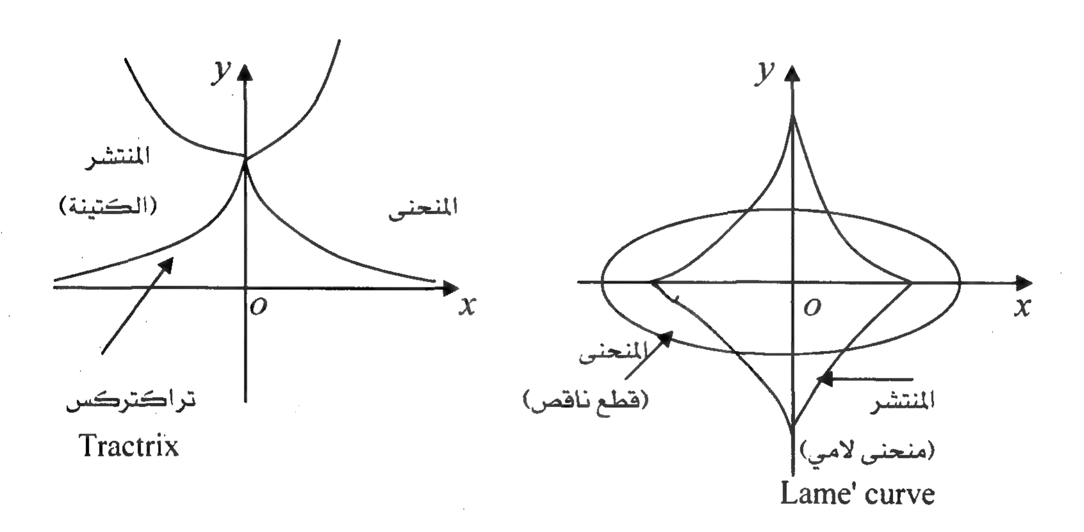
تعريف المنتشر لمنحنى معلوم مستقل عن التمثيل البارامتري لأي دالة تفاضلية.

ملاحظة (٥ـ١١):

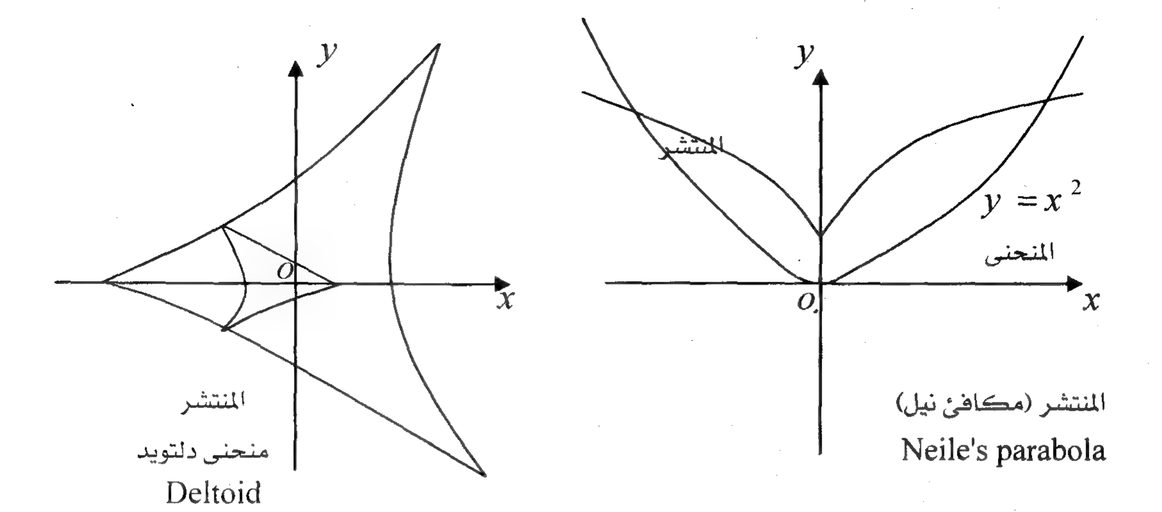
إذا كان E منحنى منتشر لمنحنى I فإن I يقال أنه ناشر للمنحنى E.

ملاحظة (٥ـ١٢):

المحل الهندسي لمراكز ودائرة الالتصاق (الانحناء) لمنحنى معلوم هو المنتشر لهذا المنحنى. ونوضح ذلك من خلال شكل (٥ـ٨)، (٥ـ٩).



شكل (٥ـ٨)



شكل (٩.٥)

(٦.٥) منحنيات برتراند Bretrand Curves

تعريف (١٠.٥):

يقال أن المنحنيين C, C^* أنهما منحنيان من نوع برتراند إذا كان لهما نفس العمود الأساسي. إذا كان المنحنى C ممثل بالحقل الاتجاهي $r = r(s)$ فإن المنحنى C^* يكون له التمثيل الاتجاهي

$$r^* = r + \lambda n \qquad (5.78)$$

بالتفاضل بالنسبة إلى s يكون لدينا

$$T^* \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda k)T + \dot{\lambda} n + \lambda \tau b, \; . = \frac{d}{ds} \qquad (5.79)$$

حيث s^* بارامتر المسافة القوسية على المنحنى C^* و T^* المماس له عند النقطة p^* التي تناظر p كما هو موضح في شكل (١٠.٥).

ولكن $n = n^*$ إذاً $<T^*, n>=0$ وبضرب طرفي العلاقة (5.79) في n نحصل على $\dot{\lambda}=0$ وبالتكامل نجد أن $\lambda = c = \text{const.}$

وبالتالي نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية:

نظرية (٥-٧):

المسافة بين النقط المتناظرة على منحنيات برتراند C ,C^* ثابتة ولا تعتمد على النقاط المتناظرة.

إذاً التمثيل البارامتري لزوج برتراند C ,C^* يأخذ الصورة (من (5.78))

$$r^* = r + cn \qquad (c \text{ ثابت}) \qquad (5.80)$$

والعلاقة (5.79) تصبح على الصورة

$$T^* \frac{ds^*}{ds} = (1 - ck)T + c\tau b \qquad (5.81)$$

ولكن

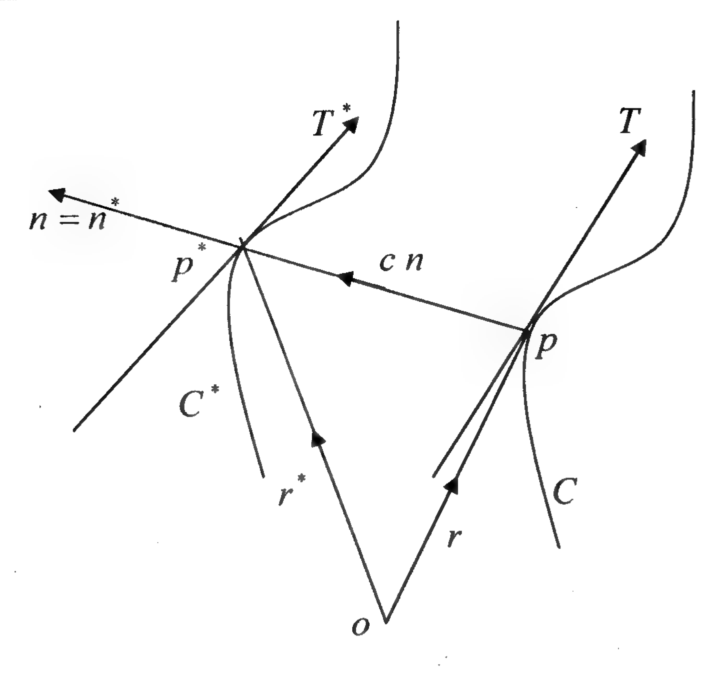
$$\frac{d}{ds} < T ,T^* > = k < n,T^* > + k^* < T ,n^* > = 0 ,(n = n^*)$$

$$\therefore < T ,T^* > = \text{const.} = \cos\alpha$$

حيث α زاوية ثابتة بين المماسات للمنحنين عند النقاط المتناظرة.

أي أن المماسين لكل من منحنيات برتراند C ,C^* يحصران بينهما زاوية ثابتة α.

وبما أن المتجهات T ,T^* ,b ,b^* تقع في مستوى عمودي على $n = n^*$ وكذلك فإن T عمودي على b وعلى b^* وعليه فإن الزاوية بين b ,b^* تكون مساوية للزاوية α أيضاً كما هو موضح في شكل (٥-١٠).



شكل (٥ـ١٠)

ومن المعادلة (5.81) نجد أن (بضرب الطرفين قياسياً في T):

$$\langle T, T^* \rangle \frac{ds^*}{ds} = 1 - ck$$

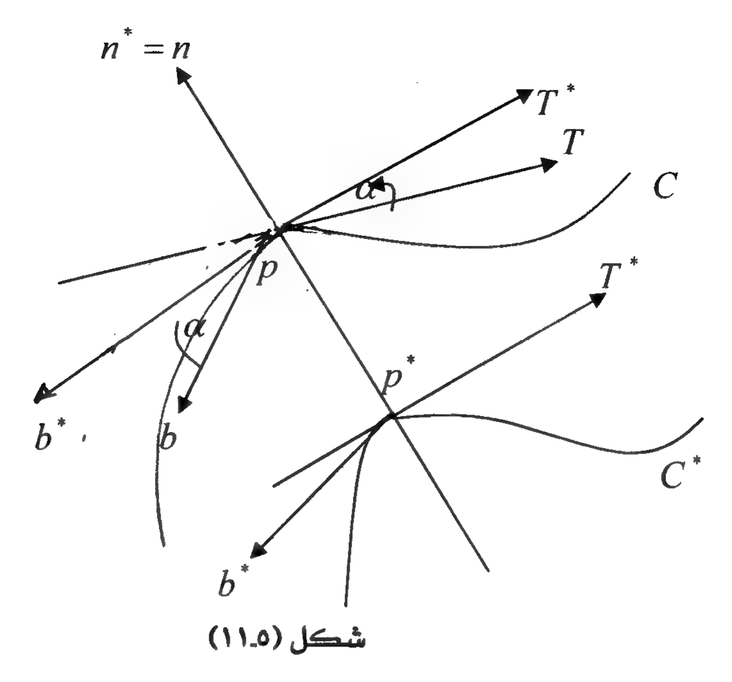
$$\therefore \cos\alpha \frac{ds^*}{ds} = 1 - ck \qquad (5.82)$$

نكتب هنا أيضاً (بضرب طرفي العلاقة (5.81) قياسياً في b):

$$\langle b, T^* \rangle \frac{ds^*}{ds} = c\tau,$$

$$\therefore \sin\alpha \frac{ds^*}{ds} = c\tau \qquad (5.83)$$

حيث الزاوية α موضحة في شكل (٥ـ١١).



شكل (١١.٥)

ملاحظة (١٣.٥):

شكل (١١.٥) يوضح العلاقة بين الإطارات المتحركة على الزوج C^*،C حيث أننا قمنا بنقل متوازي للإطار C^* عند النقطة p^* إلى النقطة p على المنحنى C.

من العلاقات (5.82)، (5.83) يمكن كتابة T^*,b^* كتركيبة خطية من $b,\ T$ على الصورة

$$\left.\begin{aligned} T^* &= T\cos\alpha + b\sin\alpha \\ b^* &= T^* \wedge n^* = T^* \wedge n = b\cos\alpha - n\sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad (5.84)$$

وبقسمة العلاقة (5.82) على العلاقة (5.83) نحصل على العلاقة الخطية الآتية

$$\tau\cos\alpha + k\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{c} \qquad (5.85)$$

ويمكن الحصول على علاقة مماثلة لهذه العلاقة بالنسبة للمنحنى C^* وذلك بعد وضع $-\alpha$ بدلاً من α ، $-c$ بدلاً من c، τ^*،k^* بدلاً من τ،k وأخيراً s^* بدلاً من s أي نحصل على علاقة خطية على الصورة :

$$\tau^* \cos\alpha - k^* \sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{c} \qquad (5.86)$$

وبنفس الطريقة فإن العلاقات المناظرة للعلاقات (5.82)، (5.83) تصبح على الصورة

$$\cos\alpha \frac{ds}{ds^*} = 1 + ck^* \qquad (5.82)'$$

$$\sin\alpha \frac{ds}{ds^*} = c\tau^* \qquad (5.83)'$$

من (5.82)، $(5.82)'$ نحصل على

$$\cos^2\alpha = (1 - ck)(1 + ck^*) \qquad (5.87)$$

من (5.83)، $(5.83)'$ نحصل على

$$\sin^2\alpha = c^2\tau\tau^* \qquad (5.88)$$

من (5.87) يمكن الحصول على k^* على الصورة (بفك الأقواس وترتيب الحدود):

$$k^* = \frac{ck - \sin^2\alpha}{c(1 - ck)} \qquad (5.89)$$

ومن (5.88) نجد أن

$$\tau^* = \frac{\sin^2\alpha}{c^2\tau} \qquad (5.90)$$

بجمع (5.87)، (5.88) نحصل على ($\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$):

$$c^2\tau\tau^* + (1 - ck)(1 + ck^*) = 1 \qquad (5.91)$$

أو في الصورة (بفك الأقواس)

$$c(1 - ck)k^* + c^2\tau\tau^* = ck \qquad (5.92)$$

وهذا يعني أن k^*, τ^* يرتبطان بعلاقة خطية وكذلك فإن k, τ يرتبطان بعلاقة خطية.

وبالتالي نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية:

نظرية (٥.٨):

المنحنيات الفراغية التي تحقق العلاقة الخطية (5.92) هي منحنيات برتراند.

ومن العلاقة (5.90) نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية:

نظرية (٥.٩):

بالنسبة لزوج منحنيات برتراند يتناسب الليّ لأحد منحنيات الزوج تناسب عكسي مع ليّ الآخر.

تصنيف منحنيات برتراند:

نعتبر الآن **المنحنيات التي تحقق العلاقة** الخطية الآتية:

$$\mu\tau + \nu k + \gamma = 0 \qquad (5.93)$$

هذه المنحنيات لها أشكال مختلفة تعتمد على قيم الثوابت μ, ν, γ ونوضح ذلك من خلال الحالات الآتية:

(i) $\nu = \gamma = 0, \tau = 0$ (منحنيات مستوية)

(ii) $\mu = \gamma = 0, k = 0$ (عائلة من الخطوط المستقيمة)

(iii) $\gamma = 0$، $\mu \neq 0, \nu \neq 0$ تصف منحنيات تحقق $\mu\tau + \nu k = 0$ أي أن $\frac{\tau}{k} = -\frac{\nu}{\mu} =$ const. وبالتالي فهي تصف عائلة من المنحنيات الحلزونية.

(iv) $\gamma \neq 0$، $\nu = 0$، $\tau =$ const. وهي تصف عائلة من المنحنيات لها الليّ ثابت

(v) $\nu \neq 0, \gamma \neq 0$. ولدراسة هذه الحالة نحول العلاقة (5.93) إلى الصورة العمودية

$$\tau\cos\alpha + k\sin\alpha = \eta \qquad (5.94)$$

حيث

$$\tan\alpha = \frac{\nu}{\mu}, \eta = \frac{-\gamma}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}$$

$$\therefore \sin\alpha = \frac{\nu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}, \cos\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}$$

$$\therefore \eta = \frac{-\gamma}{\nu}\frac{\nu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}} = \frac{\sin\alpha}{-\frac{\nu}{\gamma}}$$

وبوضع $c = -\frac{\nu}{\gamma}$ نحصل على $\eta = \frac{\sin\alpha}{c}$

إذاً العلاقة (5.94) تأخذ الصورة

$$\tau\cos\alpha + k\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{c} \qquad (5.95)$$

وهي نفس العلاقة (5.85) التي تصف منحنيات برتراند.

(vi) $k = \text{const.}$ ، $\alpha = \frac{\pi}{2}$. لدراسة هذه الحالة نقوم بالتعويض في (5.95) لنحصل على $k = \frac{1}{c}$ حيث c المسافة بين نقطة ما على المنحنى C والنقطة المناظرة لها على المنحنى C^* المرافق له بمفهوم برتراند.

ملاحظة (٥.١١):

المقدار c يساوي نصف قطر انحناء المنحنى C حيث أن متجه الموضع لأي نقطة على المنحنى C^* هو $r^* = r + cn$ وفي هذه الحالة فإن r^* ينطبق على مركز انحناء المنحنى C.

وبهذا نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية:

نظرية (٥.٩):

المنحنى ذو الانحناء الثابت ومنحنى المحل الهندسي لمراكز إنحنائه يكونا زوج من منحنيات برتراند وعكس هذه النظرية صحيح.

ملاحظة (١٢.٥):

من العلاقات (5.84) وحيث أن $n^* = n$ ، إذاً يكون لدينا العلاقة المصفوفية بين الإطار(T, n, b) والإطار (T^*, n^*, b^*) على الصورة

$$\begin{pmatrix} T^* \\ n^* \\ b^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

واضح أن هذه العلاقة هي تحويل خطي عمودي لأن محدد مصفوفة التحويل (مصفوفة دوران) تساوي واحد (موجب) وهو يمثل دوران الإطار (T, n, b) حول المتجه $n = n^*$ (العمود الأساسي للمنحنى C) بزاوية α.

ملاحظة (١٣.٥):

واضح أن محور الدوران $n = n^*$ لا تغيري invariant أي لا يتغير بالدوران حوله بزاوية α.

تمارين (٥)

(١) أوجد العلاقة بين انحناءات الصورة الكروية $G(T), G(n), G(b)$ لمنحنى منتظم.

(٢) أوجد العلاقة بين الليّ لكل صورة من الصور الكروية $G(T),\ G(n),\ G(b)$ لمنحنى منتظم.

(٣) أثبت أنه عند النقط المتناظرة على كل من المميز الكروي $G(T)$ والمميز الكروي $G(b)$ لمنحنى فراغ منتظم يكون الماسان لهذين المميزان متوازيان.

(٤) أثبت أن انحناء المميز الكروي $G(b)$ لمنحنى C هو $k_3=\sqrt{1+(\frac{\tau}{k})^2}$

حيث k، τ هما الانحناء والليّ للمنحنى C.

(٥) أثبت أن نصفا قطري الانحناء للمميز الكروي $G(n)$، $G(b)$ لمنحنى الحلزون الدائري هي $\rho_2=1\,,\ \rho_3=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ على الترتيب.

(٦) أوجد الليّ للمميز الكروي $G(n)$، $G(b)$ لمنحنى فراغ منتظم.
(**إرشاد**: اتبع نفس الخطوات بالنسبة للمميز $G(T)$).

(٧) بالنسبة لمنحنى فراغ منتظم C أثبت أن $\frac{k}{\tau}=\frac{\tau_3}{\tau_1}$ حيث $k\,,\tau$ هما الليّ والانحناء للمنحنى C وأن τ_1,τ_3 هما الليّ للمميز الكروي $G(b)$، $G(T)$ على الترتيب.

(٨) إذا كان المستوى اللاصق عند كل نقطة على المنحنى يمس كرة ثابتة فأثبت أن المستوى المار بالماس والعمودي على العمود الأساسي يمر بمركز الكرة.

(**إرشاد**: العمودي b على المستوى اللاصق يمر بمركز الكرة ويكون على امتداد قطر فيها عند نقطة التماس).

(٩) أثبت أنه بالنسبة لمنحنى المحل الهندسي C_1 لمراكز كرة الانحناء للمنحنى C يتحقق $\rho\rho_1=\sigma\sigma_1$.

(**إرشاد:** استخدم العلاقات التي تعطي k_1,τ_1 بالنسبة للمحل الهندسي لمراكز كرة الانحناء).

(١٠) أثبت أنه إذا كان C منحنى له الانحناء ثابت لجميع نقطة فإن منحنى المحل الهندسي C_1 لمراكز الانحناء يكون له الانحناء ثابت.

(**إرشاد:** إذا كان $k=\text{const.}$ فإن $\dot{\rho}=0$ وعليه فإن $k_1=k$)

(١١) أثبت أنه إذا كان C منحنى إنحنائه ثابت لجميع نقاطه فإن المحل الهندسي C_1 لمراكز الانحناء يكون الليّ له يساوي k^2/τ حيث k,τ هما اللىّ والانحناء للمنحنى C.

(**إرشاد:** ضع $\rho=\dfrac{1}{k}=\text{const.}$ في (5.47))

(١٢) أثبت أن الناشر لمنحنى مستوى يكون مع المنحنى زوج برتراند.

(١٣) أوجد المنحنى الناشر لكل من القطع الناقص والقطع الزائد والقطع المكافئ والدائرة والخط المستقيم (إن أمكن).

(١٤) هل يمكن تعريف المنحنى المنتشر لمنحنى مستوى.

(١٥) أوجد المنحنى المنتشر لمنحنى الحلزون الدائري.

(١٦) أثبت أنه إذا وجد تناظر أحادي بين نقط منحنيين بحيث أن الأعمدة الثانوية تكون منطبقة عند النقط المتناظرة فإن هذه المنحنيات تقع في مستوى.

(**إرشاد:** ضع $\overline{r}=r+\lambda b$ ونفذ نفس خطوات منحنيات براتراند).

(١٧) أثبت أنه إذا وجد تناظر أحادي بين منحنيين $C, \bar{C}$ بحيث أن المماسات عند النقط المتناظرة تكون متوازية فإن الأعمدة الأساسية والأعمدة الثانوية تكون أيضاً متوازية.

(إرشاد: ضع $T(s)=\bar{T}(\bar{s})$ وبالتفاضل بالنسبة إلى s واستخدام صيغ فرينيه).

(١٨) أثبت أن المنحنى المعرف بالدالة الاتجاهية

$$r(u)=c_1\int e(u)du+c_2\int e(u)\wedge e'(u)du$$

حيث $e(u)$ دالة اتجاهية تحقق $|e(u)|=1, |e'(u)|=1$ ، $'=\dfrac{d}{du}$.

هو منحنى برتراند والعكس أي أن منحنى برتراند يمكن تعريفه بالدلة الاتجاهية السابقة حيث c_1, c_2 ثوابت.

(إرشاد: التكامل يختفي بعد المشتقة الأولى $r'(u)$)

(١٩) بين أن المنحنى المنتشر للدائرة هو مركزها.

(٢٠) إذا كان $r(x)=(f(x), g(x))$ منحنى مستوى. أوجد إحداثيات أي نقطة $\tilde{r}(x)$ على المنحنى المنتشر.

(إرشاد: استخدام $\tilde{r}=r+\rho n$ ، $r'=(f', g')$ ،

$$n=\frac{1}{\sqrt{f'^2+g'^2}}(g', -f')\ )$$

(٢١) أوجد الثلاثي المتحرك على امتداد منحنى المحل الهندسي لمركز دائرة الانحناء لمنحنى منتظم $C: r=r(s)$.

(إرشاد: استخدم (5.28)، (5.32)).

(٢٢) أوجد الانحناء واللّيّ لمنحنى المحل الهندسي لمراكز دائرة الانحناء.

(**إرشاد:** أكمل الخطوات التي اتبعتها في التمرين السابق).

(٢٣) بين أن كل من العمود الأساسي n_1 والعمود الثانوي b_1 للميز $G(T)$ للمنحنى C يقع في المستوى المقوم للمنحنى C .

(**إرشاد:** ارجع إلى العلاقات (5.12)، (5.13)).

(٢٤) أثبت أنه إذا كان C انحنائه ثابت لجميع نقاطه فإن المحل الهندسي لمراكز الانحناء يكون له نفس الانحناء للمنحنى C .

(**إرشاد:** ضع $\rho=\frac{1}{k}=\text{const.}$ في (5.45) نحصل على $\tilde{k}=k$)

(٢٥) أثبت أن المنحنى

$$x(u)=(a\cos^2 u, u\cos u\sin u, a\sin u)$$

يقع على سطح كرة (منحنى كروي spherical curve).

(**إرشاد:** احسب $\rho=\frac{1}{k}$, $\frac{1}{\tau}=\sigma$ وتحقق من أن $\dot{}=\frac{d}{ds}$, $\frac{\rho}{\sigma}+(\dot{\rho}\sigma)^{\cdot}=0$)

(٢٦) أوجد شرط أن يقع الحلزون العام على سطح كرة نصف قطرها r أي أوجد شرط أن يكون الحلزون العام منحنى كروي.

(**إرشاد:** ضع $\frac{k}{\tau}=$ ثابت أي $\frac{\rho}{\sigma}=$ ثابت نحصل على $(\dot{\rho}\sigma)^{\cdot}=0$ وهذا يؤدي إلى $\dot{\rho}\sigma=\text{const.}$)

الباب السادس

النظرية الأساسية للمنحنيات في الفراغ

Fundamental Theorem for Curves

الهدف من هذا الباب هو أن نبين كيف أن كل من الانحناء واللّيّ يؤثر في شكل المنحنى. ولهذا فإننا نقوم بإعطاء تقريب قانوني للمنحنى informative approximation بالقرب من نقطة اختيارية عليه. ولذلك نستخدم تقريب تيلور للمنحنى والتعبير عن هذا التقريب كدوال في الانحناء واللّيّ وإطار فرينيه عند هذه النقطة. وفي الجزء الثاني من الباب نعطي النظرية الأساسية لوجود ووحدانية منحنى الفراغ من خلال الانحناء واللّيّ كدوال في بارامتر طول القوس.

(١.٦) التمثيل القانوني المحلي لمنحنى في الفراغ:

Canonical Representation of a Space Curve:

نعتبر منحنى ممثل تمثيل بارامتري طبيعي أي بدلالة بارامتر طول القوس وليكن $C: r = r(s)$ والذي يسمى عادة منحنى سرعته الوحدة unit speed curve لأن $T = \frac{dr}{ds}$ متجه السرعة velocity vector وقيمته هي السرعة ($|\frac{dr}{ds}|=1$) speed. نفرض أن p أي نقطة على المنحنى المنتظم C في الفراغ. نقوم بإجراء انتقال بحيث تصبح p هي نقطة الأصل. بدوران المحاور حول p كي تصبح المتجهات الأساسية $(\underline{T}, \underline{n}, \underline{b})$ على امتداد محاور الإحداثيات منطبقة على حقل المتجهات (e_1, e_2, e_3) عند p ونفرض أن طول القوس على المنحنى C هو s بحيث أن p تناظر البارامتر $s = 0$ (الإحداثي المحلي). في هذه الحالة فإن المنحنى C يحقق

$$\underline{r}(0) \equiv 0 \;, \dot{\underline{r}}(0) \equiv \underline{T}_o \;, (\underline{T}_o, \underline{n}_o, \underline{b}_o) \equiv (e_1, e_2, e_3),$$

$$\ddot{\underline{r}}(s)\,|_{s=0} = \ddot{r}(0) = \dot{T}(s)\,|_{s=0} = kn\,|_{s=0} \quad (6.1)$$

أو
$$\underline{\ddot{r}}(0)=\underline{\dot{T}}_o=k_o\underline{n}_o$$

أيضاً

$$\underline{\dddot{r}}(s)=\frac{d\underline{\dot{T}}}{ds}=\frac{d}{ds}(k\,\underline{n})=-k^2\underline{T}+\dot{k}\,\underline{n}+k\,\tau\underline{b} \qquad (6.2)$$

بالمثل يكون

$$\underline{\dddot{r}}(o)=-k_o^2\underline{T}_o+\dot{k}_o n_o+k_o\tau_o\underline{b}_o \qquad (6.3)$$

حيث

$$\underline{T}_o=\underline{T}(0),\underline{n}_o=\underline{n}(0),\underline{b}_o=\underline{b}(0),$$
$$k_o=k(0),\tau_o=\tau(0),\dot{k}_o=\dot{k}(0)$$

وهذا يعني أن المنحنى له التصاق من الرتبة الثالثة مع المستوى اللاصق عند p أي أن المستوى يشترك مع المنحنى في ثلاث نقط.

وبكتابة مفكوك تيلور Taylor للدالة الاتجاهية $r(s)$ حول النقطة p على الصورة

$$r(s)=r(0)+s\dot{r}(0)+\frac{s^2}{2}\ddot{r}(0)+\frac{s^3}{3!}r^{(3)}(0)+\ldots$$

وبالتعويض من (6.1)، (6.2)، (6.3) نحصل على:

$$r(s)=(s-k_o^2\frac{s^3}{6}+\ldots)T_o+(k_o\frac{s^2}{2}+\frac{k_o s^3}{6}+\ldots)n_o$$
$$+(k_o\tau_o\frac{s^3}{6}+\ldots)b_o \qquad (6.4)$$

أو ما يكافئ

$$r(s)=f_1(s)T_o+f_2(s)n_o+f_3(s)b_o=\sum_{i=1}^{3}f_i e_i$$

حيث f_1، f_2، f_3 مجموع متسلسلات قوى تقاربيه تقارب منتظم في s.

تمثيل المنحنى المعرف بالمتسلسلة (6.4) يسمى **التمثيل القانوني (القياسي)** canonical representation حول النقطة p أي في منطقة جوار مباشر محيطة بالنقطة p وصغيرة صغر كافي.

وباختيارنا السابق لإطار فرينيه $(\underline{T}_o, \underline{n}_o, \underline{b}_o)$ عند النقطة p كمحاور للإحداثيات (ox, oy, oz) للنظام الكارتيزي للإحداثيات (الإطار الثابت) نحصل على معادلة المنحنى بالنسبة للإطار الثابت أي كتابة المتسلسلة (6.4) على الصورة:

$$r(s) = f_1(s)e_1 + f_2(s)e_2 + f_3(s)e_3$$

حيث

$$\begin{aligned} x &= f_1(s) = s - \frac{k_o^2 s^3}{6} + \dots \\ y &= f_2(s) = \frac{k_o s^2}{2} + \frac{k_o s^3}{6} + \dots \\ z &= f_3(s) = \frac{k_o \tau_o s^3}{6} + \dots \end{aligned} \tag{6.5}$$

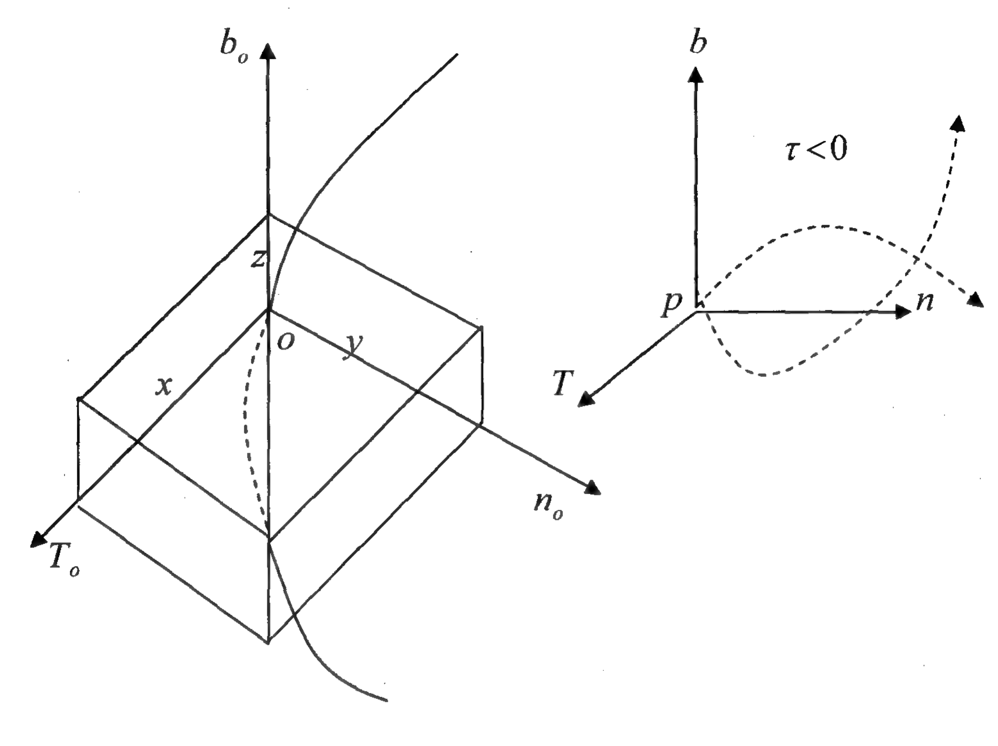
وحيث أن s صغيرة صغر كافي لأن الدراسة بالقرب من نقطة الأصل p وبالتالي نأخذ التقريب الأول في كل مركبة من المركبات x, y, z وليكن على الصورة

$$x = s, \; y = \frac{k_o s^2}{2}, \; z = \frac{k_o \tau_o s^3}{6} \tag{6.6}$$

المعادلات (6.6) تعرف تمثيل بارامتري لمنحنى هو تقريب للمنحنى الأصلي C حول النقطة p وليكن $\tilde{C}$ ويسمى **تقريب فرينيه** للمنحنى C بالقرب من $s=0$ أي بالقرب من p. وبالتالي المنحنى $\tilde{C}$ يعطى من خلال الدالة الاتجاهية

$$\tilde{C} : \tilde{r}(s) = s\,e_1 + \frac{k_o}{2} s^2 e_2 + \frac{k_o \tau_o s^3}{6} e_3 \tag{6.7}$$

كما هو موضح في شكل (٦-١).



شكل (٦ـ١)

الحد الأول في $\tilde{r}(s)$ يعرف المماس للمنحنى C عند $s=0$ (أحسن تقريب خطي best linear approximation) . الحدان الأول والثاني في $\tilde{r}(s)$ يعرفان قطع مكافئ parabola على الصورة

$$\tilde{r}_1(s)=s\,e_1+\frac{k_o s^2}{2}e_2 \qquad (6.8)$$

حيث $x=s\,,y=\frac{k_o s^2}{2}$ هي المعادلات البارامترية للقطع المكافئ وبحذف s نحصل على المعادلة الكرتيزية

$$y=\frac{k_o x^2}{2}$$

هذا المنحنى واقع في المستوى xy ومنطبق على المستوى اللاصق عند $s = 0$. واضح أن هذا المنحنى يتحدد تماماً بالانحناء k_o للمنحنى C عند $s = 0$ كما هو موضح في شكل (٦-٢)$_1$.

الحدان الأول والثالث في $\tilde{r}(s)$ يعرفان منحنى تكعيبي cubic curve على الصورة

$$\tilde{r}_2 = s\,e_1 + \frac{k_o \tau_o s^3}{6} e_3 \qquad (6.9)$$

حيث $x = s\,, z = \frac{k_o \tau_o s^3}{6}$ هي المعادلات البارامترية للمنحنى التكعيبي وبحذف s نحصل على المعادلة الكرتيزية

$$z = \frac{k_o \tau_o x^3}{6}$$

وهي تمثل منحنى واقع في المستوى xz ومنطبق على المستوى المقوم عند $s = 0$ كما هو موضح في شكل (٦-٢)$_2$.

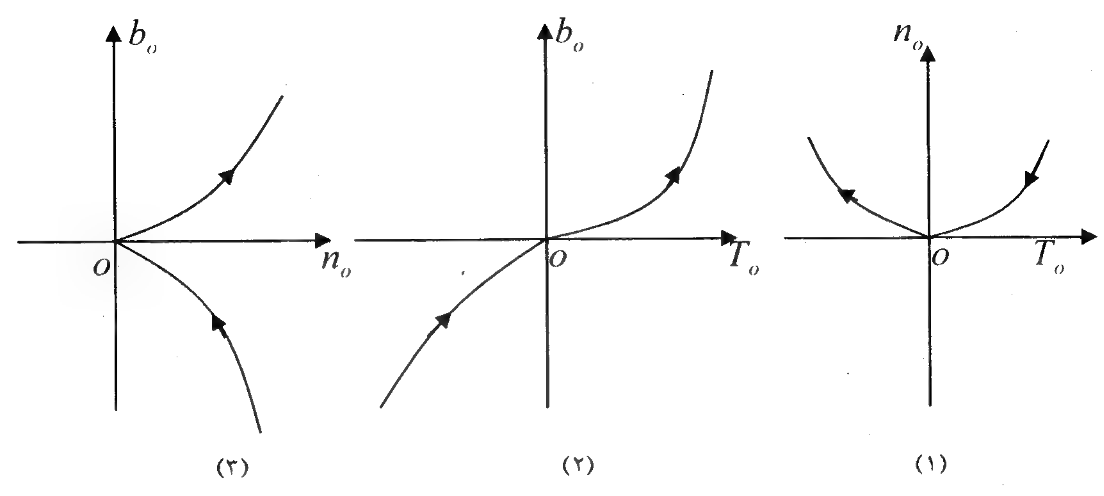
الحدان الثاني والثالث يعرفان منحنى مكافئ تكعيبي cubic parabola على الصورة

$$\tilde{r}_3 = \frac{k_o s^2}{2} e_2 + \frac{k_o \tau_o s^3}{6} e_3 \qquad (6.10)$$

حيث $y = \frac{k_o s^2}{2}\,, z = \frac{k_o \tau_o s^3}{6}$ هي المعادلات البارامترية للمنحنى المكافئ التكعيبي

$$z^2 = \frac{2\tau_o^2}{9k_o} y^3$$

هذا المنحنى واقع في المستوى yz ومنطبق على المستوى العمودي عند $s = 0$. وواضح أن هذا المنحنى يتحدد تماماً بدلالة الانحناء k_o والليّ τ_o عند $s = 0$ كما هو مبين في شكل (٦-٢)$_3$. حيث المنحنى يصعد إلى أعلى عندما الليّ يكون سالب ($\tau < 0$).



(٣) المسقط على المستوى العمودي

(٢) المسقط على المستوى المقوم

(١) المسقط على المستوى اللاصق

شكل (٢.٦)

ملاحظة (١.٦):

الحد $\frac{k_o \tau_o s^3}{6}$ هو أصغر حد في $\bar{r}$ وهذا يعني أن اللي τ_o يتحكم في حركة المنحنى C بحيث تظل عمودية على المستوى اللاصق عند $s = 0$ كما هو موضح في شكل (١.٦).

(٢.٦) المعادلات الذاتية لمنحنى الفراغ:

Intrinsic Equations of a Space Curve:

تعريف (١.٦):

إذا أعطينا الانحناء $k = k(s) > 0$ واللي $\tau = \tau(s)$ كدوال في البارامتر الطبيعي s لمنحنى C في الفراغ فإن هذه الدوال تكون كافية لتحديد المنحنى وفي هذه الحالة يقال أن المنحنى معطى بمعادلاته الذاتية (الطبيعية) Intrinsic equations.

تعريف (٦.٢):

المعادلة الطبيعية natural equation للمنحنى هي معادلة تصف (تحدد) المنحنى بطريقة مستقلة عن أي اختيار للإحداثيات أو التمثيل البارامتري.

دراسة المعادلات الطبيعية بدأت بالمشكلة الآتية:

إذا أعطينا دالتين في بارامتر واحد، أوجد منحنى الفراغ الذي يحقق أن الانحناء واللّيّ له هي الدوال المعطاة.

وكان أويلر Euler أول من أعطى حل تكاملي للمنحنيات المستوية $(\tau = 0)$. وإذا كانت الزاوية الماسية tangential angle بين المماس ومحور x هي θ فإن

$$\theta = \int k(s)ds$$

حيث $k = k(s)$ دالة الانحناء.

إذاً المعادلات $k = k(s)\ ,\ \tau = 0$ يمكن حلها من خلال التمثيل البارامتري للمنحنى حيث

$$x = \int \cos\theta d\theta\ ,\ y = \int \sin\theta d\theta$$

تعريف (٦.٣):

المعادلة التي تعبر عن منحنى المستوى من خلال بارامتر المسافة القوسية ونصف قطر الانحناء ρ أو الانحناء k تسمى معادلة سيزارو Cesaro.

تعريف (٦.٤):

المعادلة التي تعبر عن منحنى المستوى من خلال بارامتر المسافة القوسية والزاوية الماسية تسمى معادلة فيفل Whewell.

وسوف نبرهن الآن كنتيجة لصيغ سيرية ـ فرينيه أن أي منحنى في الفراغ إذا أعطي عن طريق معادلاته الذاتية يتعين تعييناً تاماً بواسطة هذه المعادلات.

إذا كان لدينا منحنيان C, C^* في الفراغ وكانت لهما نفس المعادلات الذاتية، بمعنى أن:

$$k(s) = k^*(s)\ ,\ \tau(s) = \tau^*(s) \qquad (6.11)$$

فإن المنحنيان يكونان متشابهان symmetric فيما عدا موضعهما في الفراغ ونعني بذلك أن أي منحنى وليكن C^* يمكن أن يكون صورة للمنحنى C وذلك بحركة جاسئة R أي مكونة من دوران ثم انتقال على الصورة

$$C^* = RC = AC + \underline{a}$$

حيث A مصفوفة الدوران ، $\underline{a}$ متجه الانتقال.

ملاحظة (٢.٦):

المعادلات الذاتية للمنحنى من الممكن أن تعطى من خلال دوال ضمنية

$$F_1(k,\tau,s) \equiv 0\ ,F_2(k,\tau,s) \equiv 0$$

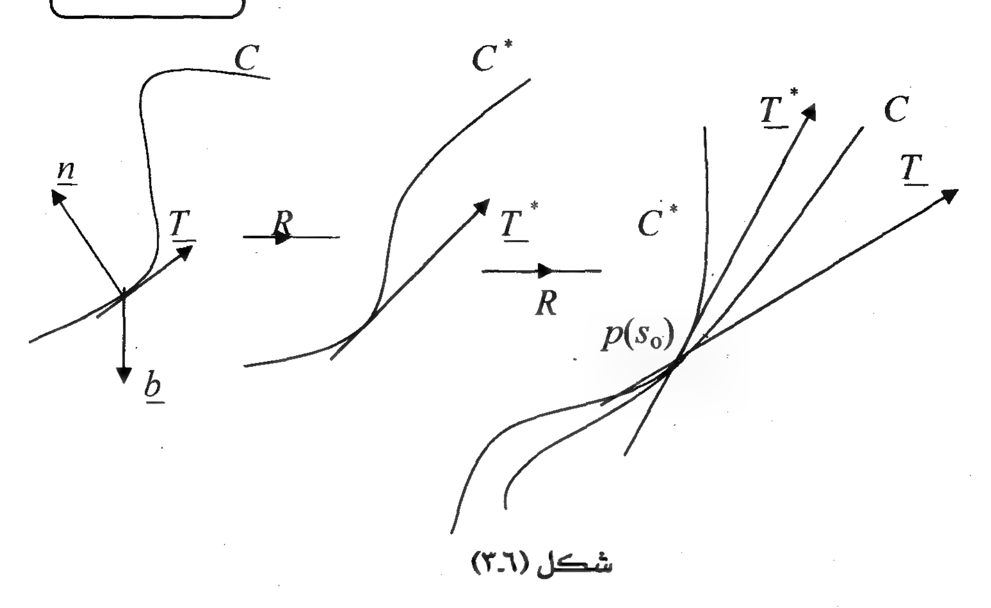
نظرية (١.٦):

أي منحنى في الفراغ يتعين تعييناً تاماً (فيما عدا موضعه) بواسطة الانحناء واللّيّ له كدوال في البارامتر الطبيعي (بارامتر طول القوس) s.

البرهان:

نفرض أن لدينا منحنيين C, C^* لهما نفس الانحناء $k = k(s)$ ونفس اللّيّ $\tau = \tau(s)$ كدالة في بارامتر طول القوس s .

بإزاحة المنحنى C إلى النقطة التي يكون عندها $s = s_o$ هي نقطة البداية على كل من C, C^* ثم بدوران المنحنى C حول هذه النقطة (مركز دوران) حتى ينطبق الثلاثي Traid $(\underline{T}_o, \underline{n}_o, \underline{b}_o)$ للمنحنى C على الثلاثي $(\underline{T}_o^*, \underline{n}_o^*, \underline{b}_o^*)$ بالنسبة للمنحنى C^* كما هو مبين في شكل (٣.٦).



شكل (٣.٦)

بعد إجراء الحركة المتماسكة (الجاسئة) Rigid motion التي جعلت الإطارين $(\underline{T},\underline{n},\underline{b})$ ، $(\underline{T}^*,\underline{n}^*,\underline{b}^*)$ ينطبقا عند $s=s_o$ نبين هل الإطارين عند كل النقاط ينطبقا وإذا كان كذلك فإن المنحنى C^* ينطبق تماماً على المنحنى C ومن أجل ذلك نبين هل الزوايا $\theta_3,\theta_2,\theta_1$ بين $\underline{T},\underline{T}^*$ ، $\underline{n},\underline{n}^*$ ، $\underline{b},\underline{b}^*$ على الترتيب كلها تساوي صفر لجميع نقاط المنحنيين.

ولذلك نتبع الخطوات الآتية:

$$\frac{d}{ds}(\cos\theta_1)=\frac{d}{ds}<\underline{T},\underline{T}^*>$$

$$=<\underline{T},\underline{\dot{T}}^*>+<\underline{\dot{T}},\underline{T}^*>$$

$$=<\underline{T},k\,\underline{n}^*>+<k\,\underline{n},\underline{T}^*>$$ (صيغ فرينيه للإطارين)

$$\frac{d}{ds}(\cos\theta_1)=k\,(<\underline{T},\underline{n}^*>+<\underline{n},\underline{T}^*>)\,,(k=k^*) \qquad (6.12)$$

أيضاً

$$\frac{d}{ds}(\cos\theta_2)=\frac{d}{ds}<\underline{n},\underline{n}^*>$$

$$\frac{d}{ds}(\cos\theta_2) = <\underline{n},(\tau\underline{b}^* - k\underline{T}^*)> + <(\tau\underline{b} - k\underline{T}),\underline{n}^*>$$

$$= -k\,(<\underline{n},\underline{T}^*> + <\underline{n}^*,\underline{T}>) + \tau(<\underline{n},\underline{b}^*> + <\underline{n}^*,\underline{b}>), \quad (6.13)$$

$$(k = k^*, \tau = \tau^*)$$

كذلك

(صيغ فرينيه) $\frac{d}{ds}(\cos\theta_3) = \frac{d}{ds}<\underline{b},\underline{b}^*> = -\tau<\underline{b},\underline{n}^*> - \tau<\underline{n},\underline{b}^*>$

$$= -\tau(<\underline{b},\underline{n}^*> + <\underline{b}^*,\underline{n}>) \quad , (\tau = \tau^*) \qquad (6.14)$$

بجمع (6.12)، (6.13)، (6.14) نحصل على

$$\frac{d}{ds}(<\underline{T},\underline{T}^*> + <\underline{n},\underline{n}^*> + <\underline{b},\underline{b}^*>) = 0$$

وبالتكامل يكون لدينا

$$<\underline{T},\underline{T}^*> + <\underline{n},\underline{n}^*> + <\underline{b},\underline{b}^*> = \text{const.} = c \qquad (*)$$

ولكن عند النقطة $s = s_o$ تتحقق الشروط الابتدائية

$$\underline{T}_o = \underline{T}_o^*, \underline{n}_o = \underline{n}_o^*, \underline{b}_o = \underline{b}_o^*$$

حيث

$$<\underline{T}_o,\underline{T}_o^*> = <\underline{n}_o,\underline{n}_o^*> = <\underline{b}_o,\underline{b}_o^*> = 1 \Rightarrow c = 3$$

وعليه فإنه عند s_o ولجميع قيم s نجد أن المتطابقة (*) تصبح على الصورة:

$$<\underline{T},\underline{T}^*> + <\underline{n},\underline{n}^*> + <\underline{b},\underline{b}^*> = 3 \qquad (6.15)$$

ومن ناحية أخرى نعلم أنه بالنسبة لمتجهين من متجهات الوحدة يتحقق

$$-1 \le <\underline{T},\underline{T}^*> = \cos\theta_1 \le 1$$

وبالمثل يكون لدينا

$$-1 \le < \underline{n}, \underline{n}^* > \le 1 , -1 \le < \underline{b}, \underline{b}^* > \le 1$$

وبالتالي فإن المتطابقة (6.15) تؤدي إلى

$$< \underline{T}, \underline{T}^* > = 1, < \underline{n}, \underline{n}^* > = 1, < \underline{b}, \underline{b}^* > = 1 \qquad (6.16)$$

ومن ذلك نستنتج أنه لجميع قيم s يكون

$$\underline{T} = \underline{T}^*, \underline{n} = \underline{n}^*, \underline{b} = \underline{b}^* \qquad (6.17)$$

أي أن الإطارين منطبقين لجميع نقاط المنحنيين.

وحيث أن $\underline{T} = \frac{d\underline{r}}{ds}, \underline{T}^* = \frac{d\underline{r}^*}{ds}$ إذاً $\frac{d\underline{r}^*}{ds} = \frac{d\underline{r}}{ds}$

وبالتكامل للطرفين بالنسبة إلى s نحصل على

$$\underline{r}(s) = \underline{r}^*(s) + c \quad (c = \text{const}). \qquad (6.18)$$

ومن الشروط الابتدائية عند $s = s_o$ يكون $\underline{r}(s_o) = \underline{r}^*(s_o)$ وبالتالي لجميع قيم s يكون $c = 0$. وبالتالي نحصل على $\underline{r}(s) = \underline{r}^*(s)$ أي أن المنحنيين C, C^* منطبقان وهو المطلوب.

ملاحظة (٣.٦):

النظرية السابقة تسمى النظرية الأساسية لوجود ووحدانية المنحنى
The fundamental Existence and Uniqueness Theorem

ملاحظة (٤.٦):

المعادلات $k = k(s); \tau = \tau(s)$ تسمى التمثيل الذاتي intrinsic للمنحنى في الفراغ وهو مختلف عن التمثيلات المختلفة التي سبق وأن عرفناها والتي تعتمد على محاور الإحداثيات والبارامتر العام u وجميعها خارجية extrinsic أي ليست مرتبطة ارتباطاً ذاتياً بالمنحنى.

مثال (٦.١):

المعادلات الذاتية لمنحنى الحلزون الدائري هي:

$$k = \text{const.} \quad , \quad \tau = \text{const.}$$

مثال (٦.٢):

المعادلات $k = \text{const.}, \tau = 0$ هي المعادلات الذاتية للدائرة التي نصف قطرها هو $\rho = \dfrac{1}{k}$.

مثال (٦.٣):

أوجد المعادلات الذاتية للمنحنى

$$\underline{r} = (2ae'' \cos u, 2ae'' \sin u, ae''), u \in \mathbb{R}$$
$$= ae''(2\cos u, 2\sin u, 1)$$

الحل:

بما أن $\underline{r} = (2ae'' \cos u, 2ae'' \sin u, ae'')$

وبالتفاضل بالنسبة إلى u نحصل على

$$\underline{r}' = \frac{d\underline{r}}{du} = (2ae''(\cos u - \sin u), 2ae''(\sin u + \cos u), ae'')$$

(من صيغ فرينيه) $\therefore \underline{r}' = \underline{T} s' \;, \; ' = \dfrac{d}{du}$

$$\therefore \underline{r}'' = (-4ae'' \sin u, 4ae'' \cos u, ae'')$$

(من صيغ فرينيه) $= \underline{T} s'' + k s'^2 \underline{n}$

$$\therefore \underline{r}''' = (-4ae''(\sin u + \cos u), 4ae''(\cos u - \sin u), ae'')$$
$$= \underline{T} s''' + k \underline{n} s' s'' + k' s'^3 \underline{n} + 2ks' s'' \underline{n} + ks'^3(\tau b - kT)$$

(من صيغ فرينيه) $\underline{r}''' = (\ldots)\underline{T} + (\ldots)\underline{n} + k\,\tau s^3 \underline{b}$,

وبما أن $s'^2 = |\underline{r}'|^2$

$$\therefore s'^2 = a^2 e^{2u}[4(\cos u - \sin u)^2 + 4(\cos u + \sin u)^2) + 1]$$

وباستخدام المتطابقات المثلثية نحصل على

$$s' = 3ae^u \neq 0$$

$$\therefore s = \int_{-\infty}^{u} 3ae^u du = 3ae^u \qquad (6.19)$$

ومن r', r'' يكون لدينا حاصل الضرب الاتجاهي الآتي:

$$\underline{r}' \times \underline{r}'' = [2a^2e^{2u}(\sin u - \cos u), -2a^2e^{2u}(\sin u + \cos u), 8a^2e^{2u}]$$

$$= ks'^3 \underline{b}$$

بأخذ مربع المقياس (الطول) للطرفين نحصل على

$$k^2 s'^6 = 72a^4e^{4u}$$

$$\therefore\ ks'^3 = 6\sqrt{2}a^2e^{2u} \qquad (6.20)$$

ولكن من (6.19) نجد $e^u = \frac{s}{3a}$ وبالتعويض في (6.20) نحصل على

$$k = \frac{2\sqrt{2}}{3s} \qquad (6.21)$$

نكون حاصل الضرب الثلاثي القياسي

$$[\underline{r}', \underline{r}'', \underline{r}'''] = [8a^3e^{3u}(\cos^2 u - \sin^2 u) - 8a^3e^{3u}(\cos^2 u - \sin^2 u) + 8a^3e^{3u}]$$

$$= k^2 \tau s'^6$$

وبتجميع الحدود يكون لدينا

$$k^2 \tau s'^6 = 8a^3e^{3u}$$

ومن (6.20) نحصل على

$$\tau = \frac{8a^3e^{3u}}{72a^4e^{4u}} = \frac{1}{9ae^u} = \frac{1}{3s}$$

$$\therefore\ \tau = \frac{1}{3s} \qquad (6.22)$$

والمعادلتان (6.21)، (6.22) هما المعادلات الذاتية للمنحنى المعطى. هذا المنحنى يحقق أن

$$\frac{\tau}{k} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

أي أن المنحنى هو حلزون عام. ونعطي تفسير لذلك كالآتي:

ملاحظة (٦.٥):

المنحنى في المثال السابق يمكن كتابته على الصورة

$$r = \lambda(u)(2\cos u, 2\sin u, 1)\ ,\ \lambda(u) = ae^u$$

وهو عبارة عن دائرة نصف قطرها 2 واقعة في المستوى $z = 1$ حيث كل نقطة من نقاطها تغيرت بمقدار $\lambda(u) = ae^u$ لنحصل على المنحنى الحلزوني وفي هذه الحالة يقال أن λ مغير البعد equiform (أي مغير للأطوال والقياسات).

مثال (٦.٤):

أوجد المعادلات الذاتية لمنحنى الكتينة

$$\underline{r} = a\cosh\frac{u}{a}\underline{e}_1 + u\,\underline{e}_2\ ,\ a = \text{const.}\ ,\ u \in \mathbb{R}$$

الحل:

حيث أن منحنى الكتينة هو منحنى مستوي فإن $\tau \equiv 0$ ويتبقى لنا أن نعين الانحناء k كدالة في بارامتر طول القوس s.

بتفاضل معادلة المنحنى بالنسبة إلى u نحصل على:

$$\underline{r}' = \frac{d\underline{r}}{du} = \sinh\frac{u}{a}\underline{e}_1 + \underline{e}_2$$

بأخذ المقياس على الطرفين نحصل على:

$$|\underline{r}'| = (1+\sinh^2\frac{u}{a})^{\frac{1}{2}} = \cosh\frac{u}{a} \quad \text{(من المتطابقات الزائدية)}$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى u يكون لدينا

$$\underline{r}'' = \frac{1}{a}\cosh\frac{u}{a}\underline{e}_1,$$

نكون حاصل الضرب الاتجاهي

$$\underline{r}' \wedge \underline{r}'' = -\frac{1}{a}\cosh\frac{u}{a}\underline{e}_3$$

ومن الصيغ التي تعطي الانحناء (من الباب الرابع)

$$k^2 = \frac{|\underline{r}' \wedge \underline{r}''|^2}{|\underline{r}'|^6} = \frac{1}{a^2\cosh^4\bar{u}} \qquad (6.23)$$

حيث $\bar{u} = \frac{u}{a}$ ، $\frac{du}{d\bar{u}} = a \neq 0$. ومن تعريف طول القوس نجد أن

$$s = \int_0^u |r'|du = \int_0^u \cosh\frac{u}{a}du$$

$$= a\sinh\frac{u}{a} = a\sinh\bar{u} \qquad (6.24)$$

$$\therefore s^2 + a^2 = a^2\sinh^2\bar{u} + a^2$$

$$\therefore s^2 + a^2 = a^2\cosh^2\bar{u} \qquad (6.25)$$

وبحذف $\bar{u}$ بين (6.23), (6.25) نحصل على:

$$k = \frac{a}{s^2+a^2}$$

وبذلك تكون المعادلات الذاتية لمنحنى الكتينة هي

$$k=\frac{a}{s^2+a^2},\tau=0$$

ملاحظة (٦.٦):

بالنسبة للمنحنى المستوى تكون أحد معادلاته الذاتية $\tau=0$

ملاحظة (٧.٦):

بالنظر إلى معادلات فرينيه التفاضلية نجد أنها نظام من المعادلات التفاضلية الاتجاهية ذات الرتبة الأولى في T، n، b .

والسؤال الذي يطرح نفسه هل يمكن إيجاد حل لهذا النظام ونجيب على هذا السؤال في حالات خاصة وليكن في حالة المنحنى المستوى:

إذا كان $C:x=x(\theta)$ منحنى مستوى حيث θ الزاوية التي يصنعها المماس له مع محور x_1 فإن متجه وحدة المماس يعطى من

$$T=\cos\theta e_1+\sin\theta e_2 \qquad (6.26)$$

$$\dot{T}=(-\sin\theta e_1+\cos\theta e_2)\dot{\theta}\ ,\ .=\frac{d}{ds}=\frac{d}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}$$

متجه العمودي n على T يعطى من

$$n=-\sin\theta e_1+\cos\theta e_2 \qquad (6.27)$$

$$\dot{n}=(-\cos\theta e_1-\sin\theta e_2)\dot{\theta}$$

$$=(\cos\theta e_1+\sin\theta e_2)(-\dot{\theta})$$

$$\therefore \dot{n}=-\dot{\theta}T$$

وحيث أن المنحنى مستوى فإن $\tau=0$ ومن المعادلة الثانية من معادلات فرينيه نجد أن

$$\dot{n}=-kT$$

وبالتالي فإن معادلات فرينيه تؤول إلى

$$\dot{T}=k\,n\ ,\ \dot{n}=-k\,T$$

ومن (6.26)، (6.27) نجد أن T, n حلول لمعادلات فرينيه إذا كان $k=\dot{\theta}$ أو

$$\theta=\int k\,ds+c$$

إذاً من (6.26) يكون لدينا

$$\begin{aligned}x(s)&=\int T\,ds+c\\&=\int(\cos\theta(s)e_1+\sin\theta e_2)ds+c\\&=\int(\cos\theta(s)e_1+\sin\theta(s)e_2)\frac{ds}{d\theta}d\theta+c\end{aligned}$$

$$\therefore x(s)=\int\frac{1}{k(\theta)}(\cos\theta e_1+\sin\theta e_2)d\theta+c \quad (6.28)$$

مثال (٦.٥):

أوجد المنحنى الذي معادلاته الذاتية $k=\frac{1}{s},\tau=0,s>0$.

الحل:

من المعادلات الذاتية يتضح أن المنحنى مستوى ولذلك نستخدم الصيغ التكاملية (6.28) حيث $k(\theta)=\dot{\theta}=\frac{1}{s}$ وبالتكامل بالنسبة إلى s نحصل على

$$\theta=\log s+c_1 \Rightarrow \log s=\theta-c_1$$

$\therefore\ s=e^{\theta-c_1}$ (العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية)

$$\therefore k=\frac{1}{s}=e^{-(\theta-c_1)}$$

وبالتعويض في (6.28) نجد أن

$$x=\int e^{\theta-c_1}(\cos\theta e_1+\sin\theta e_2)d\theta+c_2$$

وبالتكامل بالتجزيء (e_1 ، e_2 متجهات ثابتة) نحصل على

$$x=\frac{1}{2}e^{\theta-c_1}(\cos\theta+\sin\theta)e_1+\frac{1}{2}e^{\theta-c_1}(\sin\theta-\cos\theta)e_2+c_2$$

وإذا أخذنا $c_2=0$ ، $c_1=\frac{\pi}{4}$ مثلاً نجد أن

$$x=\frac{1}{2}e^{\theta-\frac{\pi}{4}}[(\cos\theta+\sin\theta)e_1+(\sin\theta-\cos\theta)e_2]$$

والذي يمكن كتابته على الصورة (متطابقات مثلثية):

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\theta-\frac{\pi}{4}}[\cos(\theta-\frac{\pi}{4})e_1+\sin(\theta-\frac{\pi}{4})e_2]$$

وبوضع $\phi=\theta-\frac{\pi}{4}$ نحصل على

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\phi}[\cos\phi e_1+\sin\phi e_2]$$

وهي معادلة الحلزون اللوغاريتمي Logarithmic Spiral.

تمارين (٦)

(١) أوجد المنحنى بمعلومية معادلاته الطبيعية (الذاتية) الآتية:

$$k = \cos s , \tau = \sin s$$

عند الشروط الابتدائية

$$\underline{T}_o = (-1,0,0), \underline{n}_o = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \underline{b}_o = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$$

حيث k الانحناء، τ الليّ، $\underline{T}_o, \underline{n}_o, \underline{b}_o$ الثلاثي المتعامد عند $s = 0$.

(**إرشاد:** عوض عن k، τ في معادلات فرينيه وتكامل الطرفين بالنسبة إلى s واستخدام الطرق المعروفة في حل نظام من المعادلات الخطية التفاضلية المتجانسة).

(٢) أوجد المنحنى الذي معادلاته الذاتية هي:

$$k = \frac{1}{as + b}, \tau = 0, s > 0, a > 0$$

(**إرشاد:** اتبع نفس خطوات المثال (٦.٥)).

(٣) إذا كان العمود الأساسي لمنحنى معطى كدالة اتجاهية في بارامتر طول القوس أي أن $n = n(s)$ أوجد المنحنى.

(**إرشاد:** استخدم العلاقة $n(s) = \dot{T}(s) = \frac{d^2T}{ds^2}$ وتكامل الطرفين مرتين بالنسبة إلى s).

(٤) إذا كان العمود الثانوي لمنحنى معطى كدالة اتجاهية في بارامتر طول القوس أي أن $b = b(s)$ أوجد المنحنى.

(**إرشاد:** استخدم العلاقة $b = T \wedge n = T \wedge \dot{T}$ والتكامل للطرفين).

(٥) أوجد المعادلات الذاتية للمنحنيات التي وردت في كل أمثلة الباب الرابع.

(٦) أوجد المعادلات الذاتية للمميز الكروي $G(T)$، $G(n)$، $G(b)$ لمنحنى فراغ C.

(٧) بين أن المعادلات الذاتية للمميز الكروي $G(T)$، $G(n)$، $G(b)$ لمنحنى فراغ C تعتمد على المعادلات الذاتية للمنحنى C.

(**إرشاد:** ارجع إلى الباب الخامس تجد الانحناءات k_1,k_2,k_3 دوال في كل من k ، τ وكذلك بالنسبة لليّ τ_1,τ_2,τ_3).

(٨) أوجد المعادلات الذاتية لكل من المنحنى الناشر والمنتشر لمنحنى فراغ وبين علاقتها بالمعادلات الذاتية للمنحنى الأصلي.

(**إرشاد:** ارجع إلى الباب الخامس حيث كل من الانحناء واللّيّ معرف بدلالة معلومات المنحنى الأصلي).

(٩) أوجد العلاقة بين المعادلات الذاتية لزوج منحنيات برتراند.

(**إرشاد:** انظر الباب الخامس تجد العلاقات مباشرة).

(١٠) أوجد العلاقة بين المعادلات الذاتية لمنحنى المحل الهندسي لمراكز كرة الانحناء والمعادلات الذاتية للمنحنى الأصلي.

(**إرشاد:** ارجع إلى الباب الخامس تجد العلاقات مباشرة).

الجزء الثالث (الهندسة الذاتية والخارجية للسطوح في الفراغ الثلاثي)

الباب السابع

السطح المنتظم في الفراغ الثلاثي

Regular Surface

يعتبر هذا الباب تطبيق على الدالة الاتجاهية في متغيرين وفيه نقدم تعريف السطح المنتظم من خلال التمثيلات المختلفة وخصوصاً التمثيل البارمتري والدالة الضمنية وصورة مونج. ونتعرض لمفهوم الانتظام وتوجيه السطح والتعرف على النقاط الشاذة عليه. ونقدم تعريف الغطاء البارامتري والخطوط على السطح وكذلك حساب حقلْ متجه الوحدة العمودي على السطح والمستوى المماس له عند أي نقطة منتظمة.

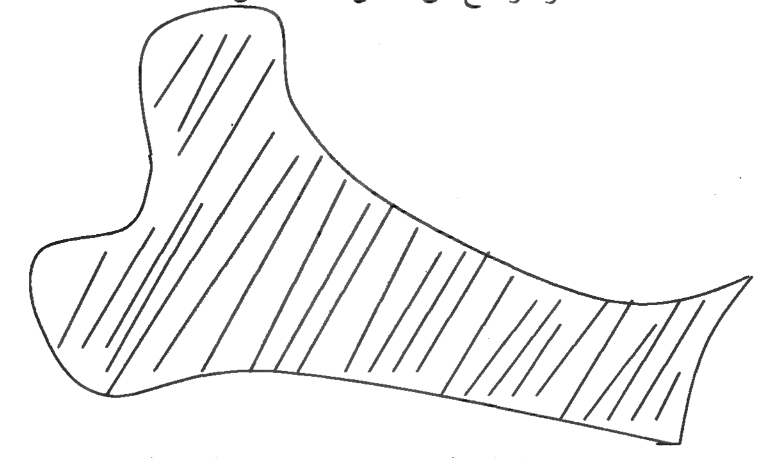
(١.٧) مقدمة (بديهيات عن السطوح): Intuition Surfaces

في الحياة اليومية نرى سطوح كثيرة مثل البالونات والأنابيب وأكواب الشاي والأغشية الرقيقة مثل فقاعات الصابون والتي تمثل نماذج فيزيائية ولدراسة هندسة هذه السطوح تحتاج إلى إحداثيات لعمل الحسابات اللازمة. هذه السطوح موجودة في الفراغ الثلاثي لكن لا يمكن أن نفكر بأنها ثلاثية البعد. على سبيل المثال إذا قطعنا أسطوانة مقطع طولي فإنه يمكن فردها أو بسطها unroll لتصبح قطعة مستوية flat على سطح مكتب. هذا يوضح أن هذه السطوح ثنائية البعد بالوراثة inherently ولهذا يجب وصفها بإحداثيين. هذا يعطينا الانطباع الأول عن كيفية الوصف الهندسي للسطوح. بالتحديد نحاول فرد spread قطعة من المستوى حول سطح ويتطلب ذلك تمدد stretching (بلا إنقطاع) ولي (ضغط squeezing أو إنحناء bending) twisting بدون لصق gluing أو تمزيق tearing وهذا يوضح كيف تظهر منحنيات السطح في الفراغ. هذا الفرد يقدم إحداثيات لعمل حساب التفاضل والتكامل على السطح. حساب التفاضل على السطح يمكننا من الوصف الهندسي للسطح مثل حساب التفاضل الخاص بصيغ فرينيه بالنسبة للمنحنى.

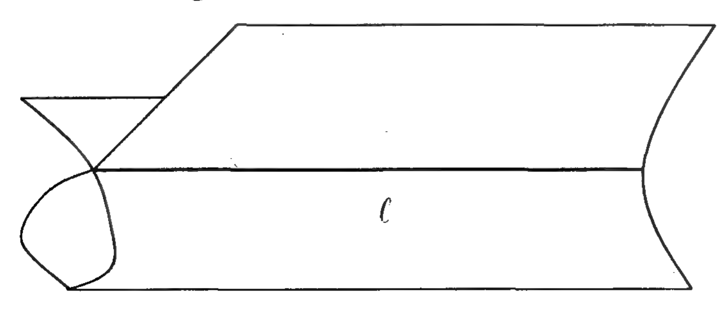
السطح المنتظم regular surface يمكن الحصول عليه من تشويه deforming قطع من الورق المستوية وترتيبها بطريقة ما بحيث الشكل الناتج يكون خالي من النقاط الحادة sharp point أو الأنياب cusps أو الأحرف المدببة cuspidal edges أو التقاطعات الذاتية (السطح يقطع نفسه) self intersections وبالتالي يمكن التحدث عن المستوى المماس عند نقاط الشكل.

وبالتالي يمكن القول أن السطح في الفراغ الثلاثي الإقليدي $\mathbb{R}^3$ وهو مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ (بمعنى تجمع خاص من النقاط) وبالطبع ليست كل المجموعات الجزئية تكون سطوح وبالتأكيد نعني سطوح ملساء smooth وثنائية البعد.

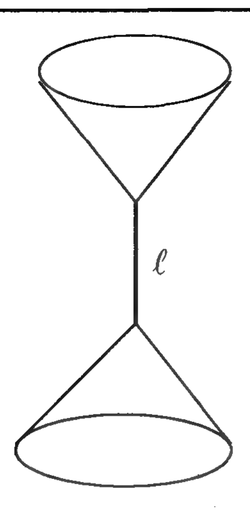
ونوضح ذلك من خلال سطوح تبدو محلياً مثل ورقة ثنائية البعد مطوية twisted sheet كما هو موضح من خلال الأشكال (٧ـ١)، (٧ـ٢)، (٧ـ٣)، (٧ـ٤).



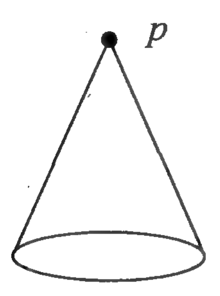
شكل (٧ـ١): مجموعة جزئية تمثل سطح



شكل (٧ـ٢): مجموعة جزئية ليست سطح



شكل (٣.٧): مجموعة جزئية ليست سطح



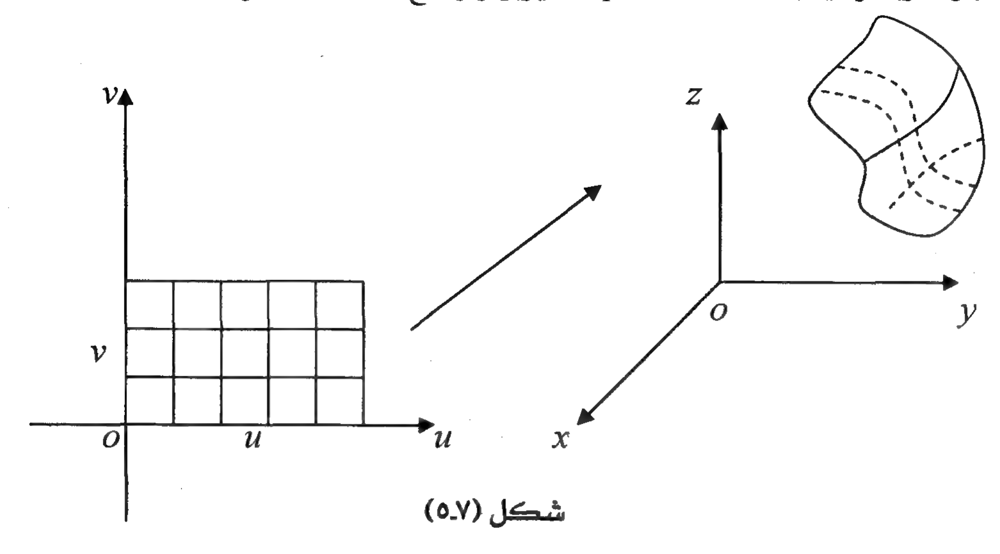
شكل (٤.٧): مجموعة جزئية ليست سطح

نلاحظ أن شكل (٢.٧) لا يمثل سطح بسبب خط التقاطع ℓ ولكن نفس الشكل بعد حذف خط التقاطع يصبح سطح. كذلك في شكل (٣.٧) الشكل لا يمثل سطح بسبب الخط ℓ الواصل بين رؤوس المخروطين. وفي شكل (٤.٧) نرى أن الشكل ليس سطح بسبب رأس المخروط (ناب) أي أن المخروط بدون رأسه يصبح سطح.

ملاحظة (١.٧):

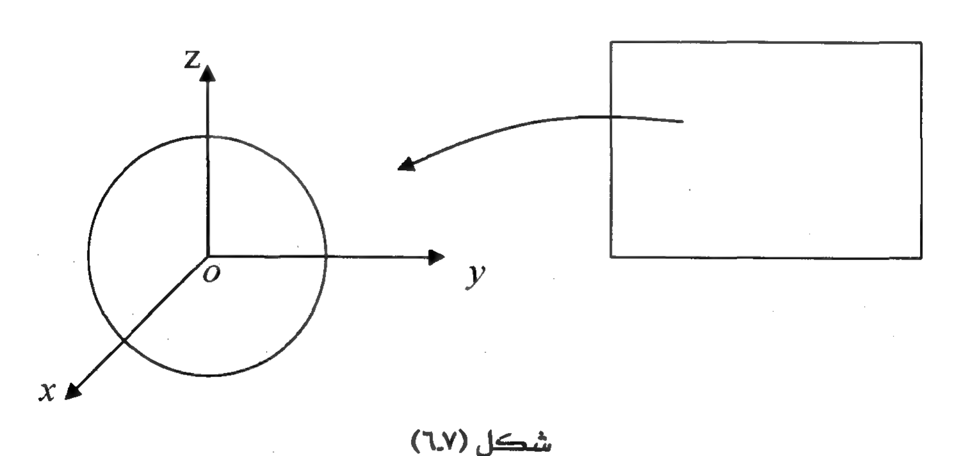
المنحنى المنتظم يعني وجود متجه مماس غير صفري وبالنسبة للسطوح يعني وجود مستوى مماس معرف تعريف جيد well-defined.

بديهياً السطوح في الفراغ الثلاثي تكون ثنائية البعد ونستطيع أن تمثلها بارامترياً (وسيطياً) parametric بمتغيرين ونوضح ذلك في شكل (٧ـ٥).



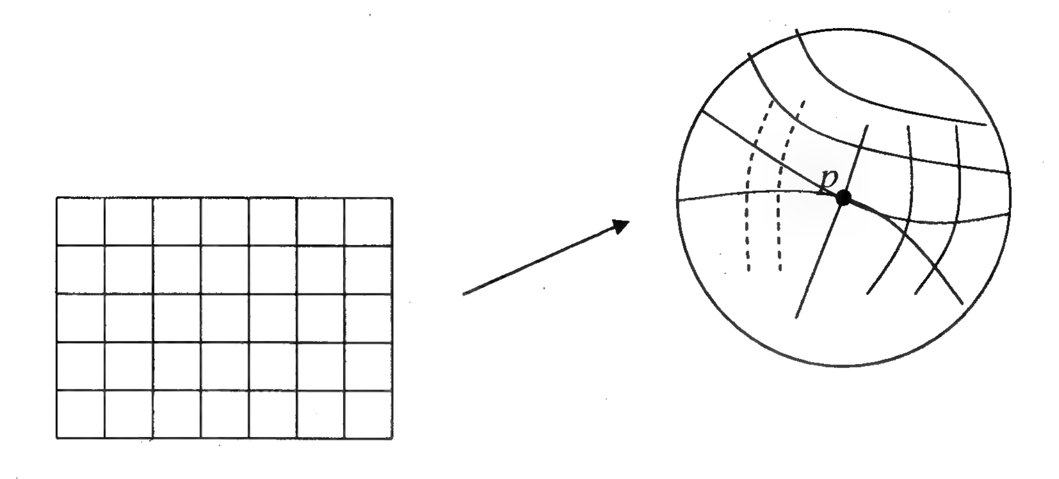
شكل (٧ـ٥)

والسؤال الآن كيف نمثل الكرة (مثلاً) بارامترياً شكل (٧ـ٦).



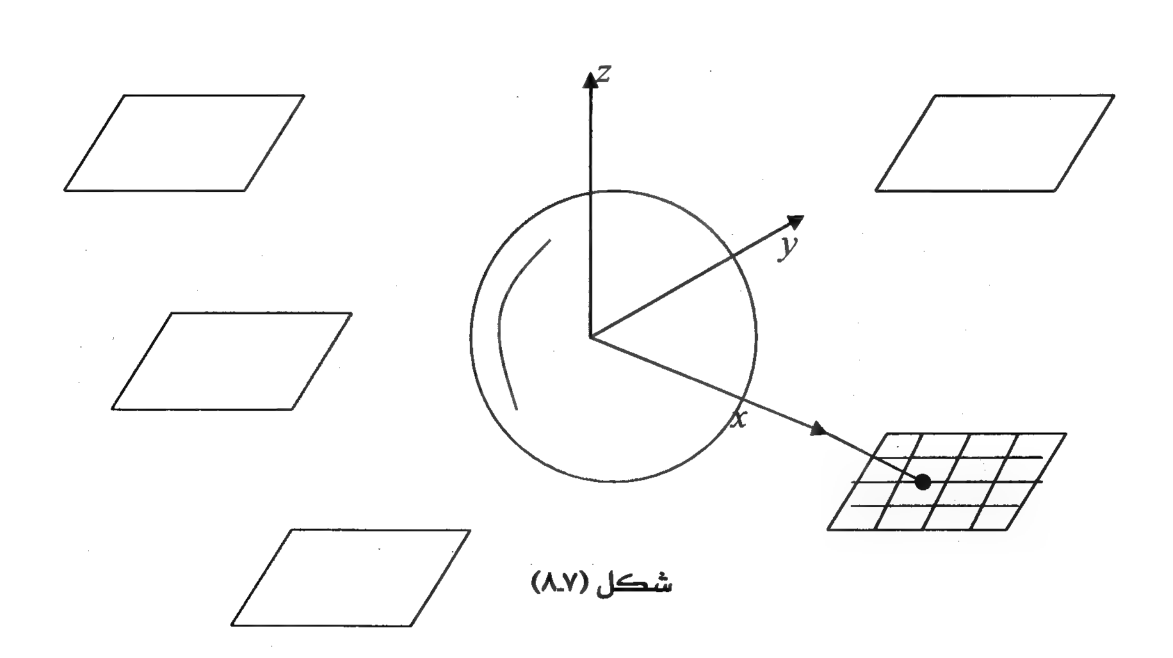
شكل (٧ـ٦)

قد يفشل التمثيل البارامتري فمثلاً الكرة لا يمكن تمثيلها بارامترياً مع المستوى بطريقة حسنة nicely حيث المشكلة تظهر عند النقطة p كما هو موضح في شكل (٧ـ٧).



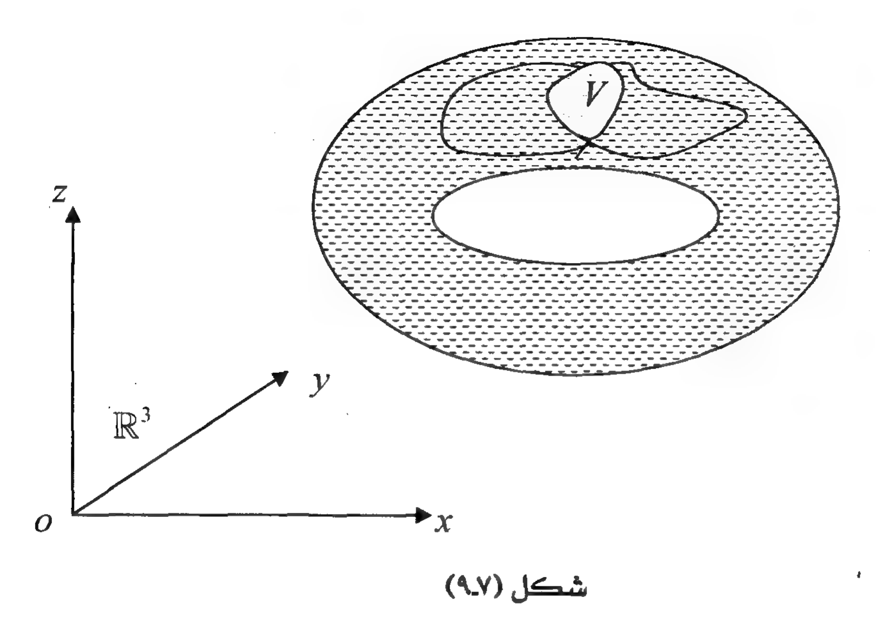


شكل (٧-٧)



شكل (٧-٨)

قد توجد منطقة تقاطع V (overlap) بين تمثيلات بارامترية مختلفة. كما هو موضح بالشكل (٧-٩).



شكل (٧-٩)

وفي ختام هذه المقدمة نعطي الملاحظات الآتية:

ملاحظة (٧-٢):

السطح هو مجموعة جزئية من نقاط الفراغ له تمثيلات بارامترية (من خلال بارمترين) متعددة لكل منها يسمح بتمثيل بارامتري لجزء فقط من السطح.

ملاحظة (٧-٣):

التمثيلات البارامترية من الممكن أن تتقاطع مثل خرائط الكرة الأرضية فمثلاً الاتحاد السوفيتي سابقاً قد يوجد في خريطة (تمثيل بارامتري) أسيا وكذلك في خريطة أوروبا.

تعريف (٧-١):

الخاصية الهندسية هي خاصية لا تعتمد على الإطار الإحداثي الثابت للفراغ الإقليدي $\mathbb{R}^3$ كما أنها مستقلة تماماً عن التمثيلات البارامترية أي أنها خاصية لاتغيريه invariant.

ملاحظة (٤.٧):

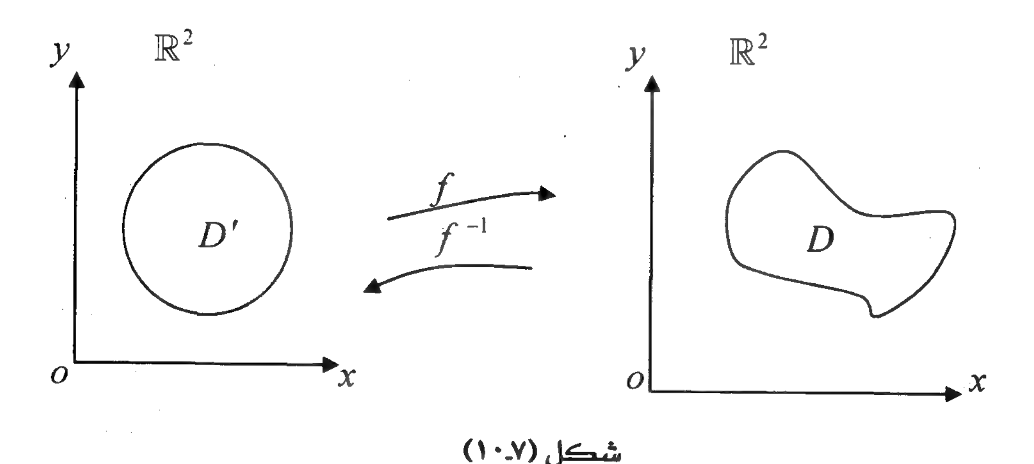
كل ما عرضناه في هذه المقدمة كتب بطريقة مختصرة وسوف نجعله أكثر دقة وتفصيلاً في باقي أجزاء الباب.

(٢.٧) مفهوم السطوح: The Concept of the Surfaces

نفرض أن D جزء من مستوى ما وأن D' المنطقة الموجودة داخل دائرة ما والتي تسمى قرص مفتوح open disk أي أن

$$D' = \{(x^1, x^2) : (x^1)^2 + (x^2)^2 < a^2\}$$

إذا كانت D صورة للقرص المفتوح D' بواسطة راسم توبولوجي فإن D تسمى منطقة بسيطة elementary region أي أن D منطقة بسيطة إذا كان وكان فقط $D = f(D')$ حيث f راسم توبولوجي (f راسم تناظر أحادي وأن f, f^{-1} دوال متصلة بمفهوم التوبولوجي). في هذه الحالة يقال أن D تكافئ D' تكافؤ هوميومورفيك كما هو موضح في شكل (٧-١٠).



شكل (٧-١٠)

نفرض أن C منحنى بسيط مغلق في المستوى. من نظرية جوردان Jordan Theory نجد أن C يقسم المستوى إلى جزئين، أحد هذه الأجزاء محدود finite والآخر غير

محدود infinite والجزء المحدود في هذه الحالة يمكن اعتباره صورة قرص مفتوح بواسطة راسم توبولوجي.

مثال (١.٧):

المناطق الموجودة داخل كل من المربع والمستطيل والقطع المكافئ هي مناطق بسيطة.

تعريف (٢.٧):

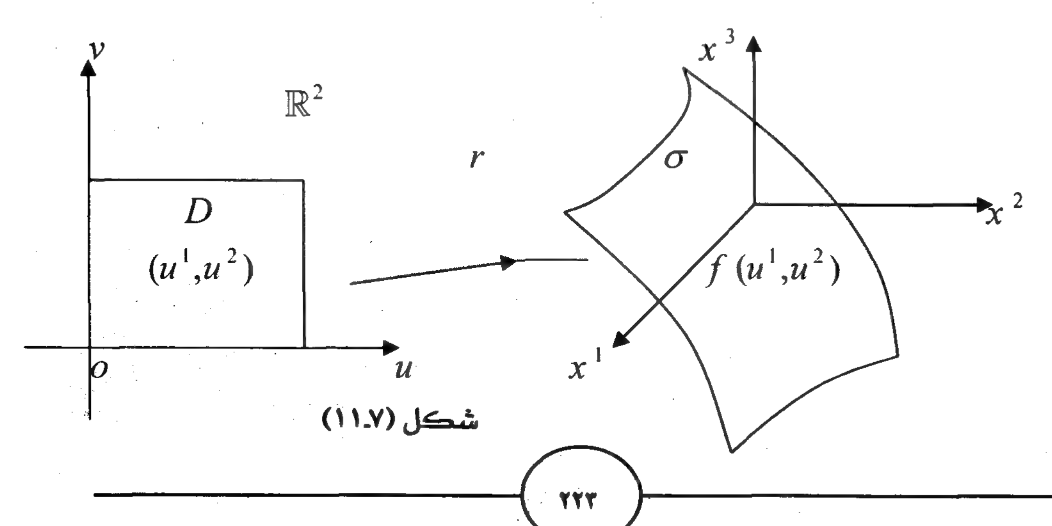
مجموعة النقط σ في الفراغ E^3 تسمى بالسطح الأولي elementary surface إذا كانت محددة لمنطقة بسيطة D في مستوى ما بواسطة راسم توبولوجي أي أن σ سطح أولي إذا كان وكان فقط $\sigma=f\ (D)$ حيث f راسم توبولوجي.

نفرض أن u^1,u^2 هي الإحداثيات الكارتيزية لأي نقطة في المنقطة D وأن x^1,x^2,x^3 هي إحداثيات النقطة المناظرة لها على السطح البسيط. الإحداثيات x^1,x^2,x^3 لنقط السطح البسيط هي دوال في إحداثيات نقط المنطقة D أي أن

$$x^1=f_1(u^1,u^2),x^2=f_2(u^1,u^2),x^3=f_3(u^1,u^2)$$

هذا النظام من المعادلات يسمى بمعادلات السطح σ في الصورة البارامترية وهذه المعادلات تكافئ الصورة الاتجاهية

$$\underline{r}=\underline{r}(u^1,u^2)=(x^1(u^1,u^2),x^2(u^1,u^2),x^3(u^1,u^2)) \quad (7.1)$$



شكل (١١.٧)

حيث الدالة الاتجاهية $\underline{r} = \underline{r}(u^1, u^2)$ وحيدة القيمة single valued والإحداثيات البارامترية u^1, u^2 تسمى بالإحداثيات المنحنية curvilinear coordinates وعند تثبيت u^1 أو u^2 فإننا نحصل على منحنى يقع على السطح. هذه المنحنيات تسمى بمنحنيات الإحداثيات.

تعريف (٣.٧):

المجموعة σ من نقط الفراغ E^3 تسمى بالسطح البسيط simple surface إذا كانت هذه المجموعة مترابطة connected وكل نقطة $x \in \sigma$ تقع داخل منطقة مجاورة من σ بحيث أن المنطقة المجاورة تكون سطح أولي.

ويمكن أن نرى أن مجموعة السطوح الأولية هي مجموعة جزئية من مجموعة السطوح البسيطة ومثال على ذلك

مثال (٢.٧):

الكرة هي سطح بسيط وليس سطح أولي.

تعريف (٤.٧):

السطح البسيط يقال أنه متكامل complete إذا كانت نقطة النهاية لأي متتابعة تقاربيه من النقط التي على السطح هي أيضاً نقطة على السطح.

مثال (٣.٧):

سطح الكرة ومجسم القطع المكافئ peraboloid سطوح متكاملة ولكن الجزء الكروي open ball (دون المحيط) ليس سطح متكامل.

تعريف (٥.٧):

إذا كان السطح البسيط المتكامل محدود فإن السطح يسمى بالسطح المغلق closed.

مثال (٤.٧):

سطح الكرة وسطح قارب النجاة torus سطوح مغلقة.

تعريف (٦.٧):

المنطقة المجاورة للنقطة $\underline{x}$ على السطح σ هي الجزء المشترك بين σ وأي منطقة مجاورة للنقطة $\underline{x}$ في الفراغ E^3. ولهذا فإن كل نقطة على السطح البسيط لها منطقة مجاورة من هذا السطح عبارة عن سطح أولي.

وبالتالي فإنه عند ذكر المنطقة المجاورة لنقطة ما على السطح البسيط نعني بها سطح أولي مجاور لهذه النقطة.

تعريف (٧.٧):

المجموعة σ من نقط الفراغ E^3 تسمى بالسطح العام إذا كانت هي صورة لسطح بسيط بواسطة راسم توبولوجي محلي في الفراغ E^3.

تعريف (٨.٧):

يقال أن الرواسم $f_i : \sigma_i \longrightarrow \sigma \,, i = 1, 2$ تعرف نفس السطح العام σ إذا وجد تناظر أحادي بين نقط σ_1 ، σ_2 بحيث أن صور النقط المتناظرة لهذين السطحين تنطبق على السطح σ ، حيث σ_i سطوح بسيطة.

نفرض أن السطح العام σ معطى بواسطة راسم توبولوجي محلي $f : \bar{\sigma} \longrightarrow \sigma$ حيث $\bar{\sigma}$ سطح بسيط. في هذه الحالة تكون المنطقة المجاورة للنقطة $f(\underline{x})$ على السطح العام σ هي صورة لمنطقة مجاورة للنقطة $\underline{x}$ على السطح $\bar{\sigma}$ بواسطة الراسم f.

بما أن f راسم توبولوجي في المنطقة المجاورة للنقطة $\underline{x}$ فإن $f(\underline{x})$ لها منطقة مجاورة على σ عبارة عن سطح أولي.

(٣.٧) السطح المنتظم: Regular Surface

تعريف (٩.٧):

السطح σ يقال أنه سطح منتظم (قابل للتفاضل k من المرات) إذا كان كل نقطة من نقطاه لها منطقة مجاورة تسمح بتمثيل بارامتري منتظم على الصورة:

$$x^i = x^i(u^\alpha) = x^i(u^1, u^2), i = 1,2,3; \alpha = 1,2 \qquad (7.2)$$

حيث x^i دوال منتظمة (دوال منتظمة وقابلة للتفاضل k من المرات) معرفة في منطقة $D \subset \mathbb{R}^2$ من المستوى uv.

فمثلاً التمثيل البارامتري للسطح هو

$$\underline{r} = \underline{r}(u^1, u^2)$$

أو

$$\underline{r} = \underline{r}(u^\alpha),$$ حيث $\alpha = 1,2$

أو ما يكافئ

$$x^i = x^i(u^\alpha), i = 1,2,3; \alpha = 1,2$$

وسنستخدم في معالجتنا لنظرية السطوح أسلوب أينشتين الاختزالي الجمعي Einstein's summation convention المشار إليه في الباب الأول.

ولذلك نعتبر مجموعتين من الرموز الترقيمية أحدهما لاتينية i, j, k ومداها هو 1,2,3 وأخرى إغريقية $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ومداها هو 1, 2 . توضيحاً لذلك نعتبر الأمثلة الآتية:

$$a^i b_i = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 \,, \quad A_{\alpha\beta} B^\alpha = A_{\alpha 1} B^1 + A_{\alpha 2} B^2$$

$$A_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} = A_{11} B^{11} + A_{12} B^{12} + A_{21} B^{21} + A_{22} B^{22}$$

نظرية (١.٧):

إذا كانت $x^i = x^i(u^\alpha) = x^i(u^1, u^2), i = 1,2,3$ هي دوال منتظمة في المنطقة D من المستوى u^1u^2 والتي تحقق أن المصفوفة الجاكوبية

$$\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(u^1, u^2)} = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \end{bmatrix} \qquad (7.3)$$

لها المرتبة 2 عند كل نقطة $(u^1, u^2) \in D$ فإن المعادلات (7.2) تعين سطح ما σ هو صورة لسطح بسيط D بواسطة راسم توبولوجي محلي والذي يحدد للنقطة $(u^1, u^2) \in D$ نقطة في الفراغ إحداثياتها تعطى بالمعادلات (7.2).

البرهان:

لإثبات هذه النظرية نحاول إثبات أن الراسم

$$f :(u^1,u^2)\in D \longrightarrow \underline{r} = \underline{r}(u^1,u^2)\in\sigma\subset E^3$$

راسم أحادي (متباين) محلي. نفرض على العكس أن الراسم غير أحادي ولذلك توجد النقطة (u_o^1,u_o^2) بحيث أنه في النقطة المجاورة لها والصغيرة صغراً كافياً يمكن اختيار النقطتين $(u^\alpha)=(u^1,u^2),(v^\alpha)=(v^1,v^2)\in D$ والتي تحقق المعادلات

$$x^i(u^\alpha)-x^i(v^\alpha)=0, i=1,2,3;\alpha=1,2$$

أو ما يكافئ

$$x^i(u^1,u^2)-x^i(v^1,v^2)=0, i=1,2,3$$

ولكن

$$\begin{aligned} x^i(u^1,u^2)-x^i(v^1,v^2) &= x^i(u^1,u^2)-x^i(u^1,v^2) \\ &\quad +x^i(u^1,v^2)-x^i(v^1,v^2) \\ &= (u^2-v^2)x_2^i(u^1,\theta^i)+(u^1-v^1)x_1^i(\lambda^i,v^2)=0 \end{aligned}$$

(وذلك باستخدام مفكوك تيلور في منطقة الجوار المباشر من الرتبة الأول).

أي يكون لدينا نظام المعادلات الخطية (في المجاهيل u^1-v^1 ، u^2-v^2) المتجانسة الآتية:

$$(u^2-v^2)x_2^i(u^1,\theta^i)+(u^1-v^1)x_1^i(\lambda^i,v^2)=0, i=1,2,3 \quad (7.4)$$

حيث

$$x_\alpha^i=\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha},\alpha=1,2$$

نفرض أن u^1-v^1,u^2-v^2 لا يساويان الصفر في آن واحد ومن المعادلات (7.4) يكون للمصفوفة (أنظر حل المعادلات الخطية المتجانسة في الجبر الخطي)

$$\begin{bmatrix} x_1^1(\lambda^1,v^2) & x_2^1(u^1,\theta^1) \\ x_1^2(\lambda^2,v^2) & x_2^2(u^1,\theta^2) \\ x_1^3(\lambda^3,v^2) & x_2^3(u^1,\theta^3) \end{bmatrix} \qquad (7.5)$$

مرتبة Rank أقل من 2، أي أن جميع محددات الرتبة الثانية تنعدم في القيمة ومن استمرار الدوال x_2^i, x_1^i ينتج أن جميع محددات الرتبة الثانية للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \\ x_1^3 & x_2^3 \end{bmatrix}$$

تنعدم عند النقطة (u_o, v_o) أي أن مرتبة هذه المصفوفة تقل عن العدد 2 وحيث أن المصفوفة (7.5) هي المصفوفة البديلة Transpose للمصفوفة (7.3) ولذلك نكون قد توصلنا إلى تناقض. أي أنه لابد أن يكون الراسم $f : D \longrightarrow \sigma$ راسم توبولوجي.

نظرية (٢،٧):

نظام المعادلات (7.2) يمثل سطحاً في الفراغ إذا كان وكان فقط مرتبة المصفوفة الجاكوبية (7.3) تساوي 2.

البرهان:

المصفوفة الجاكوبية تعطى من (7.3) ولذلك نعتبر الحالات الآتية:

(i) مرتبة المصفوفة (7.3) تساوي صفراً وفي هذه الحالة لابد وأن تنعدم جميع عناصر المصفوفة.

أي أن
$$x_\alpha^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} = 0; i = 1,2,3, \alpha = 1,2$$

وبالتالي يكون $x^i = a^i =$ const. ولذلك المجموعة (7.2) تمثل نقطة ثابتة $(x^i) = (a^1, a^2, a^3)$ في الفراغ E^3.

(ii) مرتبة المصفوفة (7.3) تساوي 1. في هذه الحالة توجد 1-3 = 2 من العلاقات التي تربط الدوال الإحداثية x^i وتكون خالية تماماً من u^1,u^2 أي توجد العلاقات

$$f_1(x^1,x^2,x^3)=0, f_2(x^1,x^2,x^3)=0$$

التي تمثل معاً منحنى في الفراغ أي أن المعادلات (7.2) تمثل منحنى فر اغي وليست سطحاً.

(iii) مرتبة المصفوفة (7.3) تساوي 2 وعليه يجب أن ترتبط الدوال x^i بعلاقة واحدة $f(x^i)=f(x^1,x^2,x^3)$ وهذه تمثل سطحاً في الفراغ أي أن مجموعة المعادلات (7.2) تمثل سطحاً في الفراغ. وفي هذه الحالة تسمى المعادلات (7.2) التمثيل البارامتري للسطح ويعطى بالمعادلة الاتجاهية

$$\begin{aligned} r(u^1,u^2) &= r(u^\alpha)=(x^i(u^\alpha)) \\ &= (x^1(u^1,u^2), x^2(u^1,u^2), x^3(u^1,u^2)) \qquad (7.6) \end{aligned}$$

إذا كانت الدالة الاتجاهية (7.6) لها مشتقات جزئية متصلة لأي رتبة بالإضافة إلى $\underline{r}_1,\underline{r}_2\neq 0$ حيث

$$\underline{r}_\alpha=\frac{\partial \underline{r}}{\partial u^\alpha}, \alpha=1,2 \qquad (7.7)$$

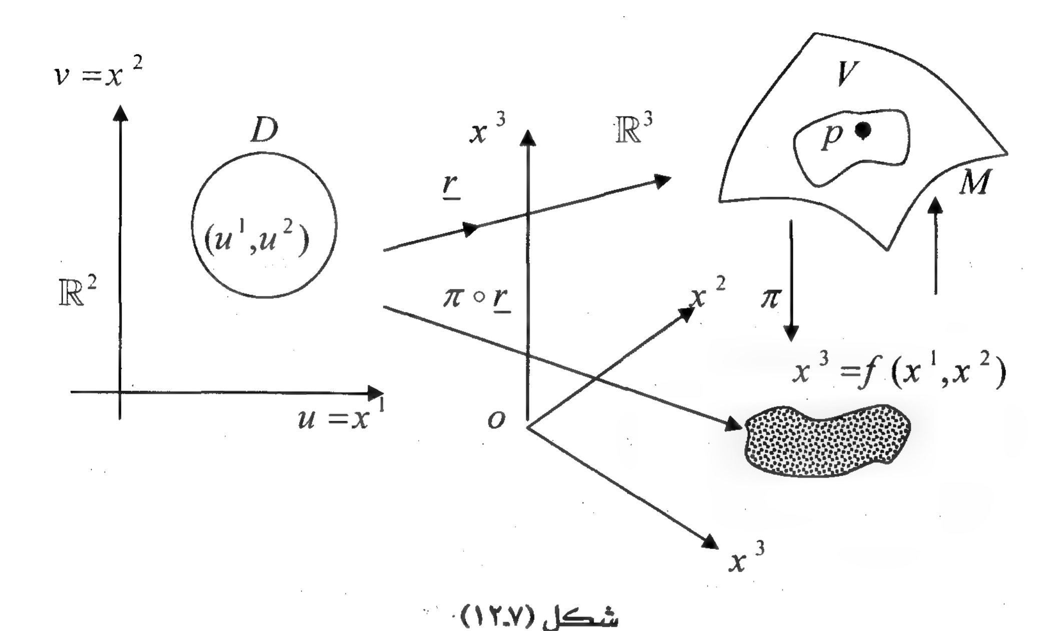
فإن التمثيل البارامتري (7.2) أو (7.6) يسمى تمثيل بارامتري منتظم.

باختيار مناسب لمحاور الإحداثيات x^1,x^2,x^3 فإن بعض السطوح تسمح بتمثيل بارامتري للسطح الكلي على الصورة:

$$x^1=u^1, x^2=u^2, x^3=f(u^1,u^2) \qquad (7.8)$$

حيث $f(u^1,u^2)$ دالة معرفة في المنطقة D من المستوى uv.

معادلات هذا السطح يمكن كتابتها في الصورة الكرتيزية $x^3 = f(x^1, x^2)$ وتسمى صورة مونج Mong form للسطح كما هو موضح في شكل (١٢.٧).



شكل (١٢.٧)

التناظر بين نقط السطح M ونقط المنطقة D من المستوى x^1x^2 نحصل عليه عن طريق راسم الإسقاط π بواسطة خطوط مستقيمة توازي محور x^3. المعادلات البارامترية (7.8) في هذه الحالة تأخذ الشكل

$$\underline{r}(u^1, u^2) = (u^1, u^2, f(u^1, u^2)) \qquad (7.9)$$

تعريف (١٠.٧):

يعرف السطح σ بأنه المحل الهندسي للنقطة $(x^1, x^2, x^3) \in E^3$ التي تتحرك في الفراغ بحيث أن الإحداثيات x^i تحقق المعادلة الضمنية

$$F(x^1, x^2, x^3) = 0 \qquad (7.10)$$

وتسمى هذه المعادلة بالصيغة الضمنية implicit form للسطح في الفراغ E^3.

مثال (٥.٧):

إذا كانت $F(x^1,x^2,x^3)=0$ علاقة خطية في المتغيرات x^1,x^2,x^3 على الصورة $a_i x^i + a_o = 0$ فإن السطح يسمى سطح المستوى في الفراغ حيث العمودي عليه له الاتجاه $a=(a_i)$ وطول العمود الساقط عليه من نقطة الأصل يساوي $\frac{|a_o|}{|a|}$.

مثال (٦.٧):

إذا كانت المعادلة $F(x^1,x^2,x^3)=0$ تمثل علاقة من الدرجة الثانية (أي F كثيرة حدود من الدرجة الثانية) في المتغيرات x^1,x^2,x^3 على الصورة

$$a_{ij}\, x^i x^j + 2a_{10}x^1 + 2a_{02}x^2 + 2a_{03}x^3 + a_0 = 0, a_{ij} = a_{ji}$$

فإن السطح يسمى بسطح الدرجة الثانية quadratic surface في الفراغ مثل سطح الكرة ومجسم القطع الناقص ومجسم المخروط ومجسم القطع المكافئ وهكذا...

نظرية (٣.٧):

نفرض أن $F(x^1,x^2,x^3)$ دالة منتظمة في المتغيرات x^i و M مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق $F(x^1,x^2,x^3)=0$ و $(x_o^1,x_o^2,x_o^3)\in M$ نقطة عندها يتحقق $\nabla F=(F_i)\neq 0$ حيث $F_i=\frac{\partial F}{\partial x^i}$ وبالتالي النقطة (x_o^1,x_o^2,x_o^3) لها منطقة مجاورة بحيث كل نقاط M التابعة لها تكون سطح أولي.

البرهان:

نفرض مثلاً أنه عند النقطة (x_o^1,x_o^2,x_o^3) يكون $F_3=\frac{\partial F}{\partial x^3}\neq 0$. ومن نظرية الدوال الضمنية توجد الأعداد $F_i=\frac{\partial F}{\partial x^i}$ والدالة المنتظمة $f(x^1;x^2)$ المعرفة في المنطقة $|x^\alpha - x_o^\alpha|<\delta_1, \alpha=1,2$ بحيث أن جميع النقط تحقق المعادلة $F(x^1,x^2,x^3)=0$ وهذه النقط تقع داخل المنطقة (متوازي السطوح):

$$|x^1 - x_o^1| = |x^2 - x_o^2| < \delta_1 , |x^3 - x_o^3| < \delta_2$$

إذاً السطح الأولي يعطى بالمعادلة

$$x^3 = f(x^1, x^2), |x^\alpha - x_o^\alpha| < \delta_1 , \alpha = 1,2$$

وهذا يكمل برهان النظرية.

ملاحظة (٥.٧):

في البرهان السابق اعتبرنا السطح ممثل بالمعادلة الضمنية

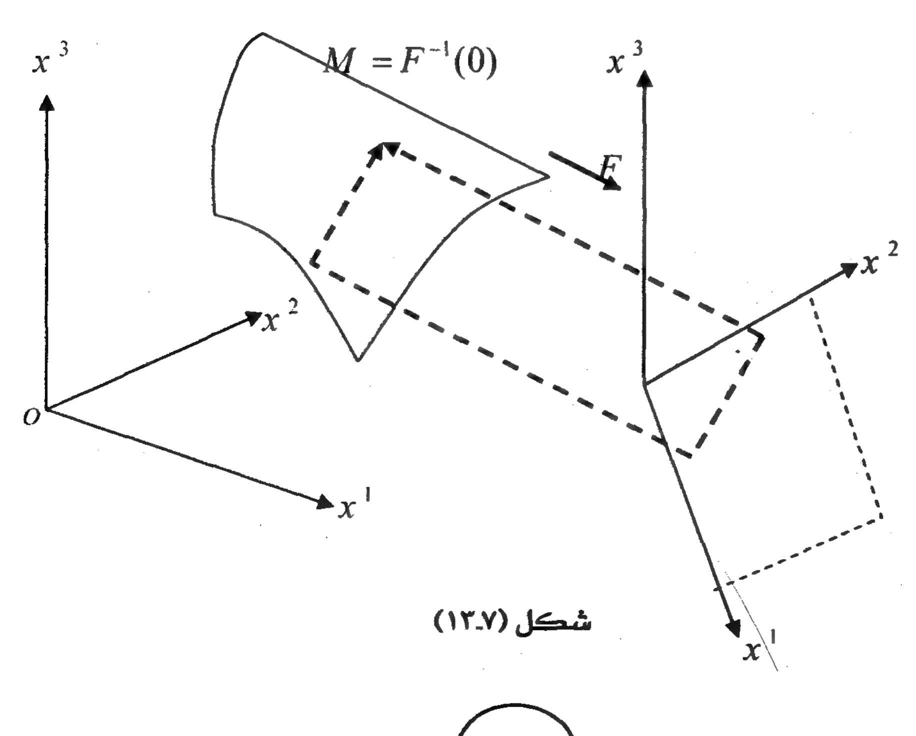
$$F(x^1, x^2, x^3) = 0$$

والتي يمكن صياغتها كالآتي: إذا كان

$$F : M \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x^1, x^2, x^3) = 0 \in F(M)$$

فإن $F^{-1}(0)$ هي سطح منتظم في $\mathbb{R}^3$ كما هو موضح في شكل (١٣.٧).



شكل (١٣.٧)

(٤.٧) تمثيل بارامتري خاص للسطح:

Special Parameterization of a Surface

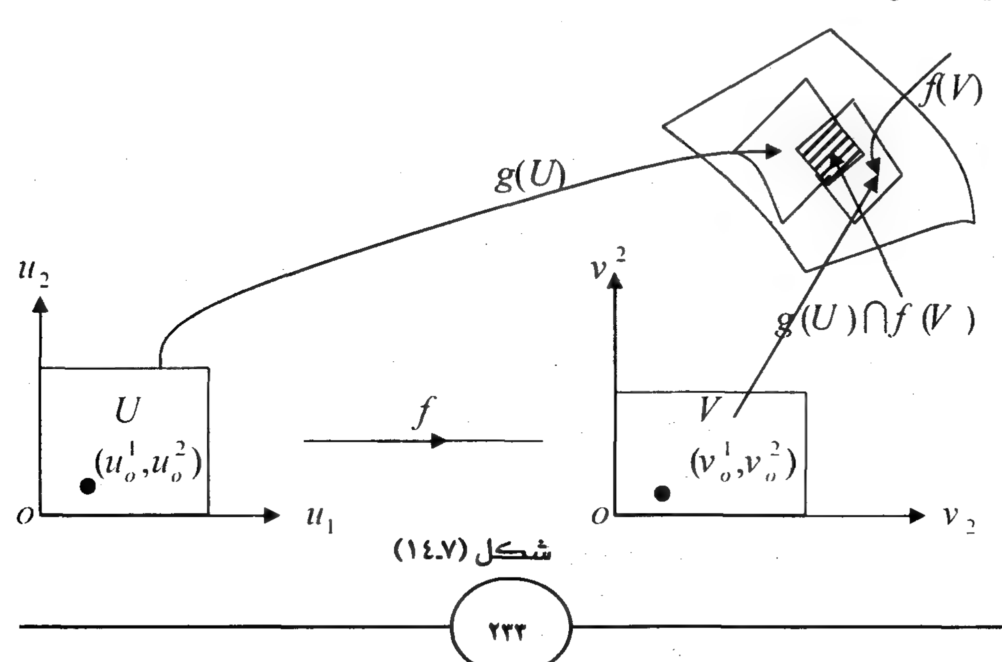
السطح المنتظم σ يسمح لعدد لانهائي من التمثيلات البارامترية في المنطقة المجاورة لكل من نقاط هذا السطح. نفرض أن (7.2) هو تمثيل بارامتري ما للسطح في المنطقة المجاورة للنقطة $P(u_o^\alpha)=P(u_o^1,u_o^2)$ وإذا كانت $f_\beta(v^\alpha)$, $\beta=1,2,\alpha=1,2$ هي دوال تحقق الشروط

$$u_o^\beta=f_\beta(v_o^\alpha),Det(\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(v^1,v^2)})\neq 0,\alpha,\beta=1,2$$

عند النقطة (v_o^1,v_o^2).. فإن المعادلات

$$x^i=x^i(f_1(v^1,v^2),f_2(v^1,v^2)),i=1,2,3$$

تحدد تمثيل بارامتري منتظم للسطح. أي أن المعادلات $u^\beta=f_\beta(v^\alpha)$ تعين راسم توبولوجي من المنطقة V الصغيرة صغراً كافياً والمجاورة للنقطة (v_o^1,v_o^2) في المستوى v^1v^2 إلى المنطقة U المجاورة للنقطة (u_o^1,u_o^2) في المستوى u^1u^2 كما هو موضح في شكل (١٢.٧).



شكل (١٤.٧)

نظرية (٤.٧):

نفرض أن σ سطح في الفراغ $\mathbb{R}^3$ يسمح بتمثيل بارامتري

$$x^i = x^i(u^\alpha) = x^i(u^1, u^2)$$

في المنطقة المجاورة للنقطة p وأن $Det(\frac{\partial(x^1,x^2)}{\partial(u^1,u^2)}) \neq 0$ عند p . إذاً في المنطقة المجاورة للنقطة p من السطح σ يمكن تعريف المعادلة $x^3 = f(x^1, x^2)$ حيث f دالة منتظمة.

البرهان:

من الشروط المعطاة نجد أن نظرية الدوال الضمنية محققة وبالتالي توجد الدوال المنتظمة $u^\alpha = (x^1, x^2)$ والتحويل العكسي $x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2)$ والتي تحقق

$$\frac{\partial(x^1,x^2)}{\partial(u^1,u^2)} \cdot \frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(x^1,x^2)} = I \qquad (*)$$

حيث I مصفوفة الوحدة ومن الفرض وباستخدام (*) يكون

$$Det(\frac{\partial(x^1,x^2)}{\partial(u^1,u^2)}) \neq 0 \quad , \quad Det(\frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(x^1,x^2)}) \neq 0$$

وبالتالي يمكن إدخال البارامترات v^1, v^2 وفقاً للعلاقات

$$u^\alpha = u^\alpha(v^1, v^2), \alpha = 1,2 \quad \cdot$$

ومنها نحصل على المعادلات

$$x^1 = v^1, x^2 = v^2, x^3 = x^3(u^1(v^1,v^2), u^2(v^1,v^2))$$

أو في الصورة المكافئة (صورة مونج) $x^3 = f(x^1, x^2)$ وهذا يكمل البرهان.

ملاحظة (٦.٧):

النظرية (٤.٧) تعطي شروط وجود تمثيل مونج للسطح المنتظم.

نظرية (٥.٧):

نفرض أن σ سطح منتظم وأن $x = x(u^{\alpha})$ تمثيل بارامتري منتظم عليه ونعتبر مجموعة المعادلات التفاضلية (معادلتين) الآتية:

$$A_{\alpha\beta}(u^1,u^2)du^{\alpha}=0, Det(A_{\alpha\beta})\neq 0; \alpha,\beta=1,2 \quad (7.11)$$

المعرفة في منطقة مجاورة للنقطة $(u_o^{\alpha})=(u_o^1,u_o^2)$. عندئذ السطح σ يسمح بتمثيل بارامتري بحيث أن منحنيات الإحداثيات u^{α} هي منحنيات تكاملية للمعادلات (7.11) في المنطقة المجاورة لهذه النقطة.

البرهان:

كي لا نفقد الحالة العامة نفرض أن $A_{\alpha\beta}\neq 0, \alpha\neq\beta$

وليكن $u^2=f_1(v^1,u_o^1)$ هو حل للمعادلة التفاضلية الأولى في (7.11) والذي يحقق

$$u^2=f_1(v^1,u_o^1)=v^1$$

نفرض كذلك $u^1=f_2(v^2,u_o^2)$ هو حل للمعادلة التفاضلية الثانية في (7.11) والذي يحقق

$$u^1=f_2(v^2,u_o^2)=v^2$$

بما أن $\quad \dfrac{\partial f_1}{\partial v^1}=1\neq 0, u^1=u_o^1, \dfrac{\partial f_2}{\partial v^2}=1, u^2=u_o^2$

إذاً المعادلات

$$u^2=f_1(v^1,u_o^1), u^1=f_2(v^2,u_o^2)=v^2$$

قابلة للحل في v^1، v^2 في المنطقة المجاورة للنقطة (u_o^1,u_o^2) وأن الحل يأخذ الصورة

$$v^{\alpha}=v^{\alpha}(u^1,u^2), \alpha=1,2$$

بما أن $v^1(u^1,u^2)=$ const. هو تكامل المعادلة الأولى في (7.11) فإن المعادلة

$dv^1 = \frac{\partial v^1}{\partial u^1}du^1 + \frac{\partial v^2}{\partial u^2} = 0$ تتناسب مع المعادلة $A_{11}du^1 + A_{21}du^2 = 0$

ومنها يجب أن يتحقق (شرط التناسب هو شرط حذف du^1, du^2)

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} \\ \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \end{vmatrix} = 0$$

بالمثل يكون

$$\begin{vmatrix} A_{12} & A_{22} \\ \frac{\partial v^2}{\partial u^1} & \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} = 0$$

فإذا فرضنا أن $Det\left(\frac{\partial(v^1,v^2)}{\partial(u^1,u^2)}\right)=0$ فإن $Det(A_{\alpha\beta})=0$ وهذا مستحيل.

إذاً لابد أن يكون $Det\left(\frac{\partial(v^1,v^2)}{\partial(u^1,u^2)}\right)\neq 0$ ومنها يكون $v^1(u^1,u^2)$، $v^2(u^1,u^2)$ تمثيل بارامتري على السطح وأن منحنيات الإحداثيات $v^1 = \text{const.}$، $v^2 = \text{const.}$ هي منحنيات تكاملية وهذا يكمل برهان النظرية.

ملاحظة (٢.٧):

برهان النظرية السابقة يعتمد على نظرية الدالة الضمنية ونظرية الدالة العكسية (في الباب الثاني).

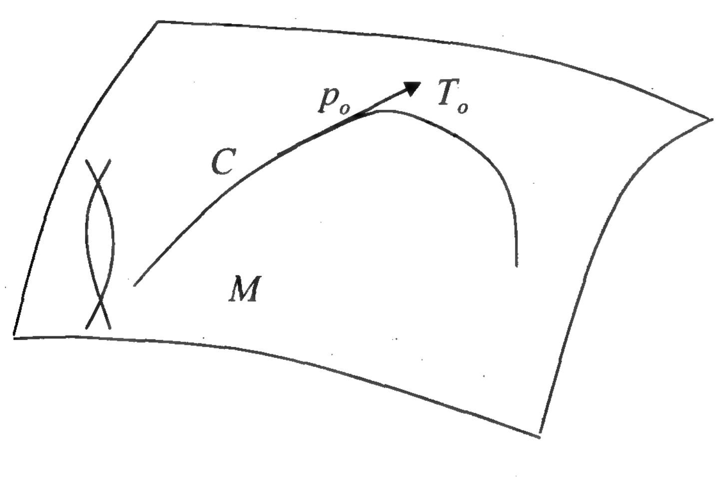
(٥.٧) الاتجاهات على السطح : Directions on the Surface

لنعتبر سطح M في الفراغ معطى بالمعادلة الضمنية $F(x^1,x^2,x^3)=0$ وأن $p_o=(x_o^1,x_o^2,x_o^3)$ نقطة عليه يمر بها منحنى $C: r(s)=(x^i(s))$ وهذا المنحنى واقع على السطح M. المماس $\underline{T}_o$ لهذا المنحنى عند p_o هو المتجه

$$T_o = (\frac{d\underline{r}}{ds})_o = ((\frac{dx^i}{ds})_o) = (\frac{dx^1}{ds}, \frac{dx^2}{ds}, \frac{dx^3}{ds})_{p_o} \qquad (7.12)$$

تعريف (١١.٧):

نسمي أي مماس لأي منحنى واقع على السطح عند أي نقطة عليه اتجاهاً على السطح. فمثلاً المماس $\underline{T}_o$ هو اتجاهاً على السطح كما هو موضح في شكل (١٥.٧)



شكل (١٥.٧)

شرط وقوع المنحنى C على السطح M هو أن جميع نقط المنحنى C تحقق المتطابقة

$$F(x^1(s), x^2(s), x^3(s)) = 0 \qquad (7.13)$$

بالتفاضل بالنسبة إلى s نحصل على ($dF \equiv 0$)

$$\frac{\partial F}{\partial x^1}\frac{dx^1}{ds} + \frac{\partial F}{\partial x^2}\frac{dx^2}{ds} + \frac{\partial F}{\partial x^3}\frac{dx^3}{ds} = 0$$

هذه العلاقة تصح عند جميع نقط المنحنى C على السطح M وبالأخص أيضاً عند النقطة p_o أي أن

$$(\frac{\partial F}{\partial x^1})_{p_o}(\frac{dx^1}{ds})_o+(\frac{\partial F}{\partial x^2})_{p_o}(\frac{dx^2}{ds})_o+(\frac{\partial F}{\partial x^3})_{p_o}(\frac{dx^3}{ds})_o=0$$

لنعتبر المتجه L

$$\underline{L}=((\frac{\partial F}{\partial x^1})_{p_o},(\frac{\partial F}{\partial x^2})_{p_o},(\frac{\partial F}{\partial x^3})_{p_o}) \qquad (7.14)$$

أي أن $\underline{L}$ عمودي على $\underline{T}_o$ ونلاحظ أن المتجه $\underline{L}$ من تعريفة يعتمد فقط على السطح وعلى النقطة p_o. في حين أن $\underline{T}_o$ يعتمد على السطح والنقطة p_o والمنحنى C.

ونعبر عن العمودي على السطح عن طريق التدرج أو الانحدار للدالة القياسية F حيث

$$L=(\nabla F)_{p_o} \;, <L,T_o>=<(\nabla F)_o,T_o>=0 \qquad (7.15)$$

فإذا ما تصورنا جميع المنحنيات الواقعة على السطح M والمارة بالنقطة p_o فإن جميع مماساتها عند p_o تتعامد مع نفس المتجه $\underline{L}$ وعليه فإن جميع الخطوط المماسية للسطح من أي نقطة عليه p_o تقع جميعها في مستوى واحد يسمى بالمستوى المماس للسطح M عند p_o ويرمز له بالرمز $T_{p_o}M$. المتجه $\underline{L}$ العمودي على جميع الخطوط المماسية عند النقطة p_o يسمى العمودي على السطح. إذاً معادلة المستوى المماس للسطح عند النقطة $p_o(x_o^1,x_o^2,x_o^3)$ هي

$$<(\nabla F)_{p_o},y-x_o>=(\frac{\partial F}{\partial x^i})_{p_o}(y^i-x_o^i)=0 \qquad (7.16)$$

حيث x_o,y هما متجه الموضع لنقطة عامة على المستوى المماس ونقطة التماس p_o على الترتيب.

معادلة خط العمودي على السطح عند النقطة p_o هي (حيث (y^i) نقطة على الخط).

$$\frac{y^1-x_o^1}{(\frac{\partial F}{\partial x^1})_{p_o}}=\frac{y^2-x_o^2}{(\frac{\partial F}{\partial x^2})_{p_o}}=\frac{y^3-x_o^3}{(\frac{\partial F}{\partial x^3})_{p_o}} \qquad (7.17)$$

مثال (٧.٧):

أثبت أن المستوى المماس للسطح $x^1x^2x^3=a^3$ عند أي نقطة عليه يكون مع مستويات الإحداثيات هرم ثلاثي ثابت الحجم.

الحل:

نضع معادلة السطح في الصورة الضمنية

$$F(x^1,x^2,x^3)=x^1x^2x^3-a^3=0$$

ونعتبر $p_o(x_o^1,x_o^2,x_o^3)$ نقطة على السطح أي أن $x_o^1x_o^2x_o^3=a^3$ ،
نسب اتجاه العمودي على السطح عند هذه النقطة هي

$$(\frac{\partial F}{\partial x^1})_{p_o}=x_o^2x_o^3,(\frac{\partial F}{\partial x^2})_{p_o}=x_o^1x_o^3,(\frac{\partial F}{\partial x^3})_{p_o}=x_o^1x_o^2 \quad (7.18)$$

وهي مركبات المتجه $(\nabla F)_{p_o}$.

إذاً معادلة المستوى المماس عند p_o تعطى من (7.16)، (7.18) وتأخذ الصورة

$$(y^1-x_o^1)x_o^2x_o^3+(y^2-x_o^2)x_o^1x_o^3+(y^3-x_o^3)x_o^1x_o^2=0$$

أو

$$y^1x_o^2x_o^3+y^2x_o^1x_o^3+y^3x_o^1x_o^2=3x_o^1x_o^2x_o^3$$

حيث (y^1,y^2,y^3) نقطة عامة على المستوى.

وبالقسمة على $3x_o^1x_o^2x_o^3$ نحصل على

$$\frac{y^1}{3x_o^1}+\frac{y^2}{3x_o^2}+\frac{y^3}{3x_o^3}=1$$

وتكون الأطوال التي يقطعها المستوى من محاور الإحداثيات هي $3x_o^1,3x_o^2,3x_o^3$
وعليه فإن حجم الهرم (هرم ثلاثي قائم كل أوجهه مثلثات قائمة وحجمه يساوي $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة في الارتفاع) هو

$$V=\frac{1}{3}.3x_o^1.\frac{1}{2}3x_o^2.3x_o^2$$

$$\therefore V=\frac{27}{6}x_o^1x_o^2x_o^3=\frac{9}{2}a^3=\text{const.}$$

(٦.٧) الخطوط البارامترية على السطح : Parametric Lines

لنعتبر سطحاً في الفراغ معطى بالتمثيل البارامتري (7.2) . لنعطي الآن أحد البارامترات وليكن u^1 قيمة ثابتة ولتكن u_o^1 فنحصل على $\underline{r}=\underline{r}(u_o^1,u^2)$ أو ما يكافئ

$$x^i=x^i(u_o^1,u^2),\ i=1,2,3 \qquad (7.19)$$

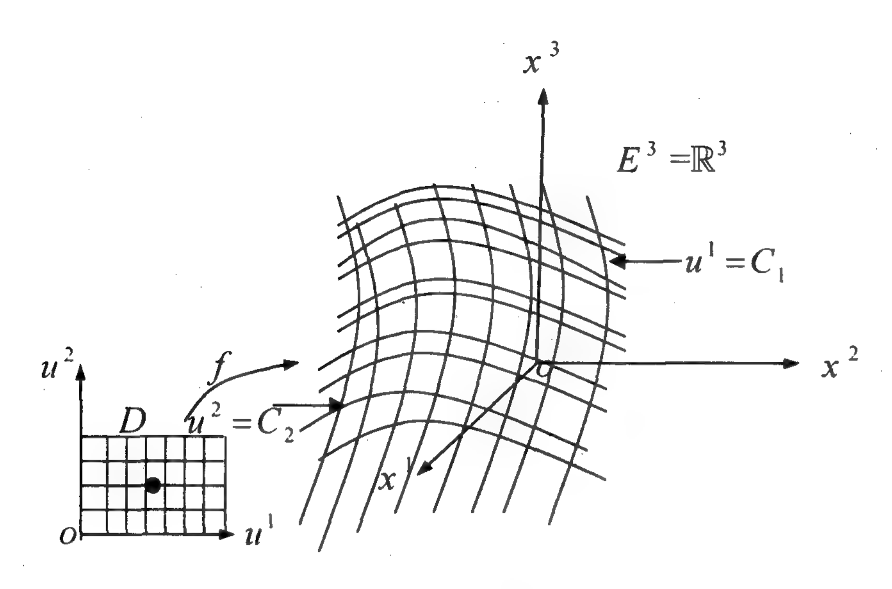
أي $x^i=g_i(u^2),\ i=1,2,3$ حيث g_i دوال معرفة ومتصلة وتفاضلية من تعريف الدوال x^i وهذا هو في الواقع التمثيل البارامتري لمنحنى في الفراغ حصلنا عليه من التمثيل البارامتري للسطح $x^i=x^i(u^\alpha)$ وذلك بتثبيت أحد البارامترات وليكن u^1 إذاً هذا المنحنى يقع على السطح. وخلاصة القول $u^1=u_o^1$ تعرف منحنى فراغ واقع على السطح يسمى خط u^2 البارامتري u^2 -parametric line وبإعطاء u^1 جميع القيم الثابتة الممكنة نحصل على جميع خطوط u^2 البارامترية على السطح. بالمثل يمكن الحصول على خط u^1 البارامتري u^1 –parametric line وكذلك عائلة خطوط u^1 البارامترية على السطح كما هو موضح في شكل (١٦.٧).

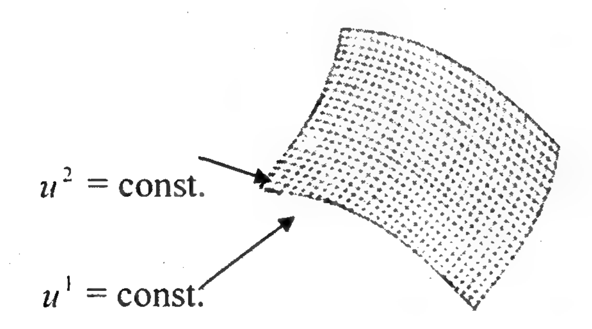
وحيث أن التناظر بين نقط السطح وأزواج قيم (u^1,u^2) هو تناظر أحادي إذاً من السهل أن نتبين الخصائص الآتية للخطوط البارامترية (الإحداثية) على السطح كما هو موضح في شكل (١٦.٧).

(i) أي خطين بارامترين من نفس النوع لا يمكن أن يتقاطعا ، لأنه مثلاً لو تقاطع الخطان $u^1=\alpha_1, u^1=\alpha_2,\ \alpha_1\neq\alpha_2$ في نقطة فمعنى ذلك أن u^1 عند هذه النقطة لها أكثر من قيمة واحدة (على الأقل قيمتان α_1 , α_2) وهذا لا يحدث حيث أن f تناظر أحادي.

(ii) أي خطين بارامترين من نوعين مختلفين لابد وأن يتقاطعا في نقطة واحدة فقط. فمثلاً الخطان $u^1=u_o^1,\ u^2=u_o^2$ يتقاطعان في نقطة واحدة عندها u^1,u^2 تأخذ القيم u_o^1,u_o^2 ولا توجد سوى هذه النقطة.

(iii) أي نقطة على السطح لابد وأن يمر بها خطان بارامتريان من نوعين مختلفين ولا يمر بها سواهما. ولتوضيح ذلك، نفرض أن u^1, u^2 عند هذه النقطة تأخذ القيم u_o^1, u_o^2. إذاً الخط $u^1 = u_o^1$ يمر بالتأكيد بهذه النقطة كذلك الخط $v^1 = v_o^1$ يمر بها ولا توجد خطوط أخرى تمر بها.





شكل (٧ـ١٦): الخطوط البارامترية على السطح

(٧.٧) المنحنيات على السطح: Curves on a Surface

لنعبر عن كل من $u^1,\ u^2$ كدوال لمتغير ثالث v أي نضع $u^\alpha = u^\alpha(v),\ \alpha = 1,2$ وبالتعويض في المعادلة الاتجاهية (7.1) للسطح نحصل على

$$\underline{r} = \underline{r}(u^\alpha(\mathrm{v})) = \underline{r}\ (u^1(v), u^2(v)) \qquad (7.20)$$

وبالتالي حصلنا على منحنى فراغي تمثيله البارامتري حصلنا عليه من التمثيل البارامتري (7.1) للسطح، أي أنه منحنى فراغي يقع على السطح مع الأخذ في الاعتبار أن

$$(0,0) \neq (\frac{du^1}{dv}, \frac{du^2}{dv}) \qquad (7.21)$$

(مصفوفة جاكوب للتحويل $(u^1,u^2) \to v$ هي مصفوفة صف مختلف عن الصفر).

كحالة خاصة إذا أخذنا، ثابت $= u^1 = v, u^2$ نحصل عل خط u^1 البارامتري. بالمثل إذا أخذنا، ثابت$= u^2 = v, u^1$ نحصل على خط u^2 البارامتري.

بالتفاضل بالنسبة إلى v للدالة الاتجاهية (7.20) نحصل على

$$\frac{d\underline{r}}{dv} = \underline{r}_1 u'^1 + \underline{r}_2 u'^2, \qquad (7.22)$$

حيث

$$' = \frac{d}{dv},\ \underline{r}_\alpha = \frac{\partial\,\underline{r}}{\partial u^\alpha}, \alpha = 1,2$$

عند النقطة p_o يكون

$$(\frac{d\underline{r}}{dv})_o = (\underline{r}_1)_{p_o}(u'^1)_{p_o} + (\underline{r}_2)_{p_o}(u'^2)_{p_o} \qquad (7.23)$$

وهذا هو الاتجاه T_o على السطح كمماس للمنحنى (7.20) عند النقطة p_o حيث $T_o = (\frac{dr}{dv})_{p_o}$ تركيبة خطية من المتجهات r_1, r_2 المستقلة خطياً.

(٨.٧) المستوى المماس لسطح ممثل بارامترياً: Tangent Plane:

سبق وأن أوجدنا معادلة المستوى المماس لسطح ممثل بمعادلة ضمنية وهنا نوجد معادلة المستوى المماس لسطح ممثل بارامترياً لذلك نعتبر خط u^1 البارامتري على السطح M أي

$$u^1 = v\,,\; u^2 = u_o^2 = \text{ثابت} \;،\; u'^1 = 1, u'^2 = 0$$

والاتجاه المناظر له على السطح M عند النقطة p_o هو

$$(\frac{d\underline{r}}{dv})_{p_o} = (\frac{\partial \underline{r}}{\partial u^1})_{p_o} = (\underline{r}_1)_{p_o}$$

بالمثل يمكن اعتبار خط u^2 البارامتري أي

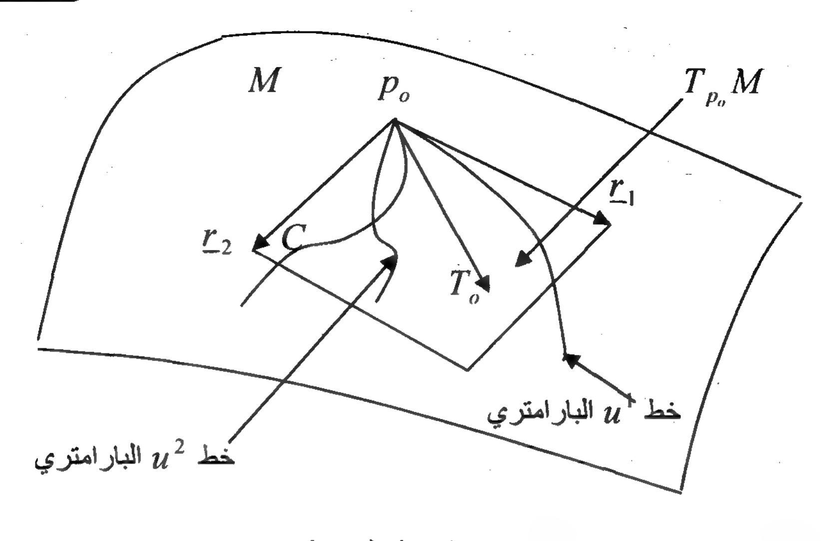
$$u^2 = v\,,\; u^1 = u_o^1 = \text{وثابت}\; u'^1 = 0,\; u'^2 = 1$$

والاتجاه المناظر له على السطح عند النقطة p_o هو $(\underline{r}_2)_{p_o}$.

إذاً المعادلة (7.23) تعطي الشكل العام للاتجاه $T_o = (\underline{r}')_{p_o}$ على السطح عند p_o كالآتي:

$$T_o = (u'^1)_{v_o}(\underline{r}_1)_o + (u'^2)_{v_o}(\underline{r}_2)_o \qquad (7.24)$$

أي أن المماس T_o لأي منحنى واقع على السطح ومار بالنقطة p_o أمكن التعبير عنه كعلاقة خطية من $(\underline{r}_2)_o, (\underline{r}_1)_o$ وهما المماسان للخطين البارامترين على السطح عند النقطة p_o وهما لا يتوقفان إلا على p_o ويحددان مستوى وفي هذا المستوى تقع جميع الخطوط المماسية لجميع المنحنيات الواقعة على السطح عند p_o. إذاً جميع الخطوط المماسية لجميع المنحنيات الواقعة على السطح عند p_o تقع في مستوى واحد يمر بالنقطة p_o وهو المستوى المماس Tangent Plane عند p_o ويرمز له بالرمز $T_{p_o}M$ كما هو موضح في شكل (١٧.٧).



شكل (١٧.٧)

(٩.٧) حقل متجه العمودي على السطح : Normal Vector Field

العمودي $\underline{L}$ على السطح هو عمودي على كل من $(\underline{r}_1)_{p_o}, (\underline{r}_2)_{p_o}$ أي أن $(\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2)_{p_o}$ يوازي $\underline{L}$ وبذلك تكون وحدة العمودي N على السطح عند p_o على الصورة :

$$N = \left(\frac{\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2|}\right)_{p_o} \qquad (7.25)$$

وبذلك يكون حقل متجه الوحدة العمودي unit normal vector field على السطح على الصورة

$$N = N(u^\alpha) = N(u^1, u^2),$$

حيث

$$N = \frac{\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2|} \qquad (7.26)$$

ملاحظة (٨.٧):

من السهل التأكد من أن N ثابت كوني (لا تغيري) Invariant بالنسبة إلى تحويلات الإحداثيات ذات الجاكوبي J أكبر من الصفر. وإذا كان الجاكوبي سالب

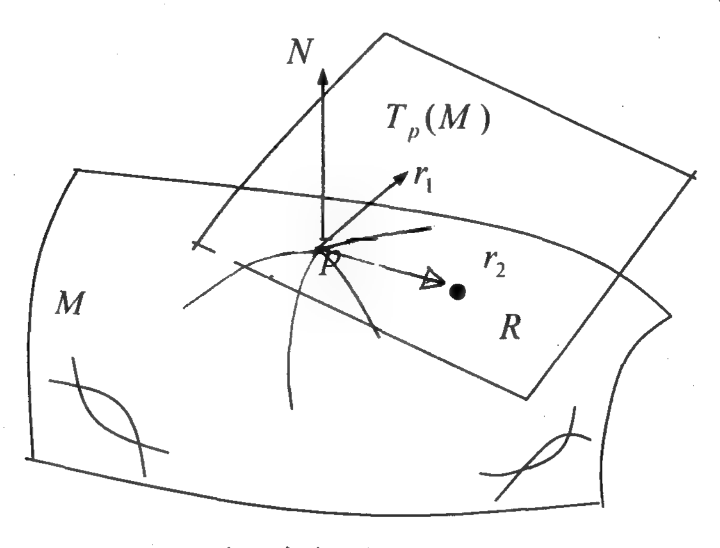
فإن N تغير إشارتها. بمعنى إذا تغيرت الإحداثيات البارمترية (u^1,u^2) إلى الإحداثيات $(\bar{u}^1,\bar{u}^2)$ فإن $N(u^\alpha)=\pm N(\bar{u}^\alpha)$ حيث $J\neq 0$.

مثال (٨.٧):

نفرض أن R هو متجه الموضع لأي نقطة على المستوى المماس للسطح M عند النقطة $p(u_o^\alpha)=p(u_o^1,u_o^2)$ ، المتجهات الثلاث $R-\underline{r}(u_o^\alpha),\underline{r}_1(u_o^\alpha),\underline{r}_2(u_o^\alpha)$ تقع في المستوى المماس للسطح عند النقطة $\mathrm{p}=p(u_o^\alpha)$ وبالتالي يكون

$$[R-\underline{r}(u_o^\alpha),\underline{r}_1(u_o^\alpha),\underline{r}_2(u_o^\alpha)]=0 \qquad (7.27)$$

وهذه هي المعادلة الاتجاهية للمستوى المماس للسطح عند النقطة $p(u_o^\alpha)$ ، كما هو موضح في شكل (١٨.٧).



شكل (١٨.٧)

مثال (٩.٧):

إذا كان السطح معطى بالمعادلات البارامترية $x^i=x^i(u^\alpha)$ فإن معادلة المستوى المماس للسطح عند النقطة $p(u_o^\alpha)$ المعطاة بالمعادلة (7.27) تصبح على الصورة:

$$\begin{vmatrix} y^1 - x^1(u_o^\alpha) & y^2 - x^2(u_o^\alpha) & y^3 - x^3(u_o^\alpha) \\ x_1^1(u_o^\alpha) & x_1^2(u_o^\alpha) & x_1^3(u_o^\alpha) \\ x_2^1(u_o^\alpha) & x_2^2(u_o^\alpha) & x_2^3(u_o^\alpha) \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.28)$$

حيث $x_\alpha^j = \dfrac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}, j = 1,2,3 \; ; \;\; \alpha = 1,2$ ، $(y^i) \in T_p(M)$

مثال (١٠،٧):

معادلة المستوى المماس للسطح $M \; : x^3 = x^3(x^1, x^2)$ (في صورة مونج) عند أي نقطة عليه $p_o(x_o^1, x_o^2, x_o^3)$ يمكن الحصول عليها وذلك باعتبار معادلات السطح البارامترية على الصورة :

$$x^1 = u^1, \; x^2 = u^2, x^3 = x^3(u^1, u^2)$$

والنقطة p_o يكون لها الإحداثيات $(u_o^1, u_o^2, x^3(u_o^\alpha))$. وبذلك فإن معادلة المستوى المماس (7.28) تصبح على الصورة

$$\begin{vmatrix} y^1 - u_o^1 & y^2 - u_o^2 & y^3 - x^3(u_o^\alpha) \\ 1 & 0 & x_1^3(u_o^\alpha) \\ 0 & 1 & x_2^3(u_o^\alpha) \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.29)$$

حيث (y^1, y^2, y^3) أي نقطة عامة في المستوى المماس T_pM عند p على السطح M.

مثال (١٠،٧):

إذا كان السطح معطى في الصورة الضمنية $F(x^1, x^2, x^3) = 0$ حيث

$$|\nabla F|^2 = (F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3)^2 \neq 0$$

وأن $x^i = x^i(u^\alpha)$ هو تمثيل بارامتري أملس smooth أو تفاضلي للسطح. وبالتالي فإن معادلة السطح تأخذ الصورة (متطابقة في البارامترات u^α):

$$F(x^i(u^\alpha)) = F(x^1(u^1,u^2), x^2(u^1,u^2), x^3(u^1,u^2)) = 0 \quad (7.30)$$

بالتفاضل جزئياً لهذه المتطابقة بالنسبة إلى u^1 ,u^2 نحصل على (تفاضل وتكامل (٣)):

$$F_1x_1^1 + F_2x_1^2 + F_3x_1^3 = 0,\ F_1x_2^1 + F_2x_2^2 + F_3x_2^3 = 0 \quad (7.31)$$

حيث
$$F_i = \frac{\partial F}{\partial x^i}, x_\alpha^j = \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha},\ i, j = 1,2,3;\ \alpha = 1,2$$

بحل المعادلتين (7.31) بالنسبة إلى F_i حيث $i, j = 1, 2, 3$ نحصل على

$$\frac{F_1}{\left|\frac{\partial(x^2,x^3)}{\partial(u^1,u^2)}\right|} = \frac{F_2}{\left|\frac{\partial(x^3,x^1)}{\partial(u^1,u^2)}\right|} = \frac{F_3}{\left|\frac{\partial(x^1,x^2)}{\partial(u^1,u^2)}\right|} \quad (7.32)$$

إذاً معادلة المستوى المماس عند النقطة $p_o = (x_o^1, x_o^2, x_o^3)$ تأخذ الصورة

$$(x^1 - x_o^1)\left|\frac{\partial(x^2,x^3)}{\partial(u^1,u^2)}\right| + (x^2 - x_o^2)\left|\frac{\partial(x^3,x^1)}{\partial(u^1,u^2)}\right| + (x^3 - x_o^3)\left|\frac{\partial(x^1,x^2)}{\partial(u^1,u^2)}\right| = 0 \quad (7.33)$$

حيث $\left|\frac{\partial(x^i,x^j)}{\partial(u^1,u^2)}\right|$ محدد 2×2 عناصره المشتقات التفاضلية الجزئية بالنسبة إلى u^1, u^2 ويعطى على الصورة :

$$\frac{\partial(x^i,x^j)}{\partial(u^1,u^2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial u^1} & \frac{\partial x^i}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^j}{\partial u^1} & \frac{\partial x^j}{\partial u^1} \end{vmatrix}, i, j = 1,2,3, i \neq j \quad (7.34)$$

ملاحظة (٧.٩):

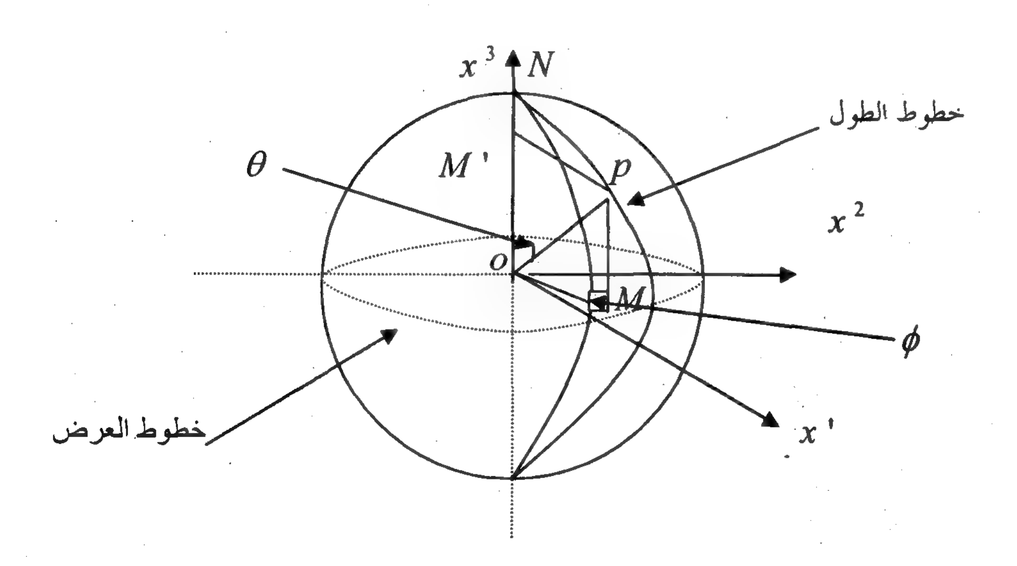
العلاقات (7.32) تعطي اتجاه خط العمودي على السطح عند أي نقطة عليه.

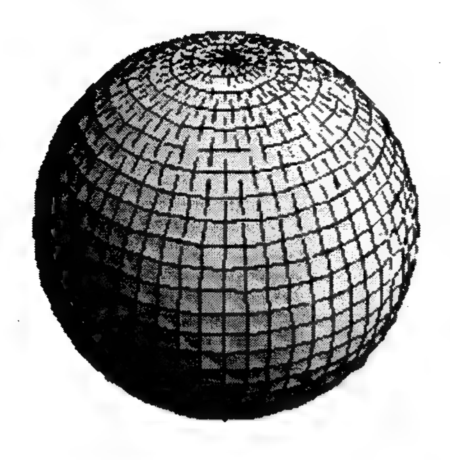
مثال (١٢.٧):

عين المعادلات البارامترية لسطح الكرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a.

الحل:

نفرض أن o هي مركز كرة نصف قطرها a يقع في مستوى الاستواء equator plane وكذلك المحورين المتعامدين ox^1, ox^2 في مستوى الاستواء والمحور ox^3 هو المحور المار بالقطب الشمالي N. نفرض أن p نقطة على سطح الكرة ومنحنى خط الطول meridian المار بهذه النقطة يصنع زاوية ϕ مع خط الطول المتقاطع مع محور ox^3 ونفرض أن θ هي الزاوية بين op ونصف القطر oN. مسقط النقطة p على محور ox^3 وعلى المستوى الأستوائي المستوى x^1ox^2 هي M', M على الترتيب. كما هو واضح من شكل (١٩.٧).





شكل (١٩.٧)

من الشكل نجد أن (العلاقة بين الإحداثيات الكروية والإحداثيات الكرتيزية)

$$PM' = a\sin\theta = oM$$

$$x^1 = oM\ \cos\phi = a\sin\theta\cos\phi \qquad (7.35)$$

$$x^2 = oM\ \sin\phi = a\sin\theta\sin\phi$$

$$x^3 = a\cos\theta$$

حيث $0 \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi$

وإذا كانت $\phi = \phi(t), \theta = \theta(t)$ فإن النقطة p ترسم منحنى يقع على سطح الكرة. في الحالة الخاصة θ = const تعطي منحنيات العرض المتوازية Latitudes، ϕ = const تعطي خطوط الطول meridians.

مثال (١٢.٧):

أوجد معادلة المستوى المماس لسطح الكرة $S^2(a)$ التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a عند النقطة $(a,0,0)$ (هذه النقطة تناظر البارامترات $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $\phi = 0$).

الحل:

المعادلة الاتجاهية لسطح الكرة (من (7.35)) تأخذ الشكل

$$\underline{r} = (a\sin\theta\cos\phi, a\sin\theta\sin\phi, a\cos\theta) \qquad (7.36)$$

حيث ϕ,θ هي الإحداثيات البارامترية على سطح الكرة.

بتفاضل المعادلة الاتجاهية (7.36) بالنسبة إلى ϕ,θ نحصل على

$$\underline{r}_\theta = (a\cos\theta\cos\phi, a\cos\theta\sin\phi, -a\sin\theta)$$

$$\underline{r}_\phi = (-a\sin\theta\ \sin\phi, a\sin\theta\cos\phi, 0)$$

وبالضرب الاتجاهي يكون لدينا

$$\underline{r}_\theta \wedge \underline{r}_\phi = a\sin\theta(a\sin\theta\cos\phi, a\sin\theta\sin\phi, a\cos\theta)$$

ومن (7.36) نحصل على

$$\underline{r}_\theta \wedge \underline{r}_\phi = a\sin\theta\,\underline{r} \qquad (7.37)$$

معادلة المستوى المماس لسطح الكرة عند النقطة p_o التي متجه الموضع لها هو $\underline{r}_o$ تعطى من

$$<(\underline{r}-\underline{r}_o),(\underline{r}_\theta \wedge \underline{r}_\phi)_{p_o}> = <(\underline{r}-\underline{r}_o), a\sin\theta\,\underline{r}_o> = 0, \theta \neq 0, \theta \neq \pi$$

وبالقسمة على $a\sin\theta$ نحصل على:

$$<(\underline{r}-\underline{r}_o),\underline{r}_o> = <\underline{r},\underline{r}_o> - |\underline{r}_o|^2 = 0$$

$\therefore$ معادلة المستوى المماس هي ($\underline{r}$ متجه الموضع لنقطة عامة على المستوى المماس).

$$<\underline{r},\underline{r}_o> = |\underline{r}_o|^2, \ r = (x^1, x^2, x^3) \in T_{p_o} S^2(a)$$

وإذا كانت $\underline{r}_o = (a,0,0)$ فإن معادلة المستوى تصبح $x^1 - a = 0$ وبالمثل فإن معادلة المستوى المماس عند النقطة $(0,a,0)$ هي $x^2 - a = 0$ وهو مستوى يوازي المستوى x^1x^3.

ملاحظة (١٠.٧):

التمثيل السابق لسطح الكرة يستخدم كنموذج لسطح الكرة الأرضية والإحداثيات θ , ϕ تحدد موقع نقطة على سطح الكرة وتحديد الإتجاهات وفروق التوقيت وتوزيع درجات الحرارة وهكذا من المفاهيم الجغرافية ولذا يسمى التمثيل الجيوغرافي Geographic Parameterization.

مثال (١٤.٧):

من المثال السابق يتضح أنه لا يمكن تحديد العمودي على سطح الكرة عند القطب الشمالي $(\theta = 0)$ والقطب الجنوبي $(\theta = \pi)$ حيث أنه في هذه الحالة يكون $r_\theta \wedge r_\phi = 0$ (من المعادلة (7.37)) أي أن r_θ , r_ϕ مرتبطين خطياً أو متوازيين وبذلك لا يمكن إيجاد المستوى المماس عند تلك النقط المذكورة.

(١٠.٧) النقاط الخاصة (الشاذة أو المفردة) على السطح:

Singular Points on a Surface

في العرض السابق لتعريف السطح المنتظم والتمثيلات المختلفة له من خلال تمثيل بارامتري أو من خلال دالة اتجاهية أو من خلال معادلة ضمنية بينا أن السطح المنتظم يحقق شرط تبعاً لنوع التمثيل فمثلاً:

(i) إذا كان السطح المنتظم معرف بالدالة الاتجاهية (بارامترياً)

$$R(u^1,u^2):D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^3$$

فإنه يحقق

$$Rank\,(J)=Rank\,(\frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(u^1,u^2)})=2 \qquad (7.38)$$

أو ما يكافئ (اتجاهياً) $R_1 \wedge R_2 \neq 0$

(ii) إذا كان السطح المنتظم معرف من خلال الدالة المنتظمة (الضمنية):

$$F(x^1,x^2,x^3)=0$$

فإنه يحقق

$$\therefore \ \nabla F=(\frac{\partial F}{\partial x^i})\neq 0 \qquad (7.39)$$

أو ما يكافئ

$$|\nabla F|=(\frac{\partial F}{\partial x^1})^2+(\frac{\partial F}{\partial x^2})^2+(\frac{\partial F}{\partial x^3})^2\neq 0$$

أي أنه على السطح المنتظم يجب أن يكون العمودي $R_1\wedge R_2$ معرف عند أي نقطة عليه.

تعريف (١٢،٧):

النقطة p على السطح المنتظم يقال أنها نقطة منتظمة (عادية) regular إذا كانت تحقق (7.38) أو (7.39) على حسب نوع التمثيل المناظر للسطح وخلاف ذلك يقال أن النقطة شاذة أو مفردة (غير عادية أوخاصة) singular point.

بناءً على هذا التعريف نجد أن النقطة الشاذة هي نقطة على السطح عندها حقل العمودي غير معرف أو بأسلوب آخر فإن الاتجاهات (المستوى المماس) غير محددة وهذا يكافئ أن مرتبة مصفوفة جاكوب للتحويل

$$R=R(u^1,u^2)=R(x^i(u^\alpha))$$

أقل من 2 أو انحدار (تدرج) gradient الدالة التفاضلية $F(x^i)=0$ يساوي الصفر وهذا يكافئ $\frac{\partial F}{\partial x^i}=0\,,\ \forall i$

مثال (١٥،٧):

بين أن النقطة $(0,0)$ نقطة شاذة على السطح

$$R(u^1,u^2)=((u^1)^3,(u^2)^3,((u^1)^6+(u^2)^6)^{1/3})$$

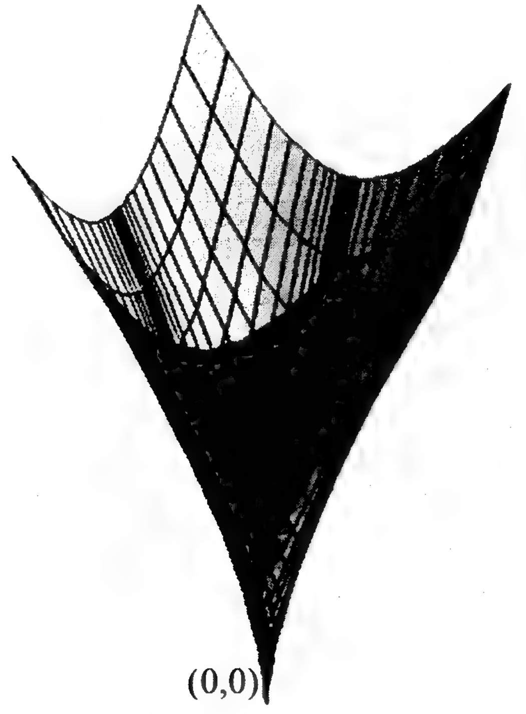
الحل:

نكون مصفوفة جاكوب للتحويل الإحداثي $(x^1,x^2,x^3) \longleftarrow (u^1,u^2)$

على الصورة:

$$J=\begin{bmatrix} 3(u^1)^2 & 0 & \frac{1}{3}(u^1)^6+(u^2)^6)^{-\frac{2}{3}}.6(u^2)^5 \\ 0 & 3(u^2)^2 & \frac{1}{3}(u^1)^6+(u^2)^6)^{-\frac{2}{3}}.6(u^2)^5 \end{bmatrix}$$

واضح أنه عندما $(u^1,u^2)\longrightarrow(0,0)$ فإن J تقترب من مصفوفة صفرية وبالتالي فإن $Rank\ J=0<2$ إذاً النقطة $(0,0)$ نقطة شاذة على السطح كما هو موضح في شكل (٧-٢٠).



شكل (٧-٢٠)

مثال (١٦.٧):

بين أن النقطة $(0,0)$ نقطة شاذة على السطح

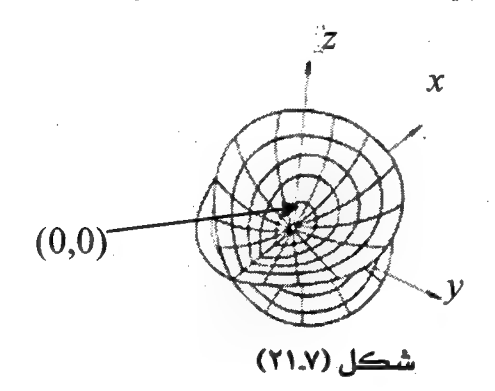
$$R(u^1,u^2)=((u^1)^2-(u^2)^2,2u^1u^2,(u^1)^5)$$

الحل:

نكون مصفوفة جاكوب على الصورة:

$$J=\begin{bmatrix} 3u^1 & 2u^2 & 5(u^1)^4 \\ -2u^2 & 2u^1 & 0 \end{bmatrix}$$

عندما تقترب النقطة p من $(0,0)$ فإن J تصبح مصفوفة صفرية وبالتالي $R(J)<2$ أي أن النقطة $(0,0)$ على السطح هي نقطة شاذة كما هو موضح في شكل (٢١.٧).



شكل (٢١.٧)

مثال (١٧.٧):

بين أن كل نقاط الخط البارامتري $u^2=0$ هي نقاط شاذة على السطح

$$R(u^1,u^2)=(u^1,(u^2)^2,(u^2)^3)$$

الحل:

مصفوفة جاكوب للتحويل الإحداثي $(u^1,u^2)\longrightarrow(x^1,x^2,x^3)$ لها الصورة:

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2u^2 & (3u^2)^2 \end{pmatrix}$$

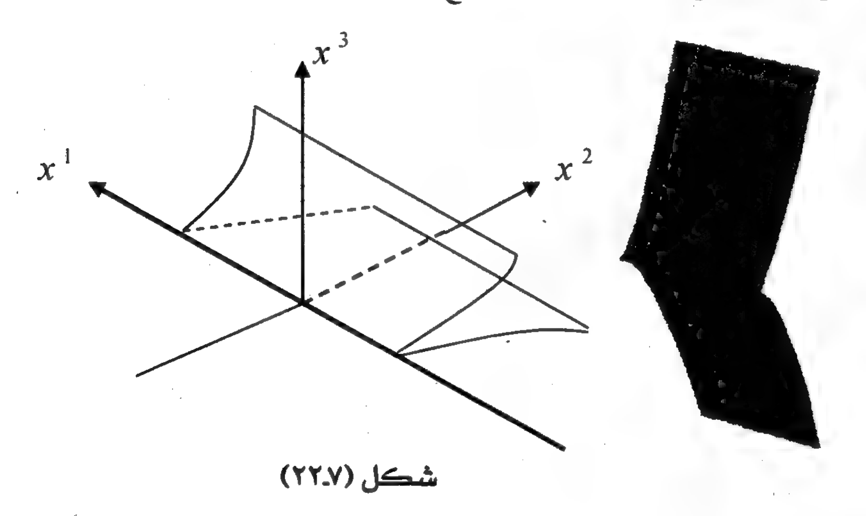
عندما $u^2 \to 0$ فإن

$$J \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

أي أن $R(J) = 1 < 2$ وبالتالي فإن نقاط الخط البارامتري $u^2 = 0$ تقع على منحنى معادلته (نحصل عليها من معادلة السطح المعطى بوضع $u^2 = 0$) هي

$$R(u^1) = (u^1, 0, 0)$$

وهو خط مستقيم (مكون من نقاط شاذة) واقع على السطح (يسمى حرف مدبب cuspidal edge) كما هو موضح في شكل (٢٢.٧).



شكل (٢٢.٧)

مثال (١٨.٧):

بين أن النقطة $(0,0,0)$ نقطة شاذة بالنسبة للسطح

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(1 - x^2 - y^2 - z^2) = 0$$

الحل:

السطح معطى بمعادلة ضمنية في x, y, z ولكن الدالة $F = 0$ حاصل ضرب دالتين إذاً كل منهما يساوي الصفر. أي أن المحل الهندسي (السطح) ممثل من الكرة

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad \text{أو} \quad 1-x^2-y^2-z^2=0$$

والنقطة

$$x^2+y^2+z^2=0$$

وبحساب الانحدار ∇F للدالة نجد أنه يساوي الصفر عند نقطة الأصل o أي أن

$$(\frac{\partial F}{\partial x})_o=(\frac{\partial F}{\partial y})_o=(\frac{\partial F}{\partial z})_o=0$$

وهذا معناه أن النقطة $(0,0,0)$ نقطة شاذة.

ملاحظة (١١.٧):

النقطة الشاذة في المثال السابق تسمى نقطة شاذة منعزلة isolated singular point لأنها لا تقع على سطح الكرة بل هي مركز الكرة.

مثال (١٩.٧):

بين أن نقطة أصل الإحداثيات هي نقطة شاذة بالنسبة للمحل الهندسي للنقاط التي تحقق المعادلة الضمنية

$$F(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^2-2a^2(z^2-x^2-y^2)=0$$

الحل:

نقوم بحساب المشتقات الجزئية

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2(x^2+y^2+z^2).2x-2a^2(-2x)$$

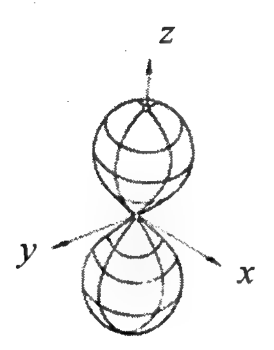
$$\frac{\partial F}{\partial y}=2(x^2+y^2+z^2).2y-2a^2(-2y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=2(x^2+y^2+z^2).2z-2a^2(2z)$$

واضح أن $|\nabla F|$ ينعدم عند النقطة $(0,0,0)$ لأن

$$(\frac{\partial F}{\partial x})_o = (\frac{\partial F}{\partial y})_o = (\frac{\partial F}{\partial z})_o = 0$$

أي أن نقطة الأصل نقطة شاذة كما هو موضح في شكل (٢٣.٧).



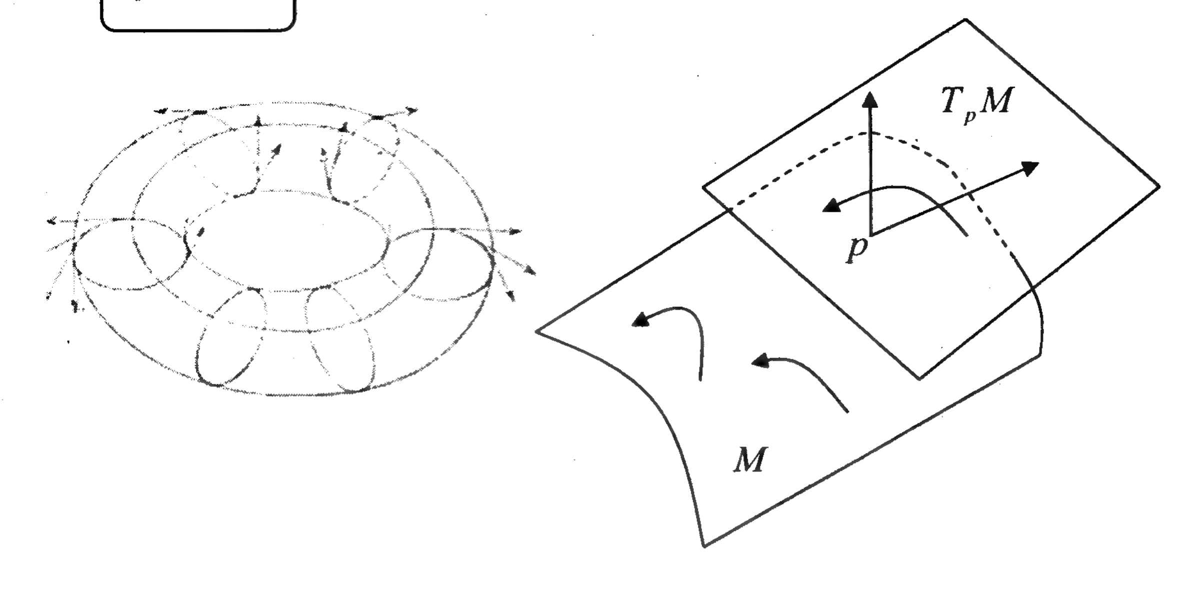
شكل (٢٣.٧)

ملاحظة (١٢.٧):

النقطة الشاذة في المثال السابق تسمى نقطة مخروطية canonical point لأن أحد أجزاء المحل الهندسي يمثل مخروط وله المعادلة $z^2 - x^2 - y^2 = 0$.

(١١.٧) توجيه السطح: Orientation of the Surface

في هذا الجزء نناقش بأي مفهوم يمكننا توجيه السطح. بديهياً وبما أن أي نقطة p على سطح منتظم $M : x = x(u^1, u^2)$ يكون لها مستوى مماس T_pM واختيار أي توجيه للمستوى T_pM يحدث توجيه في المنطقة المجاورة للنقطة p بمعنى الاتجاه الموجب للحركة على امتداد منحنيات مغلقة وصغيرة صغر كافٍ حول كل نقطة من منطقة الجوار المباشر كما هو موضح في شكل (٢٤.٧).



شكل (٧ـ٢٤)

تعريف (١٣.٧):

يقال أن السطح M موجه oriented إذا كان من الممكن عمل هذا التوجيه لكل نقطة $p \in M$ بحيث في تقاطع أي جوارين مباشر للنقطة p يتطابق التوجيه (أي لا يتغير) إذاً يقال أن السطح M موجه orientable وإذا لم نتمكن من ذلك فإن السطح M يقال أنه غير موجه nonorientable.

العرض السابق يمكن صياغته بالشكل الآتي:

إذا قمنا بتغيير البارامترات الإحداثية (u^1,u^2) إلى $(\bar{u}^1,\bar{u}^2)$ من خلال التحويل

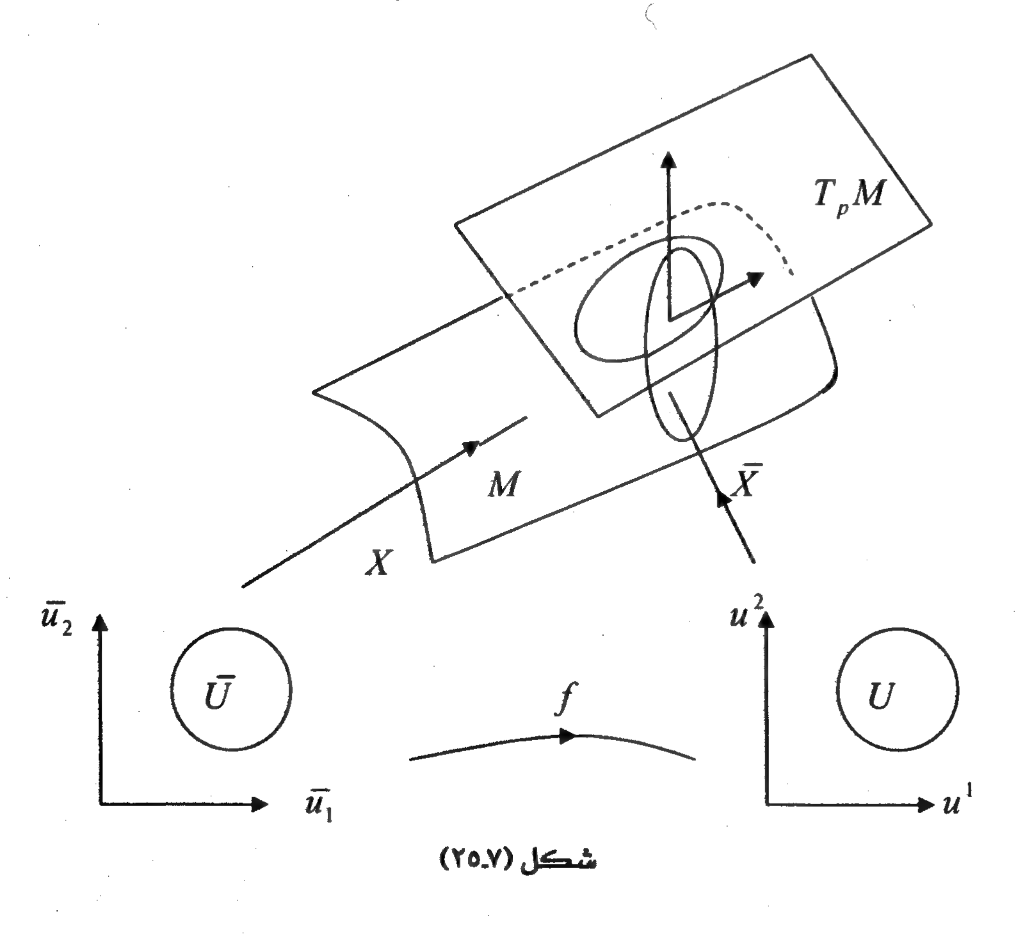
$$u^1=u^1(\bar{u}^1,\bar{u}^2),u^2=u^2(\bar{u}^1,\bar{u}^2)$$

فإن المستوى المماس المولد بالمتجهات X_{u^1},X_{u^2} يتطابق مع المستوى المماس المولد بالمتجهات $X_{\bar{u}^1},X_{\bar{u}^2}$ وهذا يتحقق إذا كان وكان فقط محدد جاكوب للتحويل $Det(\frac{\partial(u^1,u^2)}{\partial(\bar{u}^1,\bar{u}^2)})$ موجب وهذا يعني أن العمودي $N(u^1,u^2)$ على السطح يغير اتجاهه أو لا يغير طبقاً لإشارة محدد الجاكوبيان.

هذا العرض يقودنا إلى تعريف محدد على الصورة:

تعريف (١٤.٧):

السطح المنتظم M يقال أنه موجه إذا أمكن تغطيته بعائلة من الرقع الإحداثية $\{U_i\}$ coordinates patches بحيث إذا كانت p تقع في التقاطع $U_1 \cap U_2$ مثلاً فإن تغير الإحداثيات البارامترية U_1 إلى U_2 يكون محدد جاكوب له موجب. اختيار مثل هذه العائلة من الرقع يسمى توجيه orientation للسطح M والسطح في هذه الحالة يقال أنه موجه خلاف ذلك يقال أن السطح غير موجه (الرقع الإحداثية نعني بها التمثيلات البارامترية أو الإحداثية) كما هو موضح في شكل (٢٥.٧).



شكل (٢٥.٧)

مثال (٢٠.٧):

السطح الممثل بدالة اتجاهيه تفاضلية في متغيرين هو سطح موجه. في الحقيقة كل السطوح التي يمكن أن تغطى بغطاء واحد هي موجهه بديهياً trivially orientable.

مثال (٢١.٧):

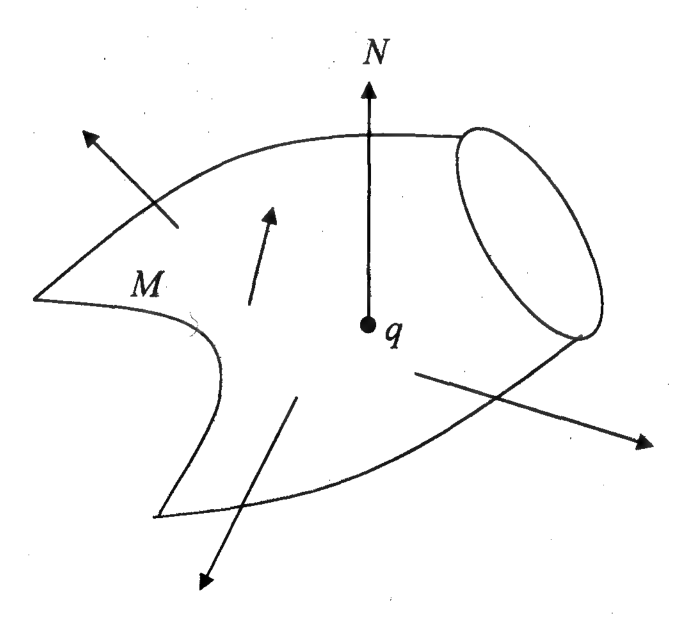
الكرة سطح موجه لأنها تغطى بغطاء جيوجرافي.

تعريف (١٥.٧):

حقل متجهات الوحدة العمودي التفاضلي المعرف على منطقة مفتوحة $U \subset M$ من سطح منتظم هو راسم تفاضلي من U إلى الفراغ الثلاثي حيث

$$N : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

والتي تحدد لكل نقطة $q \in U$ متجه وحدة $N(q) \in \mathbb{R}^3$ عمودي على M عند q كما هو موضح في شكل (٢٦.٧).



شكل (٢٦.٧)

تعريف (١٦.٧):

السطح المنتظم $U \subset M$ يقال أنه موجه إذا كان وفقط إذا وجد حقل متجه وحدة عمودي تفاضلي $N : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ على M (أي أن الحقل N ليست له نقاط شاذة).

مثال (٢٢.٧):

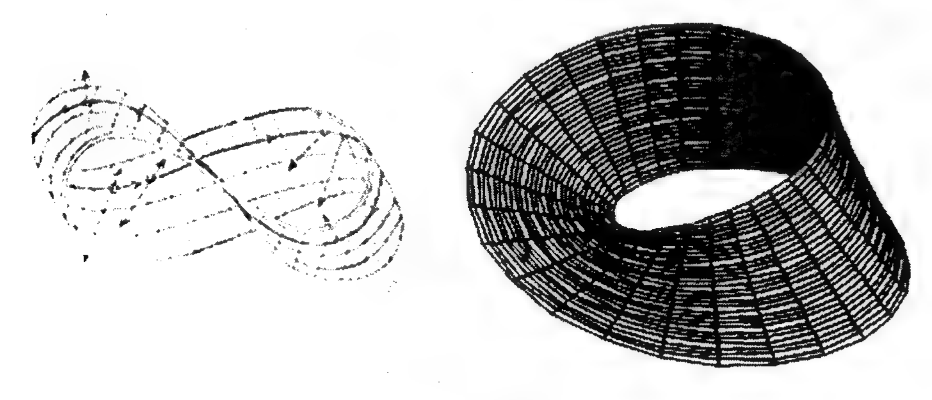
سطح شريط مبيس Möbius strip غير موجه.

الحل:

سطح شريط مبيس له التمثيل البارامتري

$$R(u^1,u^2)=((2-u^2\sin\frac{u^1}{2})\sin u^1,(2-u^2\sin\frac{u^1}{2})\cos u^1,u^2\cos\frac{u^1}{2})$$
$$,0<u^1<2\pi,-1<u^2<1$$

وبحساب حقل متجه الوحدة العمودي $N(u^1,u^2)$ نجد أنه يغير من إشارته من منطقة إلى أخرى كما هو موضح في شكل (٢٧.٧).



شكل (٢٧.٧)

مثال (٢٣.٧):

بين أن السطح المنتظم المعرف من خلال الدالة الضمنية التفاضلية $F(x,y,z)=0$ هو سطح موجه.

الحل:

سبق وأن بينا أن حقل متجه الوحدة العمودي على السطح $M : F(x,y,z)=0$ يعطى من

$$N(x,y,z)=\left(\frac{F_x}{\sqrt{|\nabla F|}},\frac{F_y}{\sqrt{|\nabla F|}},\frac{F_z}{\sqrt{|\nabla F|}}\right)$$

وهو حقل متجه تفاضلي وبالتالي فإن السطح M موجه لأن F ومشتقاتها دوال تفاضلية.

ملاحظة (١٣.٧):

التوجيه ليس خاصية محلية locally للسطح المنتظم بل هو خاصية موسعة globally بمعنى أنها تشمل السطح كله. حيث أنه من تعريف السطح المنتظم نجد أنه يكافئ توبولوجياً diffeomorphic منطقة مفتوحة من المستوى من خلال الراسم

$$R:(u^1,u^2)\in D\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow M\subset\mathbb{R}^3$$

ومثال لسطح موجه مبين في شكل (٢٨.٧) وهو سطح السرج الذي تمثيله البارامتري

$$x(u,v)=(u,v,u^2-v^2)$$

أو في الشكل الضمني

$$F(x,y,z)=z-x^2+y^2=0$$



شكل (٢٨.٧)

تمارين (٧)

(١) أوجد معادلة المستوى المماس لمجسم القطع الناقص $\sum_{i=1}^{3} (\frac{x^i}{a_i})^2 = 1$ عند النقطة $(0,0,a_3)$ وكذلك معادلة العمودي على السطح عند هذه النقطة.

(٢) أثبت أن المستويات المماسية للسطح المعرف بالعلاقة $x^3 = x^1 f(\frac{x^2}{x^1})$ تمر بنقطة الأصل لنظام الإحداثيات الكرتيزية.

(٣) أثبت أن السطوح الثلاثة $\sum_{i=1}^{3}(x^i)^2 = a_j x^j , j = 1,2,3$ تتقاطع على التعامد فيما بينها (كور مراكزها تقع على محاور الإحداثيات وأنصاف أقطارها $\frac{a_j}{2}$ وتمس مستويات الإحداثيات x^2x^3 ، x^1x^3 ، x^1x^2 على الترتيب)

(**إرشاد** : السطوح الثلاث تتقاطع على التعامد إذا كانت المستويات المماسية لها تتقاطع على التعامد عند نقاط التقاطع أي أن الأعمدة على المستويات المماسية متعامدة).

(٤) أثبت أن الأعمدة على السطح

$x^1 = f(u^1)\cos u^2, x^2 = f(u^1)\sin u^2, x^3 = g(u^1)$ تقطع محور ox^3 .

(**إرشاد**: أوجد معادلة العمودي وعين نقطة تقاطعه مع محور ox^3 إن وجدت).

(٦) أوجد معادلة العمودي عند النقطة $(0,0,1)$ على السطح

$$\Phi(x,y,z) = ze^{xy} - x - y - 1 = 0$$

(**إرشاد**: اتجاه العمودي هو $\nabla\Phi$)

(٧) أوجد معادلة المستوى المماس عند النقطة $(0,1,1)$ للسطح

$$F(x,y,z)= x\cos y - y\cos x + z = 0$$

(٨) أوجد النقاط الشاذة (المفردة) على السطح $F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2=0$

(إرشاد: النقاط الشاذة هي النقاط التي تجعل $\nabla F=0$ أي أن حقل المتجه العمودي يكون متجه صفري)

(٩) أوجد النقاط التي لا يمكن تحديد المستوى المماس عندها للسطح $x^2y^2=z$

(إرشاد: المستوى المماس لا يمكن تحديده إذا كان العمودي على السطح غير معرف والمطلوب هو تحديد النقطة التي يكون عندها العمودي غير معرف).

(١٠) أوجد إنحناء المنحنى $u=v$ على السطح $r(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$ ومن ثم أوجد الزاوية بين العمودي N على السطح والعمود الأساسي n على المنحنى.

(١١) أوجد المنحنى $u=v$ على السطح $r(u,v)=(a\cos u, a\sin u, v)$

وأوجد معادلة المماس له عند النقطة $(a,0,0)$

(إرشاد: المنحنى الناتج بوضع $u=v$ في معادلة السطح هو منحنى حلزون دائري).

(١٢) بين أن النقاط الشاذة على امتداد خط u^2 البارامتري $(u^1=\frac{\pi}{2})$ تمثل حرف مدبب على السطح شبه الكروي Pseudo-sphere

$$R(u^1,u^2)=(\sin u^1\cos u^2, \sin u^1\sin u^2, \cos u^1+\ln\tan\frac{u^1}{2})$$

(١٣) أوجد التمثيل البارامتري المنتظم للأسطوانة المقامة على المنحنى $y=f(x)$.

(١٤) أوجد التمثيل البارامتري المنتظم للأسطوانة الدائرية $x^2+y^2=1$.

(١٥) أوجد التمثيل البارامتري للسطح المكون من الأعمدة لمنحنى فراغ منتظم.

(١٦) أوجد تمثيل بارامتري منتظم للمخروط المزدوج $x^2+y^2-z^2=0$.

(١٧) أوجد التمثيل البارامتري للسطح المكون من المماسات لمنحنى فراغ منتظم.

(١٨) هل السطح $x^2+y^2-z^2=0$ كل نقاطه نقاط منتظمة.

(١٩) بين أن مجموع مربعات الأجزاء التي يقطعها المستوى المماس للسطح

$$R(u,v)=(u^3\sin^3 v, u^3\cos^3 v, (a^2-u^2)^{\frac{3}{2}})$$

من محاور الإحداثيات يكون ثابت دائماً.

(**إرشاد:** أوجد معادلة المستوى المماس عند أي نقطة عامة (u_o,v_o) واستخدم نفس الأسلوب في مثال (٧.٧)).

(٢٠) بين أن المجسم الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

سطح منتظم وأوجد تمثيل بارامتري منتظم له.

(**إرشاد:** استخدم تعريف السطح المنتظم من خلال دالة ضمنية).

(٢١) بين أن المستويات المماسية للسطح $z=yf(\frac{y}{x})$ تتلاقى في نقطة concurrent.

(**إرشاد:** أوجد معادلة المستوى المماس كما في أي مثال وضع بعد ذلك الحد المطلق يساوي الصفر وعين نقطة التلاقي).

(٢٢) أوجد النقاط الشاذة على السطح

$$R(u^1,u^2)=(u^1,u^2,u^1u^2)$$

(**إرشاد:** كون مصفوفة جاكوب وأكمل كما في أي مثال).

(٢٣) أوجد النقاط الشاذة إن وجدت على السطح

$$R(u^1,u^2)=(u^2+\cos u^1,u^2+\sin u^1,u^1)$$

(٢٤) أوجد معادلة العمودي على السطح

$$R(u,v)=(u\cos v,u\sin v,2v)$$

ومن ثم أوجد المستوى المماس له عند $(0,0,2)$ وأوجد نقاطه الشاذة إن وجدت.

(٢٥) هل السطح $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{4}=1$ موجه؟

(٢٦) بين أن السطح $z=x^2+y^2$ موجه وأوجد نقاطه الشاذة إن وجدت.

(٢٧) أوجد حقل متجه الوحدة العمودي على السطح

$$F(x,y,z)=x^2+3xy+y^2+z^2+2xz+yz-5=0$$

ومن ثم أوجد المستوى المماس له عند النقطة $(0,\sqrt{5},0)$.

الباب الثامن

الهندسة الذاتية للسطوح في الفراغ الثلاثي

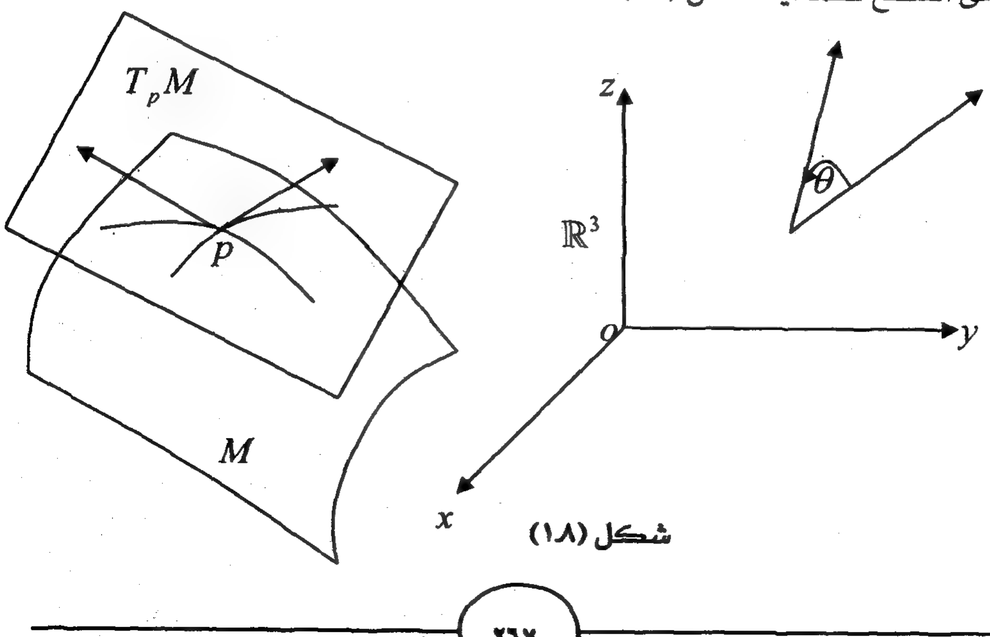
Intrinsic Geometry Surfaces

في هذا الباب نقدم الهندسة الذاتية أو الداخلية للسطح وفيه نعرف الصيغة المترية وحساب أطوال المنحنيات والزاوية بين اتجاهين على السطح وكذلك حساب مساحة جزء من السطح. وفي النهاية نعرف التساوي القياسي وتطابق السطوح.

(١.٨) مقدمة:

في الباب السابق نظرنا للسطح من منظور قابلية التفاضل differentiability وفي هذا الباب سوف نبدأ بدراسة أبنية هندسية على السطح geometric constructions ربما يكون أهمها الصيغة الأساسية الأولى.

كثير من الخصائص الهندسية في الفراغ $\mathbb{R}^n$ تعتمد على مفهوم الضرب الداخلي مثل الزاوية والتعامد وطول المتجه والمساحة وهنا نريد أن نعمم هذه الأفكار على السطح كما في شكل (١٨).



شكل (١٨)

ونبين أن الضرب الداخلي في $\mathbb{R}^3$ ينتج عنه أو يعرف ضرب داخلي على المتجهات في أي فراغ مماسي T_pM (خاصية وراثية) للسطح M.

تعريف (١.٨):

نفرض أن الدالة $<-,->_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ تعرف الضرب الداخلي في المستوى المماس T_pM للسطح M والناتج من الضرب الداخلي في الفراغ $\mathbb{R}^3$ الحاوي للسطح M.

تعريف (٢.٨):

الدالة $I_p(v) : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ والمعرفة كالآتي:

$$I_p(v) = <v, v> = |v|^2 > 0$$

تسمى الصيغة الأساسية الأولى The first fundamental form على السطح المنتظم أو باختصار FFF.

ملاحظة (١.٨):

الصيغة الأساسية الأولى هي فقط تعبير عن الكيفية التي يرث بها السطح الضرب الداخلي (القياسي) في $\mathbb{R}^3$. هندسياً فإن الصيغة الأساسية الأولى (الصيغة المترية metric form) تمكنا من عمل القياسات measurements على السطح (الأطوال، الزوايا والمساحات) بدون الرجوع للفراغ $\mathbb{R}^3$ الحاوي للسطح.

تعريف (٣.٨):

الخاصية الهندسية على السطح والتي تعتمد فقط على الصيغة المترية FFF للسطح تسمى خاصية ذاتية intrinsic property.

ملاحظة (٢.٨):

الخاصية الذاتية تعني أن أي مقيم resident على السطح يمكن أن يلاحظ أو يكتشف detect مثل هذه الخاصية بدون اللجوء أو الرجوع appealing للفراغ الكبير الذي يحوي السطح. بالتأكيد أن أي ساكن على السطح يمكن أن يقيس المسافة على السطح.

تعريف (٤٨):

نفرض أن $C : r(t):I \longrightarrow M$ منحنى على السطح M.

إذاً عنصر طول القوس ds عند $p \in M$ يعطى من

$$ds = \sqrt{I_p(r'(t))}\,dt \;,' = \frac{d}{dt}$$

في الجزء القادم سوف نعبر عن الصيغة FFF بدلالة المماسات r_α للخطوط البارامترية عند النقطة p على السطح.

(٢٨) الصيغة المترية على السطح : Metric form

لنعتبر سطحاً في الفراغ معطى بالتمثيل البارامتري:

$$\underline{r} = \underline{r}(u^\alpha) \qquad (8.1)$$

ومنحنى واقع عليه معطى بالمعادلتين $u^\alpha = u^\alpha(t)$. إذاً المماس لهذا المنحنى هو

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{r}_1 u'^1 + \underline{r}_2 u'^2 = \underline{r}_\alpha u'^\alpha \qquad (8.2)$$

أو ما يكافئ

$$\underline{r}' = \underline{r}_\alpha\, u'^\alpha \;,' = \frac{d}{dt}$$

وهذه الصيغة تعطي الاتجاهات على السطح. لتكن s هي المسافة القوسية على المنحنى $u^\alpha = u^\alpha(t)$ وبناء عليه يكون (من تعريف طول القوس في الباب الثالث).

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left|\frac{d\,\underline{r}}{d\,t}\right|^2 = <\underline{r}', \underline{r}'> = <\underline{r}_\alpha u'^\alpha, \underline{r}_\beta u'^\beta>$$

$$= <\underline{r}_\alpha, \underline{r}_\beta> \frac{du^\alpha}{dt}\frac{du^\beta}{dt} \quad \text{(من خواص الضرب القياسي)}$$

لنرمز الآن للصيغة $<\underline{r}_\alpha, \underline{r}_\beta>$ بالرمز $g_{\alpha\beta}$ وبالتالي نحصل على

$$(\frac{ds}{dt})^2 = g_{11}(\frac{du^1}{dt})^2 + g_{12}\ \frac{du^1}{dt}\ \frac{du^2}{dt} + g_{21}\ \frac{du^2}{dt}.\frac{du^1}{dt} + g_{22}\ (\frac{du^2}{dt})$$

حيث $g_{\alpha\beta} = < \underline{r}_\alpha, \underline{r}_\beta > = < \underline{r}_\beta, \underline{r}_\alpha > = g_{\beta\alpha}$.

$$\therefore\ (\frac{ds}{dt})^2 = g_{11}\ (\frac{du^1}{dt})^2 + 2g_{12}\frac{du^1}{dt}\ \frac{du^2}{dt} + g_{22}\ (\frac{du^2}{dt})^2 \quad (8.3)$$

وهذه تعطي مربع عنصر المسافة القوسية على المنحنى الذي يقع على السطح وهي صحيحة لأي منحنى واقع على السطح. إذاً يمكننا حذف t في الطرفين ونحصل على ds^2 وهي تمثل عنصر المسافة بين نقطتين متجاورتين على السطح أي أن

$$I = < d\underline{r}, d\underline{r} > = ds^2 = g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta \qquad (8.4)$$

وهذه الصيغة تسمى الصيغة المترية metric form للسطح أو الصيغة الأساسية الأولى على السطح the 1st fundamental form وتسمي الكميات $g_{\alpha\beta}$ بالكميات الأساسية الأولى (الكميات المترية metric quantities) على السطح (8.1).

بالنسبة للصيغة المترية (8.4) نعرف مميز discriminate الصيغة المترية (محدد الصيغة التربيعية الأولي) للسطح ونرمز له عادة بالرمز g ويعطى من

$$g = Det\,(g_{\alpha\beta}) = Det\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = g_{11}\,g_{22} - (g_{12})^2 \quad (8.12)$$

نظرية (٨-١):

مميز الصيغة المترية $g = g_{11}\,g_{22} - (g_{12})^2$ موجب أي أن الصيغة التربيعية الأولى I quadratic form موجبة بالتحديد positive definite.

البرهان:

لنعتبر الآن الصيغة المترية

$$I = ds^2 = g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}(du^2)^2$$

لاحظ أن ds^2 هي مربع عنصر المسافة بين نقطتين متجاورتين على السطح وبالتالي فهي موجبة دائماً. بالنسبة للخط u^1 البارامتري يكون $du^1 \neq 0,\ du^2 = 0$ وبالتالي فإن $ds^2 = g_{11}(du^1)^2$ ، إذاً لابد أن يكون g_{11} موجب. وبالمثل يمكن أن نرى g_{22} لابد وأن يكون موجب. بالنسبة للصيغة المترية في شكلها العام نلاحظ أنه لا يمكن أن ينعدم العنصران $du^2,\ du^1$ في وقت واحد أي لا يمكن أن يكون $(du^1,\ du^2) = (0,0)$ وإلا كانت ds^2 تساوي صفراً في حين أنها موجبة.

إذاً لابد وأن يكون أحدهما وليكن du^2 مختلف عن الصفر أي $du^2 \neq 0$.

$$\therefore ds^2 = (du^2)^2\ [g_{11}(\frac{du^1}{du^2})^2 + 2\,g_{12}\frac{du^1}{du^2} + g_{22}]$$

نكتب $v = \dfrac{du^1}{du^2}$ ومنها يكون

$$ds^2 = (du^2)^2\ [g_{11}v^2 + 2g_{12}v + g_{22}]$$

وحيث أن كل من $ds^2, (du^2)^2$ موجب إذاً المقدار $g_{11}v^2 + 2g_{12}v + g_{22}$ موجب لجميع قيم v ولكن g_{11} موجب دائماً. إذاً حسب نظرية المقادير ذات الدرجة الثانية نجد أن $4g_{11}g_{22} - (2g_{12})^2$ موجب. أي أن $4\ (g_{11}\ g_{22}\ -\ (g_{12})^2)$ موجب ومنه نجد أن $g_{11}g_{22} - (g_{12})^2$ موجب، أي أن مميز الصيغة المترية موجب.

(٣.٨) الزاوية بين اتجاهين على السطح:

بالنسبة لتحديد اتجاه على السطح فإنه يمكن أن يعطى بالمعادلة (8.2) أو أي متجه أخر يوازي $\underline{r}'$. إذاً يمكن اعتبار $d\,\underline{r}$ اتجاه على السطح. وبضرب طرفي المعادلة (8.2) في dt نحصل على

$$d\,\underline{r} = \underline{r}_\alpha du^\alpha \qquad (8.5)$$

واضح أن الاتجاه $d\,\underline{r}$ هو عبارة عن ارتباط خطي بين $\underline{r}_2, \underline{r}_1$ ومعاملاته $du^1,\ du^2$ والعكس كذلك صحيح بمعنى أن أي ارتباط خطي بين $\underline{r}_2,\ \underline{r}_1$ عند نقطة p عبارة

عن متجه واقع في المستوى المماس عند p ومار بالنقطة p وبالتالي يكون خطاً مماسياً للسطح وبالتالي اتجاهاً على السطح عند p ولكن أي ارتباط خطي هو من الصورة (8.5). إذاً أي اتجاه على السطح يأخذ الصورة (8.5).

سنتفق على أن نرمز للاتجاه $\lambda^{\alpha}\underline{r}_{\alpha}$ على السطح بالرمز

$$(\lambda^{\alpha}) = (\lambda^1, \lambda^2), \alpha = 1,2 \qquad (8.6)$$

حالة خاصة:

اتجاه خط u^1 البارامتري هو المماس $\underline{r}_1$ لخط u^1 البارامتري ويكتب في الصورة $(1,0)$. بالمثل اتجاه خط u^2 البارامتري هو المماس $\underline{r}_2$ لخط u^2 البارامتري ويكتب في الصورة $(0,1)$.

لنعتبر اتجاهين (في الحالة العامة) على السطح عند نقطة p عليه، ليكن هذين الاتجاهين هما μ, λ حيث $\lambda = \lambda^{\alpha}\underline{r}_{\alpha};\ \mu = \mu^{\beta}\underline{r}_{\beta}$ ولتكن θ هي الزاوية بينهما وتتعين من

$$<\lambda, \mu> = |\lambda||\mu|\cos\theta \qquad \text{(من الباب الثاني)}$$

حيث

$$|\lambda|^2 = <\lambda, \lambda> = \lambda^{\alpha}\lambda^{\beta} <\underline{r}_{\alpha}, \underline{r}_{\beta}>$$

$$\therefore |\lambda|^2 = g_{\alpha\beta}\ \lambda^{\alpha}\lambda^{\beta} \qquad (8.7)$$

بالمثل يكون

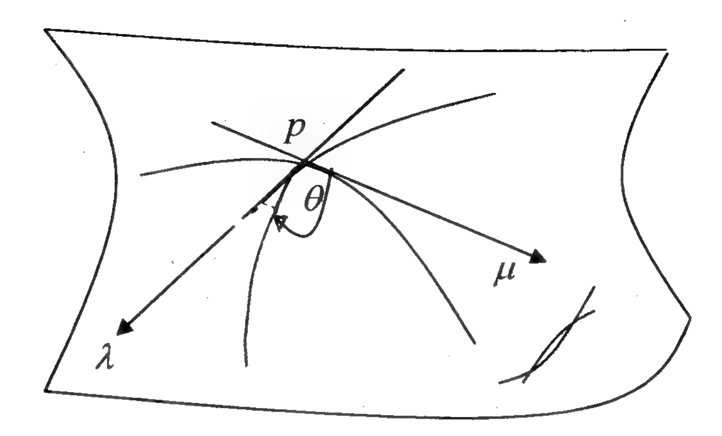
$$|\mu|^2 = g_{\alpha\beta}\ \mu^{\alpha}\mu^{\beta} \qquad (8.8)$$

$$<\lambda, \mu> = g_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}\mu^{\beta} \qquad (8.9)$$

ومن (8.9) ,(8.8) ,(8.7) نحصل على العلاقة

$$\cos\ \theta = \frac{g_{\alpha\beta}\ \lambda^{\alpha}\mu^{\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\beta}\ \lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}}\sqrt{g_{\alpha\beta}\ \mu^{\alpha}\mu^{\beta}}} \qquad (8.10)$$

وهـذه الـصيغة تعطـي الزاويـة بـين الاتجـاهين $\lambda=(\mu^{\beta}), \mu=(\lambda^{\alpha})$ كمـا في شـكل (٢٨).



شكل (٢٨)

لنعتبر كحالة خاصة الزاوية بين اتجاهي خط u^1 البارامتري $(\lambda^{\alpha})=(1,0)$ واتجاه خط u^2 البارامتري $(\mu^{\alpha})=(0, 1)$ وبتطبيق العلاقة (8.10) نحصل على

$$\cos\ \theta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} \qquad (8.11)$$

وهي تعطي الزاوية بين الخطوط البارامترية. ولذلك يمكن صياغة النظرية الآتية:

نظرية (٢٨):

الشرط الضروري والكافي كي تتعامد الخطوط البارامترية على السطح هو $g_{12}=0$ $(g_{12}=0 \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$ من (8.11)).

في هذه الحالة يقال أن السطح مغطى بشبكة من الإحداثيات المنحنية المتعامدة وتتحقق $g_{12}=0$ تطابقياً والصيغة الأساسية الأولى تأخذ الشكل

$$\mathrm{I}=ds^2=g_{11}(du^1)^2+g_{22}(du^2)^2$$

(٤٨) المسارات المتعامدة على السطح: Orthogonal Curves on a Surface

نفرض أنه في المنطقة المجاورة للنقطة $(u_o^\alpha)=(u_o^1,u_o^2)$ على السطح المنتظم (8.1) توجد عائلة من المنحنيات المنتظمة المعرفة بالمعادلة

$$f(u^1,u^2) = \text{const.} ,|\nabla f|^2=(f_1)^2+(f_2)^2 \neq 0$$

حيث $\alpha=1,2, f_\alpha=\dfrac{\partial f}{\partial u^\alpha}$ عند النقطة (u_o^1,u_o^2).

نحاول تكوين عائلة المنحنيات التي تتقاطع مع العائلة الأولى على التعامد. لذلك نفرض أن العائلة الثانية موجودة ونحاول إيجاد المعادلة التفاضلية لهذه العائلة.

اتجاه عائلة المنحنيات الأولى عند النقطة (u_o^1,u_o^2) هو $(f_2,-f_1)$ فإذا رمزنا لاتجاه عائلة المنحنيات الثانية بالرمز (du^1,du^2) فإن شرط التعامد لهذه الاتجاهات يعطى من العلاقة

$$g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta=0$$

حيث $(\lambda^\alpha)=(du^1,\ du^2)$, $(\mu^\beta)=(f_2,-f_1)$ إذاً شرط التعامد يأخذ الصورة

$$g_{11}f_2du^1+g_{12}(f_2du^2-f_1du^1)-g_{22}f_1du^2=0$$

أو

$$(g_{11}f_2-g_{12}f_1)du^1+(g_{12}f_2-g_{22}f_1)du^2=0$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية لعائلة المنحنيات التي تقطع عائلة المنحنيات $f(u^1,u^2)=\text{const.}$ على التعامد.

نظرية (٣٨):

في المنطقة المجاورة لكل نقطة على السطح يمكن اختيار تمثيل بارامتري منتظم متعامد حيث أحد عائلات المنحنيات الإحداثية تكون اختيارية.

البرهان:

نفرض أن $f(u^1,u^2)=\text{const}$ عائلة من المنحنيات على السطح (8.1) حيث f دالة منتظمة تحقق الشرط $|\nabla f|^2=(f_1)^2+(f_2)^2\neq 0$. ونعتبر المعادلات التفاضلية الآتية:

$$\left.\begin{array}{l} df = 0 \text{ or } f_1 du^1 + f_2 du^2 = 0 \\ (g_{11} f_2 - g_{12} f_1) du^1 + (g_{12} f_2 - g_{22} f_1) du^2 = 0 \end{array}\right\} \quad (8.12)$$

المنحنيات التكاملية للمعادلة الأولى هي منحنيات العائلة المعطاة والمنحنيات التكاملية للمعادلة الثانية هي المسارات المتعامدة للعائلة الأولى.

السطح يمكن تمثيله بارامترياً بحيث العائلات المذكورة تكون منحنيات إحداثية $(du^1 = 0, du^2 = 0)$ طالما أن:

$$\begin{vmatrix} g_{11} f_2 - g_{12} f_1 & g_{12} f_2 - g_{22} f_1 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix} = g_{11} f_2^2 + g_{22} f_1^2 - 2 g_{12} f_1 f_2 \neq 0$$

وذلك لأن $g_{11} g_{22} - g_{12}^2 \neq 0$

وهذا يكمل برهان النظرية.

ملاحظة (٨-٣):

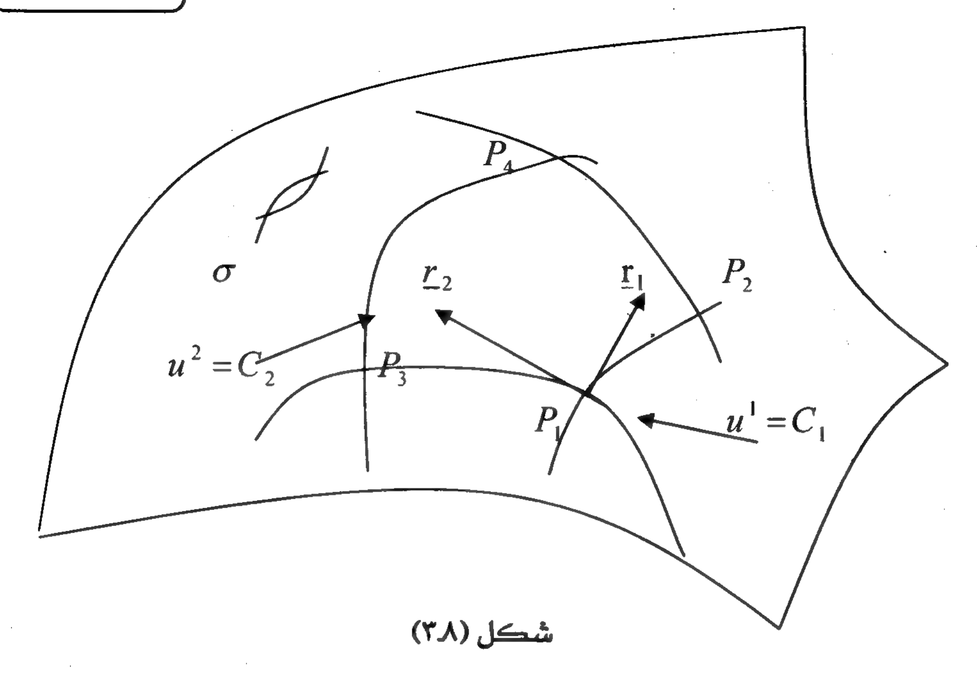
الكميات المترية $g_{\alpha\beta}$ على السطح أخذت أسمها من طريقة التعريف حيث $g_{11} = \langle r_1, r_1 \rangle = |r_1|^2$ ، $g_{22} = \langle r_2, r_2 \rangle = |r_2|^2$ أي أن $g_{\alpha\alpha}$ هو مربع طول المماس للخطوط البارامترية $u^\alpha = \text{const.}$ ، $\alpha \neq \beta$ ، بينما g_{12} تتناسب مع جيب تمام الزاوية بين الخطوط البارامترية.

(٨-٥) عنصر المساحة على السطح: Element of surface area

نعتبر شبكة من الإحداثيات المنحنية على السطح ونعتبر متوازي الأضلاع ذو الأضلاع المنحنية والذي رؤوسه هي النقط P_1, P_2, P_3, P_4 القريبة جداً من بعضها حيث

$$P_1 = \underline{r}\,(u^1, u^2),\; P_2 = r(u^1 + d\,u^1, u^2),$$

$$P_3 = \underline{r}\,(u^1, u^2 + du^2),\; P_4 = r(u^1 + du^1, u^2 + du^2)$$



شكل (٣٨)

من هندسة الشكل نلاحظ أن

$$P_1P_2 = \underline{r}\ (u^1 + du^1, u^2) - \underline{r}(u^1, u^2)\ ,\ P_1P_3 = \underline{r}\ (u^1, u^2 + du^2) - \underline{r}(u^1, u^2)$$

باستخدام مفكوك تيلور وأخذ التقريب الخطي (الأول) نجد أن

$$P_1P_2 \cong \underline{r}_1\ d\ u^1,\ P_1P_3 \cong \underline{r}_2\ d\ u^2$$

وبالتالي مساحة متوازي الأضلاع ذو الأضلاع المنحنية $P_1P_2,\ P_1P_3$ تساوي تقريباً مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على المتجهين $\underline{r}_2du^2,\ \underline{r}_1du^1$ وهي

$$\left|r_1du^1 \wedge \underline{r}_2du^2\right| = \left|\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2\right| du^1du^2$$

فإذا رمزنا لعنصر المساحة بالرمز $|dA|$ حيث

$$|dA| = \left|\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2\right|\ du^1du^2 \qquad (8.13)$$

من تعريف المساحة المتجهة يكون لدينا

$$\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2 = \left|\underline{r}_1\right|\left|\underline{r}_2\right|\ \sin\theta \underline{N} \qquad (8.14)$$

حيث θ هي الزاوية بين المتجهين $\underline{r}_2,\underline{r}_1$ و $\underline{N}$ وحدة المتجهات في اتجاه العمودي على السطح (أي عمودي على المستوى المماس للسطح عند نقطة P_1).

بالتربيع للعلاقة (8.14) نحصل على

$$|\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2|^2 = |\underline{r}_1|^2 |\underline{r}_2|^2 \sin^2\theta \qquad (8.15)$$

$$= |\underline{r}_1|^2 |\underline{r}_2|^2 (1 - \cos^2\theta)$$

$$= |\underline{r}_1|^2 |\underline{r}_2|^2 - (|\underline{r}_1||\underline{r}_2|\cos\theta)^2$$

ومن تعريف الكميات المترية $g_{\alpha\beta}$ يمكن كتابة

$$|\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2|^2 = g_{11}g_{22} - <\underline{r}_1,\underline{r}_2>^2 = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2$$

$$\therefore |\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2| = \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} = \sqrt{g} \qquad (8.16)$$

إذاً حقل متجه الوحدة N في اتجاه العمودي على السطح يأخذ الصورة

$$N = \frac{1}{\sqrt{g}}(\underline{r}_1 \wedge \underline{r}_2) \qquad (8.17)$$

ويسمى حقل متجه الوحدة العمودي على السطح بينما $r_1 \wedge r_2$ هو حقل العمودي على السطح لأن كل منهما دالة في البارامترات الإحداثية (u^1,u^2) عند أي نقطة على السطح.

يمكننا كتابة عنصر المساحة المتجهة من (8.16) على الصورة

$$dA = \sqrt{g}\ du^1 du^2 N \qquad (8.18)$$

وهذا يتفق مع ما نعرفه من أن المساحة كمية اتجاهية واتجاهها عمودي على المستوى المماس للسطح المطلوب حساب مساحته.

من (8.16)، (8.18) نحصل على :

$$dA = |dA|N\,,\quad |dA| = \sqrt{g}\ du^1 du^2 \qquad (8.19)$$

مسقط متجه عنصر المساحة على المستوى xy أي مسقط dA على المتجه الثابت e_3 (العمودي على المستوى xy) هو $P_{xy}dA$ وهو $dx\,dy$ ويعطى من

$$dxdy = P_{xy}dA = \langle dA, e_3 \rangle$$

$$= < |dA|N, e_3 > = |dA| < N, e_3 > = |dA|\cos\theta$$

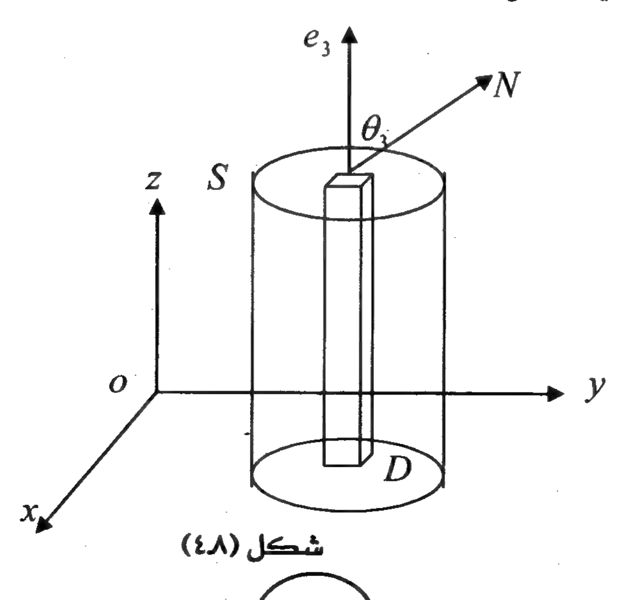
$$\therefore \quad |dA| = \frac{dxdy}{< N, e_3 >} = dxdy\ \sec\theta_3 \qquad (8.20)$$

بالمثل

$$|dA| = \frac{dxdz}{< N, e_2 >} = dxdz\ \sec\theta_2\ , \qquad (8.21)$$

$$|dA| = \frac{dydz}{< N, e_1 >} = dydz\ \sec\theta_1 \qquad (8.22)$$

حيث $< N, e_i > = \cos\theta_i$ ، θ_i هي الزاوية التي يصنعها العمودي N على السطح مع محاور الإحداثيات (الأعمدة على مستويات الإحداثيات المُسقط عليها هذه المساحة) كما هو موضح في شكل (٤٨).



شكل (٤٨)

مثال (١.٨):

إذا كان السطح ممثلاً بصيغة مونج $z = f(x,y)$

فإن حقل متجه الوحدة العمودي N على السطح (من الباب السابع) يعطى من

$$\sqrt{g} = \sqrt{1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}, N = (-f_x, -f_y, 1)/\sqrt{g} \qquad (8.23)$$

مثال (٢.٨):

في حالة السطح الممثل بالصيغة الضمنية

$$F(x,y,z) = 0$$

فإن حقل متجه الوحدة العمودي N على السطح له الاتجاه ∇F ويعطى من (أنظر الباب السابع):

$$N = (F_x, F_y, F_y)/\sqrt{g} = \nabla F/\sqrt{g},$$

$$\sqrt{g} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = |\nabla F| \qquad (8.24)$$

(٥.٨) التساوي القياسي: Isometric mapping

تعريف (٥.٨):

يقال أن راسم التوبولوجي التفاضلي diffeomorphism $\Phi : M \longrightarrow \bar{M}$ بين سطحين $M, \bar{M}$ تساوي قياسي isometry إذا تحقق

$$<v_1, v_2>_p = <d\Phi_p(v_1), d\Phi_p(v_2)>_{\Phi(p)} \qquad (8.25)$$

لكل $v_1, v_2 \in T_pM$ ، $p \in M$.

في هذه الحالة يقال أن السطحين $M, \bar{M}$ متساويين قياسياً isometric.

وهذا يعني أن راسم التوبولوجي التفاضلي يكون تساوي قياسي إذا كان التفاضلي differential

$$d\Phi_p : T_pM \longrightarrow T_{\Phi(p)}\bar{M} \ ,$$

$$v_1 \in T_pM \longrightarrow d\Phi_p(v_1) \in T_{\Phi(p)}\bar{M}$$

يحافظ على الضرب الداخلي. وإذا كانت $v_1 = v_2 = w$ مثلاً فإن

$$I_p(w) = <w, w>_p = <d\Phi_p(w), d\Phi_p(w)>_{\Phi(p)}$$

$$= I_{\Phi(p)}(d\Phi_p(w)), \forall w \in T_p(s)$$

أي أن راسم التساوي القياسي يحافظ على الصيغة الأساسية الأولى بمعنى

$$I_p(w) = I_{\Phi(p)}(d\Phi_p(w)), \forall w \in T_p(M) \qquad (8.26)$$

والعكس صحيح.

تعريف (٨ـ٦):

الراسم $\Phi : V \subset M \longrightarrow \bar{M}$ يكون تساوي قياسي محلي locally isometric عند p إذا وجد جوار مباشر $\bar{V}$ للنقطة $\Phi(p) \in \bar{M}$ بحيث الراسم $\Phi : V \longrightarrow \bar{V}$ يكون تساوي قياسي.

تعريف (٨ـ٧):

إذا وجد تساوي قياسي محلي إلى $\bar{M}$ لكل نقطة $p \in M$ يقال في هذه الحالة أن السطح M في تساوي قياسي محلي مع $\bar{M}$.

تعريف (٨ـ٨):

السطوح $M, \bar{M}$ يكونا في تساوي قياسي محلي إذا كان M في تساوي قياسي محلي مع $\bar{M}$ و $\bar{M}$ في تساوي قياسي محلي مع M.

ملاحظة (٨ـ٤):

إذا كان $\Phi : M \longrightarrow \bar{M}$ راسم توبولوجي تفاضلي وتساوي قياسي محلي لكل نقطة $p \in M$ ، إذاً Φ يكون تساوي قياسي كلي أو موسع globally isometic.

ملاحظة (٨-٥):

من الممكن أن يكون هناك سطحين في تساوي قياسي محلي وليس بالضرورة أن يكونا في تساوي قياسي موسع.

ونوضح ذلك بالمثال التالي:

مثال (٨-٣):

نعتبر الأسطوانة $x^2+y^2=1$ والمغطاة بالغطاء المنتظم

$$R(u^1,u^2)=(\cos u^1,\sin u^1,u^2),0<u^1<2\pi,u^2\in\mathbb{R}$$

والمستوى

$$\bar{R}(u^1,u^2)=(u^1,u^2,3)$$

ومن السهل التأكد من أن

$$g_{11}=\bar{g}_{11}=1,g_{12}=\bar{g}_{12}=0,g_{22}=\bar{g}_{22}=1$$

إذاً المستوى والأسطوانة الدائرية القائمة في تساوي قياسي محلي بالرغم من أنهما سطحين مختلفين تماماً.

ملاحظة (٨-٦):

توجد تمثيلات بارامترية أخرى للمستوى تختلف فيما بينها باختيار الأساس للمستوى وقد يترتب عليها عدم تساوي الكميات الأساسية الأولى (المترية) على كل من سطحي المستوى والأسطوانة فمثلاً إذا كان المستوى معرف بالدالة الاتجاهية

$$\bar{R}(u^1,u^2)=(u^1+u^2,u^1-u^2,5)$$

فإن

$$\bar{g}_{11}=\sqrt{3},\bar{g}_{12}=0,\bar{g}_{22}=\sqrt{3}$$

بينما للأسطوانة المعطاة يكون

$$g_{11}=g_{22}=1,g_{12}=0$$

وهذا يوضح مفهوم التساوي القياسي المحلي.

نعطي الآن نظرية توضح التساوي القياسي المحلي من خلال الإحداثيات المحلية locally coordinates على السطوح.

نظرية (٨-٤):

نفرض وجود تمثيلات بارامترية على الصورة

$$R : U \longrightarrow M \ , \ \bar{R} : U \longrightarrow \bar{M}$$

بحيث

$$\bar{g}_{11} = g_{11}, \bar{g}_{12} = g_{12}, \bar{g}_{22} = g_{22} \qquad (8.27)$$

إذاً الراسم $\Phi = \bar{R} \circ R^{-1} : R(U) \longrightarrow \bar{M}$ يكون تساوي قياسي محلي.

مثال (٨-٤):

بين أن سطح الكاتينويد Catenoid

$$M : R(u^1, u^2) = (a \cosh u^2 \cos u^1, a \cosh u^2 \sin u^1, a u^2),$$
$$u^2 \in \mathbb{R}, 0 < u^1 < 2\pi$$

في تساوي قياسي مع سطح الهليكويد Helicoid

$$\bar{M} : \bar{R}(u^1, u^2) = (\bar{u}^2 \cos \bar{u}^1, \bar{u}^2 \sin \bar{u}^1, a\bar{u}^1), 0 < \bar{u}^1 < 2\pi, \bar{u}^2 \in \mathbb{R}$$

الحل:

الكميات الأساسية الأولى $\bar{g}_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta}$ على السطحين M، $\bar{M}$ تعطى من

$$g_{11} = a^2 \cosh^2 u^2, g_{12} = 0, g_{22} = a^2 \cosh^2 u^2$$
$$\bar{g}_{11} = a^2 + (\bar{u}^2)^2, \bar{g}_{12} = 0, \bar{g}_{22} = 1$$

وإذا استخدمنا التحويل الأحادي (تناظر أحادي)

$$(u^1, u^2) \longrightarrow (\bar{u}^1, \bar{u}^2) \ , \ \bar{u}^1 = u^1, \bar{u}^2 = a \cosh u^2$$

$$\therefore Det\left(\frac{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}{\partial(u^1, u^2)}\right) = a \cosh u^2 \neq 0 \ , \forall u^2$$

إذاً التمثيل البارامتري لسطح الهليكويد يصبح على الصورة:

$$\bar{R}(u^1,u^2)=(a\sinh u^2\cos u^1, a\sinh u^2\cos u^1, au^1)$$

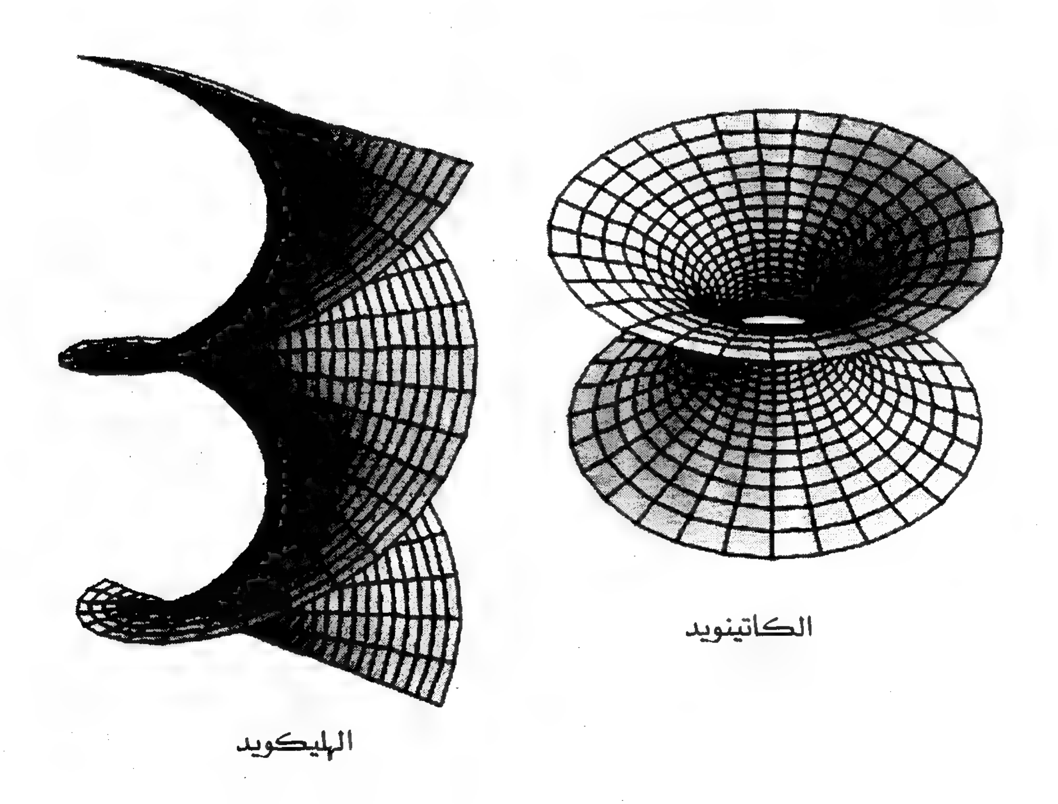
والكميات الأساسية الأولى بالنسبة للتمثيل $\bar{R}$ تصبح

$$\bar{g}_{11}=a^2\cosh^2 u^2, \bar{g}_{12}=0, \bar{g}_{22}=a^2\cosh^2 u^2$$

وطبقاً للنظرية السابقة (٨ـ٤) فإن سطح الهليكويد في تساوي قياسي مع سطح الكاتينويد كما هو موضح في الشكل (٥٨).

ملاحظة (٨ـ٦):

راسم التساوي القياسي السابق ينقل الخطوط المستقيمة $(\bar{u}^1 = \text{const.})$ على الهليكويد إلى خطوط الزوال meridians $(u^1 = \text{const.})$ على الكاتينويد.

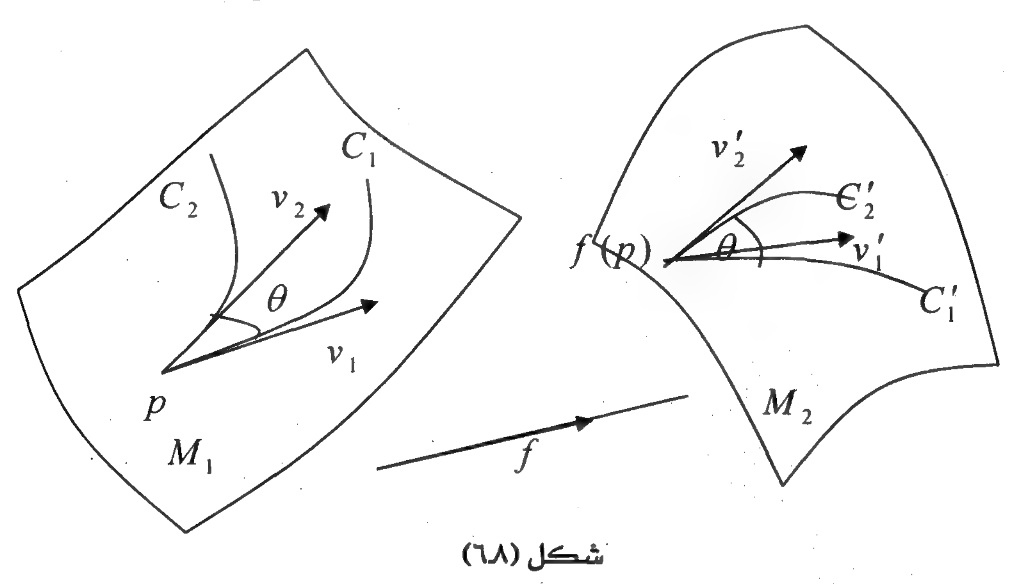


شكل (٥٨)

(٨-٦) راسم التطابق بين السطوح: Conformal Mapping

تعريف (٨-٩):

يقال أن الراسم التوبولوجي diffeomorphism $f: M_1 \longrightarrow M_2$ بين سطحين منتظمين M_1, M_2 راسم تطابق conformal إذا حافظ على الزوايا بين المنحنيات، بمعنى أن المنحنيات المتناظرة على هذين السطحين تتقاطع بزوايا متساوية.



شكل (٨-٦)

هذا التعريف يمكن صياغته في الصورة:

إذا كان لكل $p \in M$ ، $v_1, v_2 \in T_pM$ يتحقق

$$< df_p(v_1), df_p(v_2) > = \lambda^2 < v_1, v_2 >_p \qquad (8.28)$$

حيث λ^2 دالة تفاضلية لا تساوي الصفر في أي مكان على السطح M ، $v'_1 = df_p(v_1)$ ، $v'_2 = df_p(v_2)$

تعريف (٨-١٠):

يقال أن الراسم التوبولوجي $f: U \longrightarrow \bar{M}$ من جوار مباشر U للنقطة $p \in M$ إلى $\bar{M}$ راسم تطابق محلي locally conformal عند p إذا وجد

جوار $\bar{M} \supset V$ عند $f(p)$ بحيث $f: U \longrightarrow V$ يكون راسم تطابق. إذا كان لكل $p \in M$ يوجد راسم تطابق عند p فإنه يقال أن السطح M يطابق محلياً السطح $\bar{M}$.

المعنى الهندسي للتعريف السابق أن الزوايا (ليست بالضرورة الأطوال) محفوظة برواسم التطابق. ونوضح ذلك كالآتي:

نفرض أن $C_1 : r_1 : I \longrightarrow M \,, C_2 : r_2 : I \longrightarrow M$ منحنيين على السطح M ويتقاطعا في زاوية ولتكن θ عند $u = 0$ حيث $r_1 = r_1(u)$ ، $r_2 = r_2(u)$ ، $u \in I$. إذاً الزاوية θ عند $u = 0$ تعطى من

$$\cos\theta = \frac{< r_1', r_2' >}{| r_1' || r_2' |} \,, \ 0 < \theta < \pi$$

راسم التطابق $f: M \longrightarrow \bar{M}$ يرسم المنحنيات C_1, C_2 إلى المنحنيات

$$\bar{C}_1 : f(r_1) : I \longrightarrow \bar{M} \,, \bar{C}_2 : f(r_2) : I \longrightarrow \bar{M}$$

والتي تتقاطع عند $u = 0$ والزاوية بينهما $\bar{\theta}$ تعطى من

$$\cos\bar{\theta} = \frac{< df(r_1'), df(r_2') >}{| df(r_1') || df(r_2') |}$$

حيث (باستخدام (8.28))

$$\cos\bar{\theta} = \frac{\lambda^2 < r_1', r_2' >}{\lambda^2 | r_1' || r_2' |} = \cos\theta \qquad (8.29)$$

ملاحظة (٨ـ٧):

الخاصية السابقة صالحة في حالة راسم التطابق المخلي.

نعطي الآن نظرية نتعرف من خلالها بطريقة عملية حسابية على تطابق السطوح وهي مشابهة لمثيلتها في التساوي القياس وتنص على:

نظرية (٨ـ٥):

نفرض أن لدينا سطحين $M, \bar{M}$ ومغطاتين بالرقع الإحداثية (تمثيل بارامتري منتظم) $\bar{R}: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \bar{M}$, $R: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ على الترتيب. بحيث الكميات الأساسية الأولى (الكميات المترية) على السطحين متناسبة في المنطقة U بمعنى يتحقق

$$\frac{g_{11}}{\bar{g}_{11}} = \frac{g_{12}}{\bar{g}_{12}} = \frac{g_{22}}{\bar{g}_{2}} = \lambda^2 \qquad (8.30)$$

حيث λ^2 دالة تفاضلية لا تساوي الصفر في أي مكان في U. إذاً الراسم $f = \bar{R} \circ R^{-1} : R(U) \longrightarrow \bar{M}$ هو راسم تطابق محلي.

ملاحظة (٨ـ٨):

التطابق المحلي هو علاقة تكافؤ بين السطوح.

نعطي الآن نظرية هامة بالنسبة لرواسم التطابق (بدون برهان).

نظرية (٨ـ٦):

أي سطحين متطابقين محلياً.

برهان هذه النظرية يعتمد على إمكانية عمل تمثيل بارامتري لمنطقة جوار مباشر لأي نقطة على سطح منتظم بحيث يتحقق

$$g_{11} = \lambda^2(u^1, u^2), g_{12} = 0, g_{22} = \lambda^2(u^1, u^2)$$

تعريف (٨ـ١١):

نظام الإحداثيات المعرف في النظرية (٦٨) يسمى تساوي حراري isothermal.

ملاحظة (٨ـ٩):

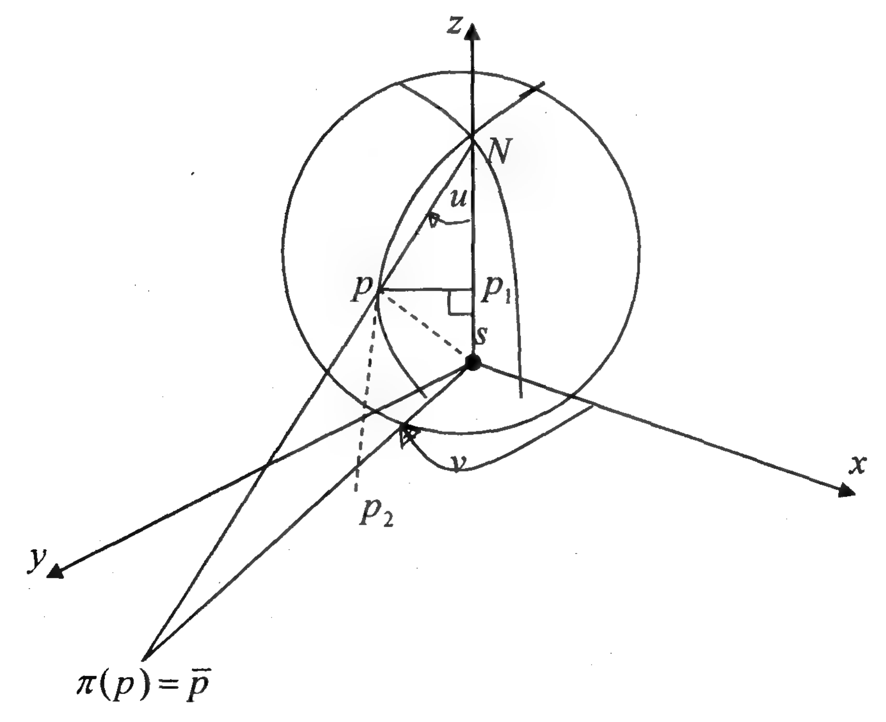
إذا وجد سطح له تمثيل بارامتري تساوي حراري فإن هذا السطح يطابق محلياً المستوى $(g_{12} = 0, g_{11} = g_{22} = \text{ const.})$

مثال (٨.٥):

بين أنه يوجد راسم تطابق بين سطح الكرة والمستوى.

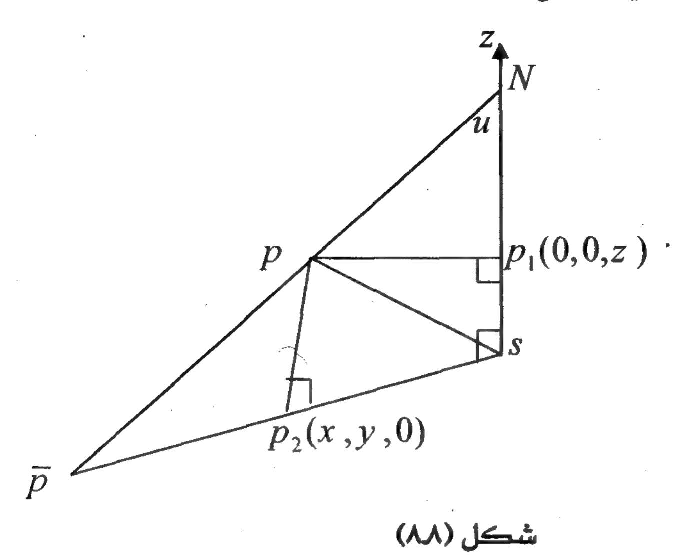
الحل:

ليكن $S^2(1)$ سطح كرة نصف قطرها الوحدة ومركزها $(0,0,1)$ أي أنها تمس المستوى oxy عند نقطة الأصل وبالتالي فإن محور z يمر بالقطب الجنوبي والشمالي. نقوم بإسقاط سطح الكرة من القطب الشمالي $N(0,0,2)$ على المستوى oxy حيث مسقط أي نقطة $p \in S^2(1)$ على المستوى xy هو نقطة تلاقي المستقيم الواصل بين القطب الشمالي والنقطة p مع المستوى ولتكن $\pi(p) = \bar{p}$ ونفرض أن الخط $\bar{p}p$ يصنع زاوية u مع محور z وأن الخط $\bar{p}s$ يصنع زاوية v مع محور x كما هو موضح في الشكل (٧٨).



شكل (٧٨)

وبالنظر إلى المثلث المساعد في شكل (٨٨)



شكل (٨٨)

نجد أن

$$ps = 2\sin u \ , \ \bar{p}s = 2\sin u \cos u$$

$$z = p_1 s = 2\sin u \sin u = 2\sin^2 u$$

وحيث أن $\bar{p}s$ واقع في المستوى xy نقوم بتحليله إلى مركبتين $x, \ y$ في اتجاه محاور الإحداثيات ox, oy كالآتي:

$$x = 2 \sin u \cos u \cos v \ , \ \ y = 2 \sin u \cos u \sin v$$

إذاً التمثيل البارامتري لسطح الكرة في هذه الحالة يأخذ الصورة:

$$R(u,v) = (2\sin u \cos u \cos v, 2\sin u \cos u \sin v, 2\sin^2 u)$$

وحيث أن $\bar{p}s = 2\tan u$ (من المثلث القائم) وبما أن $\bar{p}s$ واقع في المستوى المسقط عليه oxy

$$\therefore x = \bar{p}s \cos v = 2\tan u \cos v \ , \ \ y = \bar{p}s \sin v = 2\tan u \sin v$$

إذاً التمثيل البارامتري للمستوى $\mathbb{R}^2$ يعطى من

$$\bar{R}(u,v) = (2\tan u \cos v, 2\tan u \sin v, 0)$$

وبالتالي يوجد راسم إسقاط $\pi : S^2(1) - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ من كرة الوحدة بدون القطب الشمالي إلى المستوى xy.

وبحساب الصيغة الأساسية الأولى لكل من الكرة والمستوى نجد أنها

$$I = 4(du^2 + \sin^2 u \cos^2 u dv^2),$$

$$\bar{I} = 4\sec^2 u (du^2 + \sin^2 u \cos^2 u dv^2).$$

أي أن الكميات الأساسية الأولى على السطحين متناسبة حيث

$$\frac{\bar{g}_{11}}{g_{11}} = \frac{\bar{g}_{22}}{g_{22}} = \sec^4 u \neq 0 , \forall u$$

أي أن راسم الإسقاط $\pi : (x, y, z) \in S^2(1) - \{N\} \longrightarrow (x, y, 0) \in \mathbb{R}^2$

والمعرف سابقاً هو راسم تطابق ينقل نقاط الكرة بدون القطب الشمالي فوق المستوى xy.

ملاحظة (٨.١٠):

راسم التطابق المعرف في المثال السابق يسمى راسم الإسقاط المجسم stereographic projection.

تعريف (٨.١٢):

راسم التوبولوجي التفاضلي من سطح إلى آخر يسمى راسم تساوي المساحات equiareal إذا كانت المناطق المتناظرة على السطحين متساوية المساحة.

تعريف (٨.١٣):

يقال أن المنحنى على السطح مسار متوازي isogonal trajectory إذا قطع عائلة من المنحنيات $\Phi(u^1, u^2) = \text{const.}$ في زاوية ثابتة. وإذا كانت زاوية التقاطع قائمة نحصل على المسار المتعامد (8.12).

مثال (٨-٦):

أوجد المسارات المتوازية لعائلة مولدات الأسطوانة الدائرية القائمة $R=(a\cos u^1, a\sin u^1, u^2)$.

الحل:

مولدات الأسطوانة هي الخطوط المستقيمة التي تناظر $u^1=\text{const.}$ وبالتالي $du^1=0$ ، $du^2=1$ أي أن اتجاهها $\lambda(0,1)$ ونفرض أن اتجاه المسار المتوازي هو $\mu=(du^1,u^2)$ وبالتعويض في (8.10) نحصل على

$$\frac{du^2}{\sqrt{a^2(du^1)+(du^2)^2}\sqrt{1}}=\pm\cos\alpha=\text{const.}$$

بالتربيع وتجميع الحدود يكون لدينا (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين).

$$(\frac{du^2}{du^1})^2=a^2\cos^2\alpha+(\frac{du^2}{du^1})\cos^2\alpha$$

$$\therefore (1-\cos^2\alpha)(\frac{du^2}{du^1})=a^2\cos^2\alpha$$

$$\therefore (\frac{du^2}{du^1})^2=a^2\,\text{cotan}^2\alpha$$

$$\therefore \frac{du^2}{du^1}=\pm\cot\alpha$$

وبالتكامل نحصل على

$$u^2=\pm a(\cot\alpha)u^1+c$$

وبالتعويض في المعادلة الاتجاهية للأسطوانة نحصل على الدالة الاتجاهية للمسار المتوازي على الصورة

$$r(u^1)=(a\cos u^1, a\sin u^1, \pm(a\cot\alpha)u^1+c)$$

وهي عائلة من الحلزونيات (الباب الرابع). إذا كانت $\alpha=\pi/2$ نحصل على المسارات المتعامدة على الصورة

$$r(u^1)=(a\cos u^1, a\sin u^1, c)$$

وهي معادلة دائرة في المستوى $z=c$.

من تطبيقات الصيغة الأساسية الأولى على السطح هو حساب أطوال أقواس منحنيات واقعة على السطح فمثلاً إذا كان المنحنى $u^1=u^1(u)$ ، $u^2=u^2(u)$ واقع على السطح $x=x(u^\alpha)$ فإننا نحصل على معادلة المنحنى في الصورة

$$x(u)=x(u^\alpha(u))=x(u^1(u),u^2(u))$$

وبالتالي فإن الصيغة الأساسية الأولى تعطى من

$$ds^2=g_{11}(du^1)^2+2g_{12}du^1du^2+g_{22}(du^2)^2$$

$$=(g_{11}(\frac{du^1}{du})^2+2g_{12}\frac{du^1}{du}\frac{du^2}{du}+g_{22}(\frac{du^2}{du})^2)(du)^2$$

$$\therefore ds=\sqrt{g_{11}(u'^1)^2+2g_{12}u'^1u'^2+g_{22}(u'^2)^2}\,du\,,\ '=\frac{d}{du} \qquad (8.31)$$

وإذا كان المنحنى معطى من خلال $u^1=u^1(u^2)$ مثلاً فإن

$$ds^2=g_{11}(u'^1)^2(du^2)^2+2g_{12}u'^1(du^2)^2+g_{22}(du^2)^2$$

$$\therefore ds=\sqrt{g_{11}(u'^1)^2+2g_{12}u'^1+g_{22}}\,du^2,\ '=\frac{d}{du^2} \qquad (8.32)$$

وإذا كان المنحنى معطى من خلال $u^2=u^2(u^1)$ مثلاً فإن

$$ds^2=g_{11}(du^1)^2+2g_{12}du^1u'^2du^1+g_{22}(u'^2)^2(du^1)^2$$

$$\therefore ds=\sqrt{g_{11}+2g_{12}u'^2+g_{22}(u'^2)^2}\,du^1\,,\ '=\frac{d}{du^1} \qquad (8.33)$$

مثال (٨-٧):

أوجد طول قوس المنحنى $u=e^{v(\cot\beta)/\sqrt{2}}$ على سطح المخروط

$$x(u,v)=(u\cos v, u\sin v, u)$$

حيث $0\le v\le\pi$ ، β ثابت

الحل:

بما أن $u=e^{v(\cot\beta)/\sqrt{2}}$ وبالتعويض في معادلة المخروط نحصل على المنحنى

$$x(v)=e^{v(\cot\beta)/\sqrt{2}}.(\cos v, \sin v, 1)$$

وباستخدام الصيغة (8.32) نجد أن

$$ds=\sqrt{g_{11}u'^2+2g_{12}u'+g_{22}}\,dv \quad , '=\frac{d}{dv}$$

حيث

$$u'=\frac{\cot\beta}{\sqrt{2}}e^{v(\cot\beta)/\sqrt{2}}=u\frac{\cot\beta}{\sqrt{2}},$$

$$g_{11}=1, g_{22}=u^2, g_{12}=0$$ (على سطح المخروط)

$$\therefore ds=\sqrt{2(\frac{u\cot\beta}{\sqrt{2}})^2+u^2}\,dv$$

$$=\sqrt{u^2(\cot^2\beta+1)}\,dv$$

$$\therefore S=\int_0^\pi\sqrt{1+\cot^2\beta}\,u\,dv=\sqrt{1+\cot^2\beta}\int_0^\pi e^{v(\cot\beta)/\sqrt{2}}dv$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\cos\beta}(e^{\pi(\cot\beta)/\sqrt{2}}-1)$$

وذلك بالتكامل واستخدام العلاقات المثلثية المعروفة.

تمارين (٨)

(١) أثبت أن أي راسم تساوي قياسي لمستوى على نفسه هو حركة أو حركة مع انعكاس.

(**إرشاد:** الحركة هي عبارة عن دوران متبوع بانتقال أو العكس).

(٢) إذا كان M_1 ، M_2 سطحان تمثيلهما البارامتري

$$M_1 : R_1 = R_1(u^1,u^2), M_2 : R_2 = R_2(u^1,u^2), (u^1,u^2) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

وأن M_1 في تساوي قياسي مع M_2 حيث النقاط ذات الإحداثيات المحلية (u^1,u^2) متساوية تكون متناظرة وإذا عرفنا السطح $R_{\lambda.\mu} = \lambda R_1 + \mu R_2$.

بين أنه يكون في تساوي قياسي مع السطح $R_{\mu.\lambda} = \mu R_1 + \lambda R_2$

(٣) أثبت أنه إذا كان الراسم من سطح على سطح آخر راسم تطابق وراسم تساوي مساحات فإنه يكون راسم تساوي قياسي.

(٤) أثبت أنه يوجد راسم تطابق للسطح

$$R(u^1,u^2)=(f(u^1)\cos u^2, f(u^1)\sin u^2, h(u^1))$$

على المستوى $\mathbb{R}^2$ تنتقل بالنسبة له خطوط الزوال $(u^2 = \text{const.})$ إلى مستقيمات تمر بنقطة الأصل وتنتقل خطوط التوازي $(u^1 = \text{const.})$ إلى دوائر مركزها نقطة الأصل.

(٥) في التمرين السابق ادرس حالة سطح الكرة $(f(u^1) = \cos u^1, h(u^1) = \sin u^1)$.

(٦) بين أنه إذا كان السطح يسمح بتمثيل بارامتري تكون فيه $g_{\alpha\beta} = \text{const.}$ كان ذلك السطح متساوي القياس محلياً مع المستوى.

(إرشاد: إذا كانت $g_{11} = \text{const.}, g_{22} = \text{const.}, g_{12} = 0$ فإن $I = (\sqrt{g_{11}}du^1)^2 + (\sqrt{g_{22}}du^2)^2$ وباختيار التحويل الأحادي $\bar{u}^1 = \sqrt{g_{11}}u^1, \bar{u} = \sqrt{g_{22}}u^2$ حيث $Det(\frac{\partial(\bar{u}^1,\bar{u}^2)}{\partial(u^1,u^2)}) \neq 0$)

(٧) أوجد المنحنيات المتوازية التي تقطع خطوط الزوال meridians للكرة بزاوية ثابتة.

(إرشاد: خطوط الزوال $u^2 = \text{const.}$ في التمثيل الجيوجرافي لسطح الكرة واستخدام الصيغة التي تعطي الزاوية بين الاتجاه (du^1, du^2) ، $(1,0)$).

(٨) وضح بمثال الفرق بين التساوي القياسي المحلي والموسع.

(٩) بين أنه يوجد راسم تساوي مساحات بين السطحين

$$R = (x, y, 2xy), \bar{R} = (x, y, x^2 - y^2)$$

(١٠) بين أنه يوجد راسم تساوي مساحات بين السطحين

$$R = (x, y, xy), \bar{R} = (x, y, \frac{1}{2}(x^2 + y^2))$$

(١١) وضح بمثال أن التساوي القياسي المحلي ليس بالضرورة أن يكون تساوي قياسي موسع.

(١٢) هل يوجد تساوي قياسي بين المخروط والمستوى.

(١٣) احسب الصيغة الأساسية الأولى لكل من السطوح الآتية :

(i) $\quad x = u, y = v, z = u^2 - v^2$

(ii) $x = u\cosh v \ , y = u\sinh v \ , z = u^2$

(iii) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (سطح الكرة)

(iv) $ax^2 + by^2 + xz^2 = 1$ (سطح المجسم الناقصي)

(١٤) أوجد معادلة المستوى المماس واتجاه العمودي على السطح

$$x(u,v) = (a\cos u, a\sin u, v)$$

عند أي نقطة اختيارية.

(١٥) أوجد المسارات المتوازية ومن ثم المسارات المتعامدة على عائلة المنحنيات $u^1u^2 = \text{const.}$ على السطح $z = (u^1)^2 - (u^2)^2$.

(**إرشاد:** استخدم تعريف (١٢٨)).

(١٦) أوجد المسارات المتعامدة على عائلة مولدات سطح المخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

(**إرشاد:** مثل مثال (٦٨) حيث $\alpha = \frac{\pi}{2}$)

(١٧) أوجد عائلة المسارات التي تقطع عائلة المستقيمات $x = \text{const.}$ على المجسم المكافئ $z = axy$ بزاوية قائمة.

(**إرشاد:** مثل مثال (٦٨) حيث $\alpha = \frac{\pi}{2}$)

(١٨) أوجد الصيغة الأساسية الأولى للسطح

$$R(u^1,u^2) = (f(u^1)\cos u^2, f(u^1)\sin u^2, h(u^1))$$

حيث f, h دوال تفاضلية بالنسبة إلى البارامتر u^1.

(١٩) أوجد طول قوس المنحنى $u = v$ على السطح $R(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$ من النقطة $u = 0$ إلى النقطة $u = 1$.

(**إرشاد:** استخدم الصيغة المترية وضع $u = v$ ثم بالتكامل الخطي كما في مثال (٧٨)).

(٢٠) أثبت أن المعادلة التفاضلية لعائلة المنحنيات على السطح $R = R(u^1,u^2)$ التي تنصف الزوايا بين الخطوط البارامترية هي $g_{11}(du^1)^2 - g_{22}(du^2)^2 = 0$

(إرشاد: استخدم الصيغة (8.10) وضع اتجاه الخط المطلوب على الصورة $\lambda=(du^1,du^2)$ ، وخط u^1 البارامتري اتجاهه (1,0) وخط u^2 البارامتري اتجه (0,1) ونوجد $\cos\theta_1$ ، $\cos\theta_2$ واستخدم $\cos\theta_1 = \pm\cos\theta_2$ حيث θ_1 ، θ_2 هما الزوايا بين الاتجاه λ والمماسات لخط u^1 وخط u^2 البارامترين على الترتيب. لاحظ الإشارة $\pm$ تشير إلى المنصف الداخلي والخارجي للزاوية).

(٢١) أثبت أن عائلة المنحنيات $f(u^1,u^2)=\text{const.}$ على السطح

$$R(u^1,u^2)=(u^1\cos u^2, u^1\sin u^2, au^2+b)$$

التي تحقق المعادلة التفاضلية $(u^1+a^2)(du^2)^2-(du^1)^2=0$ هي عائلة من المنحنيات المتعامدة.

(إرشاد: استخدم (8.12) حيث f دالة تحقق المعادلة التفاضلية المعطاة).

(٢٢) أوجد الزاوية بين الخطوط البارامترية على السطح $z = axy$ عند أي نقطة اختيارية (x_o, y_o).

(٢٣) أوجد مساحة جزء من سطح الهليكويد

$$R(u^1,u^2)=(au^1\cos u^2, au^1\sin u^2, bu^2)$$

المحدد بالمنحنيات $u^1=0, u^1=\dfrac{b}{a}, u^2=0, u^2=1$ حيث a, b ثوابت.

(إرشاد: استخدم الصيغة (8.19) والتكامل السطحي).

(٢٤) أثبت أن المجسم المكافئ الدوراني $x^3=\dfrac{a}{2}((x^1)^2+(x^2)^2)$ والمجسم المكافئ الزائدي $x^3=ax^1x^2$ لهما نفس المساحة الاسقاطية على المستوى x^1x^2.

(إرشاد: ضع $x^1 = u^1$ ، $x^2 = u^2$ في كل من معادلتي السطحين وأوجد التمثيل البارامتري المناظر لكل منهما ومن ثم أوجد عنصر المساحة لهما).

(٢٥) أوجد المسارات المتعامدة على سطح المخروط.

(إرشاد: كما في مثال (٦٨)).

(٢٦) أوجد المسارات المتعامدة على سطح السرج $z = xy$.

(إرشاد: كما في مثال (٦٨)).

(٢٧) أوجد طول قوس المنحنى $u = v$ على الأسطوانة $x(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$

(إرشاد: كما في مثال (٥٨)).

(٢٨) أوجد طول قوس المنحنى $u = \cos\theta$ ، $v = \sin\theta$ على سطح المجسم المكافئ $z = x^2 + y^2$ ، $0 < \theta < \pi$.

(إرشاد: استخدم العلاقة (8.31)).

(٢٩) أوجد قوس المنحنى $x = y$ على السطح $z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ من (1,1) إلى (2,2).

(إرشاد: كما في مثال (٧٨)).

الباب التاسع

الهندسة الخارجية للسطوح في الفراغ
Extrinsic Geometry

في هذا الباب نتناول بالدارسة والتحليل انحناء السطح من خلال تعريف الصيغة الأساسية الثانية على السطح المنتظم وخصوصاً الانحناء العمودي في اتجاه ما والانحناءات الأساسية والانحناء الجاوسي والمتوسط وتصنيف نقاط السطح من خلال مميز ديوبين والصيغة الأساسية الثانية.

(١.٩) الصيغة الأساسية الثانية: The 2nd Fundamental Form

نعتبر سطح M في الفراغ $\mathbb{R}^3$ تمثيله البارامتري المنتظم على الصورة

$$M : R(u^1,u^2)=R(u^\alpha)=R(x^i(u^\alpha)), i=1,2,3; \alpha=1,2 \quad (9.1)$$

ومنحنى C واقع على السطح M وله تمثيل بارامتري بدلالة بارامتر طول القوس s على الصورة

$$R=R(u^\alpha),u^\alpha=u^\alpha(s),\alpha=1,2 \qquad (9.2)$$

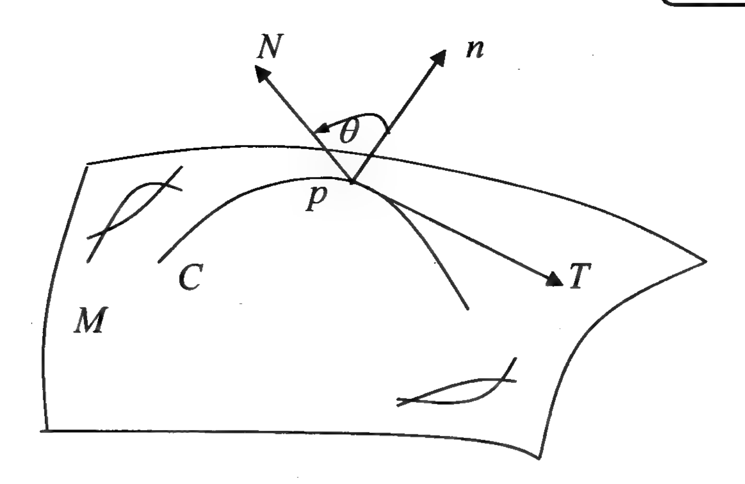
أو ما يكافئ

$$C : R=R(u^\alpha(s))=R(x^i(u^\alpha(s))) \qquad (9.3)$$

لتكن p هي إحدى نقاط المنحنى C، T وحدة متجه المماس له عند p، n وحدة متجه العمود الأساسي للمنحنى C عند p، N متجه الوحدة العمودي على السطح عند p. ولتكن θ هي الزاوية بين n، N أي أن

$$\cos\theta=\langle n,N\rangle \qquad (9.4)$$

كما هو مبين في شكل (١.٩).



شكل (١.٩)

وحدة المماس T تتعين من (9.3) وتعطى من

$$T=\frac{dR}{ds}=\frac{\partial R}{\partial u^1}\frac{du^1}{ds}+\frac{\partial R}{\partial u^2}\frac{du^2}{ds}=R_1\dot{u}^1+R_2\dot{u}^2\ ,\ \dot{}=\frac{d}{ds}$$

أو ما يكافئ

$$T=R_\alpha\dot{u}^\alpha \qquad (9.5)$$

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى s واستخدام صيغة فرينيه التفاضلية نحصل على:

$$\frac{d^2R}{ds^2}=\frac{dT}{ds}=kn=\frac{d}{ds}(R_\alpha\dot{u}^\alpha)=R_\alpha\ddot{u}^\alpha+\dot{u}^\alpha\frac{\partial R_\alpha}{\partial u^\beta}\dot{u}^\beta$$

$$\therefore k\ n=R_\alpha\ddot{u}^\alpha+R_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta \qquad (9.6)$$

حيث $R_{\alpha\beta}=R_{\beta\alpha}=\frac{\partial^2R}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}$ لأن نظرية ينج لتبادل الاشتقاق محققة وذلك لأن R دالة منتظمة.

بضرب طرفي العلاقة (9.6) قياسياً في N واستخدام (9.4) نحصل على

$$k\cos\theta = <N, R_\alpha>\ddot{u}^\alpha + <N, R_{\alpha\beta}>\ \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$$

ولكن N عمودي على المستوى المماس T_pM فهو عمودي على T، R_1، R_2 عند p

$$\therefore\ <N, R_\alpha> = 0$$

وبوضع

$$L_{\alpha\beta} = <N, R_{\alpha\beta}> = <N, R_{\beta\alpha}> = L_{\beta\alpha} \qquad (9.7)$$

$$\therefore\ k\cos\theta = L_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = L_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\cdot\frac{du^\beta}{ds}$$

$$\therefore\ k\cos\theta = \frac{L_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta}{ds^2} = \frac{<d^2R, N>}{ds^2} \qquad (9.8)$$

حيث المقام ds^2 هو الصيغة الأولى I أو الصيغة المترية والبسط صيغة تربيعية أيضاً تسمى الصيغة الأساسية الثانية 2nd fundamental form ويرمز لها بالرمز II حيث

$$\text{II} = L_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta = <d^2R, N> \qquad (9.9)$$

$$= L_{11}(\mathrm{du}^1)^2 + 2L_{12}du^1du^2 + L_{22}(du^2)^2$$

إذاً العلاقة (9.8) تأخذ الصورة

$$k\cos\theta = \frac{\text{II}}{\text{I}} \qquad (9.10)$$

أو (من تعريف I)

$$k\cos\theta = \frac{L_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta}{g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta} \qquad (9.11)$$

ملاحظة (١.٩):

كل من البسط والمقام صيغ جمعية كل منها منفصل عن الآخر أي لا يجوز اختصار du^α في البسط مع du^α في المقام.

الكميات الأساسية الثانية $L_{\alpha\beta}$ المعرفة في (9.7) يمكن إعطائها في صورة تفصيلية أكثر كالآتي:

$$L_{11} = < R_{11}, N > = < R_{11}, \frac{R_1 \wedge R_2}{\sqrt{g}} > = \frac{1}{\sqrt{g}}[R_{11}, R_1, R_2]$$

بالمثل

$$L_{12} = \frac{1}{\sqrt{g}}[R_{12}, R_1, R_2] = \frac{1}{\sqrt{g}}[R_{21}, R_1, R_2],$$

$$L_{22} = \frac{1}{\sqrt{g}}[R_{22}, R_1, R_2] \qquad (9.12)$$

حيث [, ,] يعني حاصل الضرب الثلاثي القياسي وهو عبارة عن محدد من الرتبة الثالثة.

ملاحظة (٢.٩):

الصيغ التربيعية I، II تكتب بلغة المصفوفات على الصورة

$$\mathrm{I} = dU\,(g_{\alpha\beta})dU^t\ , \mathrm{II} = dU\,(L_{\alpha\beta})dU^t$$

حيث $dU = (du^1, du^2)$، $(g_{\alpha\beta})$، $(L_{\alpha\beta})$ مصفوفات ذات أبعاد 2×2.

تمهيدية (١.٩):

الصيغة الأساسية الثانية II ليست موجبة بالتحديد positive definite.

البرهان:

من العلاقة (9.10) نجد أن المقام في الطرف الأيمن يساوي I وهي صيغة تربيعية موجبة بالتحديد (من الباب السابق) ولكن الطرف الأيسر $k\cos\theta$ من الممكن أن يساوي صفراً أو مقدار سالب أو موجب أي أن إشارة II هي إشارة $k\cos\theta$ وبالتالي فإن II متغيرة الإشارة أي ليست موجبة بالتحديد.

مثال (١.٩):

إذا كان السطح معطى في صورة مونج $x^3 = f(x^1, x^2)$ أوجد الكميات الأساسية الثانية $L_{\alpha\beta}$.

الحل:

السطح المعطى له تمثيل بارامتري منتظم على الصورة

$$R(u^1,u^2)=(u^1,u^2,f(u^1,u^2)),(u^1,u^2)\in D\subset\mathbb{R}^2 \qquad (9.13)$$

المشتقات التفاضلية الجزئية الأولى والثانية للدالة الاتجاهية R تعطى على الصورة

$$R_1=(1,0,f_1),R_2=(0,1,f_2)$$

$$R_{11}=(0,0,f_{11}),R_{22}=(0,0,f_{22}),R_{12}=(0,0,f_{12})$$

حيث

$$f_\alpha=\frac{\partial f}{\partial u^\alpha},f_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta},\ \alpha,\beta=1,2$$

$$\therefore R_{\alpha\beta}=(0,0,f_{\alpha\beta}) \qquad (9.14)$$

ومن تعريف الكميات الأساسية الأولى $g_{\alpha\beta}$ (في الباب السابق) نجد أن

$$g_{11}=1+f_1^2,g_{12}=f_1f_2,g_{22}=1+f_2^2$$

والمميز المتري g يعطى من

$$g=\det(g_{\alpha\beta})=(1+f_1^2)(1+f_2^2)-(f_1f_2)^2$$

$$=1+f_1^2+f_2^2$$

$$\therefore g=1+|\nabla f|^2,\nabla f=(f_1,f_2) \qquad (9.15)$$

حيث ∇ يعني انحدار الدالة القياسية f بالنسبة للإحداثيات المحلية u^1,u^2.

حقل المتجه العمودي على السطح يعطى من (حسابات روتينية)

$$N=\frac{R_1\wedge R_2}{\sqrt{g}}=\frac{1}{\sqrt{g}}(-f_1,-f_2,1)$$

$$\therefore N = \frac{1}{\sqrt{g}}(-\nabla f, 1) \qquad (9.16)$$

وبالتالي فإن $L_{\alpha\beta}$ تعطى في الصورة $L_{\alpha\beta} = \langle R_{\alpha\beta}, N \rangle$

ومن (9.14) نجد أن

$$L_{\alpha\beta} = \frac{f_{\alpha\beta}}{\sqrt{g}} = \frac{f_{\alpha\beta}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}$$

مثال (٢.٩):

أوجد الكميات الأساسية الثانية على المستوى.

الحل:

نفرض أن لدينا مستوى $ax + by + cz + d = 0$

$$\therefore z = \frac{1}{c}(-ax - by - d), c \neq 0$$

وباستخدام المثال السابق حيث (صورة مونج للمستوى)

$$f = -\frac{1}{c}(ax + by + d)$$

نجد أن $f_{\alpha\beta} = 0, \forall \alpha, \beta$

$$\therefore L_{\alpha\beta} = \frac{f_{\alpha\beta}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} = \frac{0}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}$$

أي أن الكميات الأساسية الثانية على سطح المستوى منعدمة تطابقياً (لجميع نقاط المستوى).

مثال (٣.٩):

أوجد الكميات الأساسية الأولى والثانية على سطح الكرة.

الحل:

باستخدام التمثيل الجيوجرافي المعروف

$$R(u^1,u^2)=(a\sin u^1\cos u^2, a\sin u^1\sin u^2, a\cos u^1), a\neq 0$$

حيث R تمثل اتجاه أنصاف الأقطار إلى الخارج و a نصف قطر الكرة.

وبالحسابات التقليدية نجد أن

$$g_{11}=a^2, g_{22}=a^2\sin^2\theta, g_{12}=0 \Rightarrow g=a^4\sin^2\theta$$

$$\therefore N=\frac{1}{\sqrt{g}}R_1\wedge R_2=\frac{a\sin u^1}{a^2\sin u^1}R=\frac{R}{a}$$

أي أن العمودي على سطح الكرة في اتجاه أنصاف الأقطار إلى الخارج.

وبحساب $R_{\alpha\beta}$ واستخدام (9.12) نجد أن الكميات الأساسية الثانية على الصورة

$$L_{22}=a\sin^2\theta, L_{12}=0, L_{11}=a$$

ملاحظة (٣.٩):

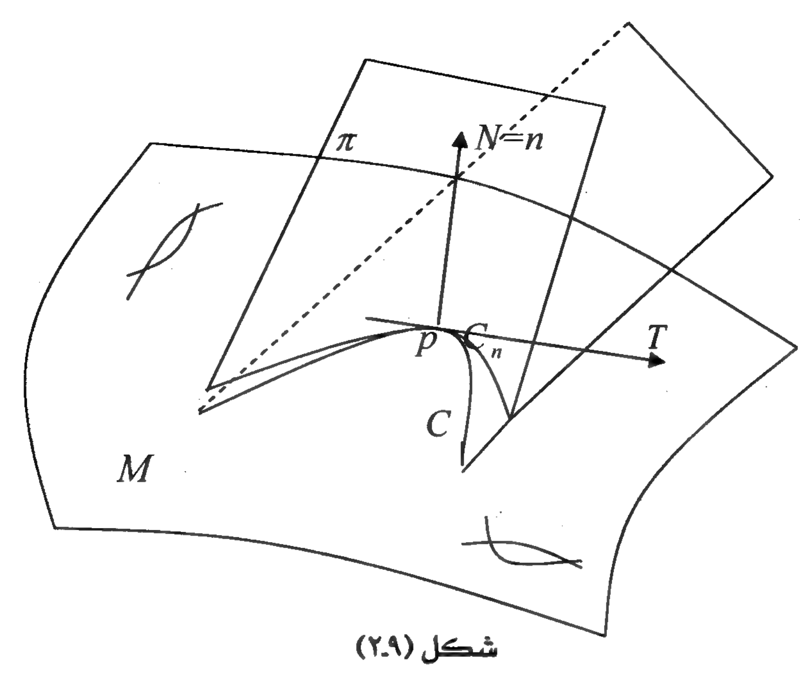
الكميات الأساسية الأولى والثانية متناسبة حيث

$$\frac{L_{22}}{g_{22}}=\frac{L_{11}}{g_{11}}=\frac{1}{a}= \text{مقلوب نصف القطر} \qquad (9.17)$$

(٢.٩) المقطع العمودي والانحناء العمودي:

Normal Section and Normal Curvature:

في هذا الجزء نعتبر المنحنى (9.3) عبارة عن تقاطع السطح (9.1) مع مستوى π مار بوحدة العمودي على السطح N عند p فيكون المقطع بالطبع منحنى مستوى C_n. نسمى مثل هذا المقطع مقطع عمودي normal section للسطح عند p كما هو موضح في شكل (٢.٩).



شكل (٢.٩)

حقول المتجهات T, n, N تقع في مستوى واحد π وهو المستوى الموجود فيه المقطع العمودي. وحيث أن المماس T عمودي على كل من n، N إذاً لابد أن يكون $N = n$ أي ينطبق العمودي على السطح N على العمودي الأساسي n للمنحنى أي أن $\theta=0$ وليكن k_n انحناء هذا المقطع العمودي ومن العلاقة (9.8) يكون

$$k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{L_{\alpha\beta}du^{\alpha}du^{\beta}}{g_{\alpha\beta}du^{\alpha}du^{\beta}} \tag{9.18}$$

إذاً الانحناء k لأي منحنى آخر C خلاف المقطع العمودي يعطى من العلاقة

$$k \cos\theta = k_n \tag{9.19}$$

الانحناء k_n يسمى الانحناء العمودي normal curvature على السطح عند النقطة p في الاتجاه du^{α} لنعني في الاتجاه (du^1, du^2) أي في اتجاه المماس لمنحنى المقطع العمودي عند p.

بأخذ المقياس لطرفي العلاقة (9.19) نحصل على

$$|k_n| \leq |k| \qquad (9.20)$$

من هذه العلاقة يمكن صياغة النظرية الآتية:

نظرية (١.٩):

الانحناء العمودي أصغر ما يمكن بالمقارنة بسائر الانحناءات الأخرى عند أي نقطة على السطح المنتظم.

تمهيدية (٢.٩):

الانحناء العمودي خاصية داخلية للسطح.

البرهان:

الانحناء العمودي خاصية داخلية للسطح لأنه لا يعتمد على اختيار نظام الإحداثيات ولا على حركة السطح في الفراغ ولا على نظام الإحداثيات المنحنية (u^1, u^2) على السطح.

تمهيدية (٣.٩):

الصيغة الأساسية الثانية خاصية ذاتية للسطح.

البرهان:

باستخدام العلاقة (9.18) والتمهيدية (٩-٢) وبما أن الصيغة الأساسية الأولى خاصية ذاتية إذاً الصيغة الأساسية الثانية هي خاصية ذاتية.

نظرية (٢.٩):

جميع المنحنيات على السطح التي تمر بالنقطة p عليه والتي لها مماس مشترك يكون لها الانحناء العمودي متساوي.

البرهان:

بما أن العلاقة (9.19) تعين الانحناء k_n بمعرفة النسبة $\frac{du^1}{du^2}$ والتي تتعين تماماً إذا أعطي المماس $T = R_\alpha \frac{du^\alpha}{ds}$ للمنحنى على السطح وبالتالي فإن جميع المنحنيات التي لها مماس مشترك يكون الانحناء العمودي لها متساوي.

نظرية (٣.٩):

إذا علم المستوى اللاصق لمنحنى واقع على السطح عند نقطة ما عليه فإن الانحناء العمودي يتعين من العلاقة (9.18).

البرهان:

بما أن θ هي الزاوية بين العمود الأساسي n والعمودي N على السطح وهي أيضاً الزاوية بين المستوى اللاصق للمنحنى والعمودي N على السطح. إذاً إذا علم المستوى اللاصق يتعين ليس فقط المماس كتقاطع المستوى المماس مع المستوى اللاصق وإنما يتعين الانحناء العمودي k_n من (9.18).

يمكن تعيين الانحناء k للمنحنى من العلاقة (9.19) وبذلك يكون لدينا النتيجة الآتية:

تمهيدية (٤.٩):

جميع المنحنيات التي على السطح والتي لها في نقطة مشتركة على السطح مستوى لاصق وحيد يكون لها انحناء متساوي.

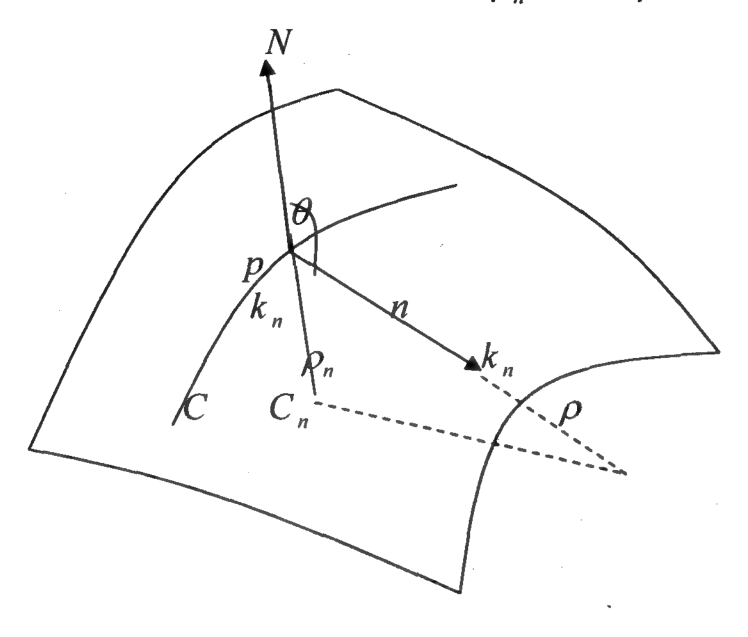
تعريف (١.٩):

مقطع السطح بالمستوى العمودي يسمى المقطع العمودي ويرمز له بالرمز C_n.

نعتبر المماس T للسطح ونعتبر مستويين يقطعان السطح ويمران بالمماس T. ونفرض أن أحدهما يمر بالعمودي على السطح ويكون هذا المستوى العمودي والأخر يصنع زاوية θ مع المستوى العمودي.

الزاوية التي يصنعها مستوى المقطع مع العمودي N على السطح إما تساوي 0 أو π ويكون انحناء المقطع يساوي الانحناء العمودي k_n أو يخالفه في الإشارة على الترتيب. أما انحناء مقطع المستوى الثاني مع السطح فيتحدد من العلاقة (9.19). ويتضح ذلك من هندسة الشكل (٣.٩) حيث

$$pC_n = \rho_n \ ,pC = \rho \ , \quad k_n = \frac{1}{\rho_n} \ ، k = \frac{1}{\rho}$$



شكل (٩ـ٣)

مثال (٤٩):

أثبت أن المقطع العمودي لسطح الكرة التي نصف قطرها a عند أي نقطة هو دائرة عظمى انحنائها $\frac{1}{a}$.

الحل:

نعتبر التمثيل البارامتري الجيوجرافي لسطح الكرة ونقوم بحساب الكميات الأساسية الأولى والثانية كما في مثال (٩ـ٣) والتعويض في الصيغة $k_n = \frac{\text{II}}{\text{I}}$ نحصل على $k_n = \frac{1}{a}$. وذلك عند أي نقطة وفي أي اتجاه على سطح الكرة لأن k_n في هذه الحالة لا يعتمد على du^α.

ومن هذه النتيجة نرى أن الانحناء العمودي ثابت عند أي نقطة على السطح ومنحنى التقاطع منحنى مستوى انحنائه ثابت ويساوي $\frac{1}{a}$ (مقلوب نصف قطر الكرة) أي أنه منحنى دائرة عظمى نصف قطرها a.

ملاحظة (٤.٩):

الانحناء العمودي لا يعتمد على اتجاه المنحنى C ولكن يعتمد على اتجاه السطح أي يغير إشارته إذا تغير العمودي N على السطح.

(٣.٩) الانحناءات الأساسية وخطوط الانحناء:

Principal Curvatures and Lines of Curvature

لنجعل المستوى المار بالعمودي N على السطح يدور دورة كاملة حول العمودي على السطح. إذاً في كل وضع من أوضاعه يعطينا مقطع عمودي وانحناء عمودي k_n وبالتالي الانحناء العمودي k_n يعطى كدالة متصلة في الاتجاه $(du^\alpha)=(du^1,du^2)$ ومعرفة في حيز مقفل $(0\le\theta\le\pi)$. ومن المعلوم في نظرية الدوال أن أي دالة متصلة ومعرفة في حيز مقفل لابد وأن يكون لها نهاية عظمى ونهاية صغرى وحيدة في هذا الحيز (أنظر حساب التفاضل والتكامل ١، ٢، ٣). إذاً عندما يدور المستوى دورة كاملة حول العمودي على السطح عند p يكون الانحناء العمودي له نهاية عظمى ونهاية صغرى عند p.

تعريف (٢.٩):

النهايات العظمى والصغرى للانحناء العمودي k_n تسمى بالانحناءات الأساسية principal curvatures للسطح عند النقطة p ونرمز لهما بالرمز k_1,k_2 وفي هذه الحالة الاتجاه (du^1,du^2) الذي تحدث على امتداده النهايات العظمى والصغرى يسمى بالاتجاه الأساسي principal direction.

لإيجاد الانحناءات الأساسية على السطح (9.1) نضع (9.18) على الصورة

$$k_n g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta - L_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = 0 \qquad (9.21)$$

أو بالتفصيل

$$(k_n g_{11} - L_{11})(du^1)^2 + 2(k_n g_{12} - L_{12}) du^1 du^2 + (k_n g_{22} - L_{22})(du^2)^2 = 0 \qquad (9.22)$$

بالقسمة على $(du^2)^2$ ووضع $u = \dfrac{du^1}{du^2}$ نحصل على

$$(k_n g_{11} - L_{11})u^2 + 2(k_n g_{12} - L_{12})u + (k_n g_{22} - L_{22}) = 0 \quad (9.23)$$

هذه العلاقة توضح أنه لكل قيمة من قيم النسبة $u = \dfrac{du^1}{du^2}$ (أي لكل مقطع عمودي) يناظرها انحناء k_n ولكن لكل قيمة من قيم k_n توجد قيمتين للنسبة u أي يوجد مقطعين عموديين لهما نفس الاتجاه (du^1, du^2).

باشتقاق العلاقة (9.22) جزئياً بالنسبة للمتغيرات $\xi^1 = du^1, \xi^2 = du^2$ (باعتبار k_n ثابت والعلاقة (9.22) دالة ضمنية في المتغيرات ξ^1, ξ^2) نحصل على

$$\begin{aligned} (k_n g_{11} - L_{11}) du^1 + (k_n g_{12} - L_{12}) du^2 = 0 \\ (k_n g_{12} - L_{12}) du^1 + (k_n g_{22} - L_{22}) du^2 = 0 \end{aligned} \qquad (9.24)$$

هذه المعادلات تمثل الشرط الضروري والكافي كي تحدث النهايات العظمى والصغرى للدالة k_n في الاتجاه (du^α) والتي يمكن وضعها في المعادلة المصفوفية الآتية:

$$\begin{bmatrix} k_n g_{11} - L_{11} & k_n g_{12} - L_{12} \\ k_n g_{12} - L_{12} & k_n g_{22} - L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du^1 \\ du^2 \end{bmatrix} = 0 \qquad (9.25)$$

أو ما يكافئ

$$(L_{\alpha\beta} - k_n g_{\alpha\beta}) dU' = 0 \qquad (9.26)$$

المعادلات (9.25) يمكن كتابتها في الشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix} g_{11}du^1+g_{12}du^2 & -L_{11}du^1-L_{12}du^2 \\ g_{12}du^1+g_{22}du^2 & -L_{12}du^1-L_{22}du^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_n \\ 1 \end{bmatrix}=0 \quad (9.27)$$

أو

$$\begin{bmatrix} g_{1\alpha}du^\alpha & -L_{1\alpha}du^\alpha \\ g_{22}du^\alpha & -L_{2\alpha}du^\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_n \\ 1 \end{bmatrix}=0$$

بحذف du^1,du^2 من (9.25) وكذلك بحذف k_n من (9.27) (باستخدام الجبر الخطي واعتبار أن (9.25)، (9.27) كل منهما نظام من المعادلات الخطية المتجانسة وكي يوجد الحل يجب أن يكون محدد مصفوفة المعاملات منعدم) نحصل على:

$$g\,k_n^2-(L_{11}g_{22}+g_{11}L_{22}-2L_{12}g_{12})k_n+L=0 \quad (9.28)$$

$$(L_{11}g_{12}-L_{12}g_{11})\left(\frac{du^1}{du^2}\right)^2+(L_{11}g_{22}-L_{22}g_{11})\frac{du^1}{du^2}+L_{12}g_{22}-L_{22}g_{12}=0 \quad (9.29)$$

على الترتيب.

المعادلة (9.28) معادلة تربيعية في k_n فهي تعطي قيمتين للانحناء العمودي k_n هي القيم القصوى k_1,k_2 ، بينما المعادلة (9.29) تعطي اتجاهين على امتدادهما تحدث القيم القصوى.

المعادلات (9.28)، (9.29) يمكن كتابتها في الشكل المختصر الآتي:

$$k_n^2-g^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta}k_n+\frac{L}{g}=0 \quad (9.30)$$

أو

$$a_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta=0, a_{\alpha\beta}=L_{1\alpha}g_{2\beta}-L_{2\beta}g_{1\alpha}\ (\alpha\le\beta)$$

على الترتيب حيث $a_{\alpha\beta}$ مصفوفة غير متماثلة، L مميز الصيغة الأساسية الثانية II ويساوي $L=L_{11}L_{22}-L_{12}^2$ و g المميز المتري. والكميات $g^{\alpha\beta}$ هي الكميات الأساسية الأولى المترافقة وتحقق $g_{\alpha\beta}.g^{\alpha\beta}=\delta_\beta^\gamma$ حيث

$$(g^{\alpha\beta})=\frac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}, Det(g^{\alpha\beta})=\frac{1}{g} \qquad (9.31)$$

وتحقق
$$(g_{\alpha\beta})(g^{\alpha\beta})=I$$

أي أن المصفوفة $(g^{\alpha\beta})$ معكوس المصفوفة $(g_{\alpha\beta})$.

من المعادلة (9.30) يتضح أن جذري المعادلة وهما الانحناءات الأساسية k_1, k_2 تحقق العلاقات الآتية:

$$k_1 + k_2 = g^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta} = \text{(مجموع الجذور)}$$
$$k_1.k_2 = \frac{L}{g} = \text{(حاصل ضرب الجذور)} \qquad (9.32)$$

تعريف (٣.٩):

المقدار $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ يسمى الانحناء المتوسط Mean curvature ويرمز له بالرمز H وحاصل الضرب k_1k_2 يسمى الانحناء الجاوسي Gaussian curvature للسطح ويرمز له بالرمز K أي أن $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \; K = k_1k_2$

أو

$$H = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta} \, , K = \frac{L}{g} \qquad (9.33)$$

إذاً المعادلة (9.30) تأخذ الصورة

$$k_n^2 - 2H\, k_n + K = 0 \qquad (9.34)$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في k_n وجذورها هي الانحناءات الأساسية.

ملاحظة (٥.٩):

المعادلة (9.29) تمثل معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الثانية في الاتجاه $\frac{du^1}{du^2}$ وبالتالي يكون لها حلان كل منهما يمثل اتجاه أساسي على السطح.

نظرية (٩.٤):

على السطح الذي له الخطوط البارامترية متعامدة وكذلك $L_{12}=0$ فإن الانحنائين الأساسيين هما $\frac{L_{11}}{g_{11}}, \frac{L_{22}}{g_{22}}$ والاتجاهات الأساسية هي المماسات للخطوط البارامترية على السطح.

البرهان:

إذا كانت الخطوط البارامترية على السطح متعامدة $(g_{12}=0)$ و $L_{12}=0$ فإن

$$g=g_{11}g_{22} \;,\; L=L_{11}L_{22} \;;$$

$$g^{11}=\frac{g_{22}}{g}=\frac{1}{g_{11}},\;\; g^{22}=\frac{g_{11}}{g}=\frac{1}{g_{22}},\;\; g^{12}=0$$

وبالتعويض عن ذلك كله في (9.32) نحصل على

$$k_1k_2=\frac{L_{11}}{g_{11}}.\frac{L_{22}}{g_{22}},\;\; k_1+k_2=\frac{L_{11}}{g_{11}}+\frac{L_{22}}{g_{22}}$$

إذاً مجموع الانحنائين الأساسين هو مجموع $\frac{L_{11}}{g_{11}},\frac{L_{22}}{g_{22}}$ وحاصل ضربهما هو حاصل ضرب $\frac{L_{11}}{g_{11}},\frac{L_{22}}{g_{22}}$ ومنها يكون $k_1=\frac{L_{11}}{g_{11}},\;\; k_2=\frac{L_{22}}{g_{22}}$.

لإثبات أن الاتجاهات الأساسية في هذه الحالة هي اتجاهي المماسات لخطي u^1,u^2 البارامترين، نعتبر صيغة الانحناء العمودي (9.18) في الاتجاه (du^1,du^2) حيث $g_{12}=L_{12}=0$ نحصل على

$$k_n=\frac{L_{11}(du^1)^2+L_{22}(du^2)^2}{g_{11}(du^1)^2+g_{22}(du^2)^2}$$

نختار اتجاه خط u^1 البارامتري حيث $du^2 = 0,\ du^1 \neq 0$

$$\therefore (k_n)_{du^2=0} = \frac{L_{11}(du^1)^2}{g_{11}(du^2)^2} = \frac{L_{11}}{g_{11}}$$

بالمثل باعتبار خط u^2 البارامتري $(du^2 \neq 0, du^1 = 0)$ نحصل على

$$(k_n)_{du^1=0} = \frac{L_{22}}{g_{22}}$$

أي أن الانحنائين العموديين في هذين الاتجاهين هما انحنائين أساسين وبالتالي فإن الاتجاهات البارامترية على السطح هي اتجاهات أساسية.

ملاحظة (٦.٩):

الجزء الثاني من النظرية السابقة يمكن إثباته بطريقة أخرى وذلك بالتعويض عن $L_{12} = g_{12} = 0$ في (9.29) لنحصل على

$$(L_{11}g_{22} - L_{22}g_{11})du^1du^2 = 0\ ,\ L_{11}g_{22} \neq L_{22}g_{11}$$

ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية للاتجاهات الأساسية وهي $du^1du^2 = 0$ والتي تمثل الخطوط البارامترية على السطح.

ملاحظة (٧.٩):

من المعادلة (9.27) يتضح أن الشرط الضروري والكافي لكي يكون الاتجاه (du^1, du^2) اتجاه أساسي على السطح هو أن تتحقق المعادلة (9.29) والتي يمكن كتابتها في صورة سهلة وبسيطة في التعامل معها كالآتي:

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ L_{11} & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} = 0 \qquad (9.34)$$

من هذه المعادلة يتضح أن الاتجاهات الأساسية غير معرفة في حالتين:

(i) إذا كان السطح مستوى حيث الانحناء العمودي منعدم لأن

$$L_{11}=L_{12}=L_{22}=0$$

(ii) إذا كان السطح كرة حيث الانحناء العمودي ثابت لأن

$$\frac{L_{11}}{g_{11}}=\frac{L_{22}}{g_{22}}\ ,\ L_{12}=g_{12}=0$$

وفي كلتا الحالتين المعادلة (9.34) تتحقق تطابقياً identically وهذا معناه أن أي اتجاه على المستوى أو سطح الكرة هو اتجاه أساسي.

تعريف (٤.٩):

المنحنى الواقع على السطح يسمى بخط انحناء line of curvature إذا كان المماس له عند أي نقطة عليه يقع على امتداد أحد الاتجاهات الأساسية للسطح عند هذه النقطة.

ملاحظة (٨.٩):

المعادلة التفاضلية (9.29) تعطى خط الانحناء ومنها يتضح وجود عائلتين من خطوط الانحناء لكل سطح وقد تكون هي الخطوط البارامترية على السطح إذا كان $L_{12}=0,\ g_{12}=0$.

نظرية (٥.٩):

الانحناءات الأساسية على السطح M عند أي نقطة عليه هي الجذور الكامنة (القيم الذاتية) eigen value للمصفوفة $(L_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta})$

البرهان:

المعادلة المميزة للمصفوفة $(L_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta})$ تعطى من

$$Det\,(L_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}-\lambda\,\mathrm{I}_2)=0$$

$$\therefore\ Det\,(L_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}-\lambda g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta})=0$$

$$\therefore Det((L_{\alpha\beta}-\lambda g_{\alpha\beta})g^{\alpha\beta})=0$$

$$=Det(L_{\alpha\beta}-\lambda g_{\alpha\beta}).Det(g^{\alpha\beta})$$

وحيث أن $Det(g_{\alpha\beta})=g\ ,Det(g^{\alpha\beta})=\frac{1}{g}\neq 0$ لأن المصفوفة $(g^{\alpha\beta})$ هي معكوس المصفوفة $(g_{\alpha\beta})$

$$\therefore Det(L_{\alpha\beta}-\lambda g_{\alpha\beta})=0$$

وبوضع $\lambda=k_n$ نحصل على

$$Det((L_{\alpha\beta}-k_n g_{\alpha\beta})=0$$

وهي نفس المعادلة (9.28) والتي تؤول في النهاية إلى المعادلة (9.30). وبهذا نكون قد توصلنا إلى نهاية البرهان.

ملاحظة (٩.٩):

من نظرية (٩-٥) نستنتج أن المتجهات الذاتية للمصفوفة $\left(L_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta}\right)$ هي الاتجاهات الأساسية للسطح المنتظم المعرف من خلال $g^{\alpha\beta}$ ، $L_{\alpha\beta}$.

(٤.٩) مجسم المكافئ اللاصق: Osculating Paraboloid

لمعرفة شكل نقاط السطح العام هل هي نقاط من سطوح مشهورة مثل المستوى والكرة والمجسم الناقصي والزائدي نقوم بعمل دراسة للسطح في منطقة صغيرة جداً حول النقطة وذلك باستخدام مفكوك تيلور للدالة الاتجاهية التي تعرف السطح حول النقطة المراد التعرف عليها وبذلك نتمكن من عمل تصنيف لنقاط السطح.

نفرض أن P نقطة على السطح المنتظم

$$M:R=R(u^1,u^2),(u^1,u^2)\in D\subset\mathbb{R}^2$$

ونأخذ Q نقطة قريبة من P أي في منطقة الجوار المباشر لها. ونفرض أن d هو مسقط القطعة المستقيمة (صغيرة صغر كافي) pQ التي تصل بين النقطتين P ، Q حيث

$$d = <PQ, N>$$

المسقط d قد يكون موجب أو سالب على حسب وضع النقطة Q بالنسبة إلى المستوى المماس T_pM (على نفس الجانب أو الجانب المخالف من العمودي N على السطح M).

إذا كانت النقطة P لها متجه الموضع $R(u^1, u^2)$ فإن النقطة Q على السطح والمجاورة لها يكون متجه الموضع لها هو (شكل (٤.٩)).

$$\bar{R} = R(u^1 + du^1, u^2 + du^2)$$

$$\therefore PQ = R(u^1 + du^1, u^2 + du^2) - R(u^1, u^2)$$

وباستخدام مفكوك تيلور حول النقطة (u^1, u^2) نحصل على

$$\begin{aligned} PQ = & R(u^1, u^2) + R_1 du^1 + R_2 du^2 \\ & + \frac{1}{2}(R_{11}(du^1)^2 + 2R_{12} du^1 du^2 + R_{22}(du^2)^2) \\ & + O((du^1)^2, (du^2)^2) - R(u^1, u^2) \end{aligned}$$

أو في الصورة المختصرة

$$PQ = dR + \frac{1}{2} d^2 R + O((du^1)^2 + (du^2)^2) \qquad (9.35)$$

حيث

$$dR = R_\alpha du^\alpha, d^2 R = R_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

وبما أن $<dR, N> = 0$ لأن $dR \in T_p M$

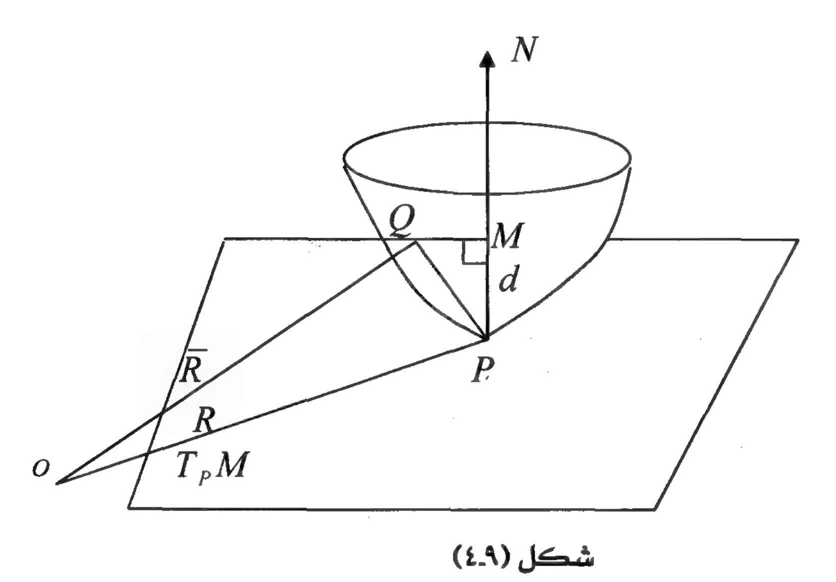
$$\therefore d = <PQ, N> = <\frac{1}{2} d^2 R, N> + O((du^1)^2, (du^2)^2)$$

$$= \frac{1}{2} <R_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, N> + O((du^1)^2, (du^2)^2)$$

$$d = \frac{1}{2} < R_{\alpha\beta}, N > du^{\alpha} du^{\beta} + O((du^1)^2, (du^2)^2)$$

$$\therefore d = \frac{1}{2} L_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta} + O((du^1)^2, (du^2)^2)$$

$$\therefore 2d = \text{II} + O((du^1)^2, (du^2)^2) \qquad (9.36)$$



شكل (٤.٩)

إذاً الصيغة الأساسية الثانية II تمثل الجزء الأساسي من ضعف مسقط PQ على N والقيمة الموجبة من II تمثل الجزء الأساسي من ضعف المسافة العمودية من Q على المستوى المماس للسطح عند P وإذا كانت Q قريبة قرب كافي من P بحيث $O((du^1)^2, (du^2)^2)$ يؤول إلى الصفر فإن الدالة التربيعية

$$d = \frac{1}{2} \text{II} = \frac{1}{2} L_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta} \qquad (9.37)$$

تصف مجسم مكافئ $\hat{M}$ يسمى المكافئ اللاصق osculating paraboliod عند النقطة P لأنه معرف في منطقة الجوار المباشر من الرتبة الثانية للنقطة P أي أن الدالة d تحتوي على المشتقات التفاضلية ذات الرتبة الثانية فقط. وفي هذه الحالة يقال أن شكل السطح M بالقرب من النقطة P يشابه تقريباً approximately شكل

السطح $\hat{M}$. السطح $\hat{M}$ يسمى التقريب التربيعي quadratic approximation للسطح M بالقرب من P . وهذا التقريب يناظر تقريب فرينيه للمنحنى في الفراغ (الباب السادس).

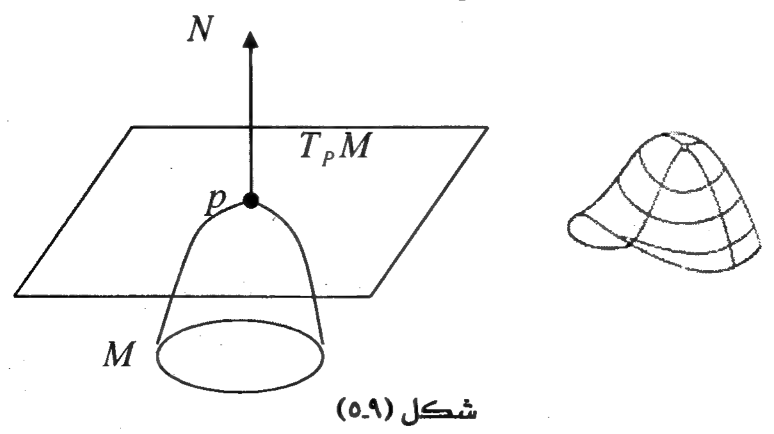
ملاحظة (٩-١٠):

المعادلة (9.37) معادلة جبرية من الدرجة الثانية في المتغيرات d ، du^1, du^2 وبالتالي فهي تصف سطح مخروطي conical surface (سطح درجة ثانية) ملاصق للسطح M عند النقطة P.

وجود المجسم اللاصق ووحدانيته عند النقطة P يسمح لنا بإجراء تصنيف نقاط السطح وهذا التصنيف يعتمد على مميز الصيغة الأساسية الثانية L وفي نفس الوقت هو نفسه مميز الجزء التربيعي في المعادلة (9.37) التي تصف سطح الدرجة الثانية (المكافئ اللاصق) (ارجع إلى الهندسة التحليلية في الفراغ).

تعريف (٩-٥):

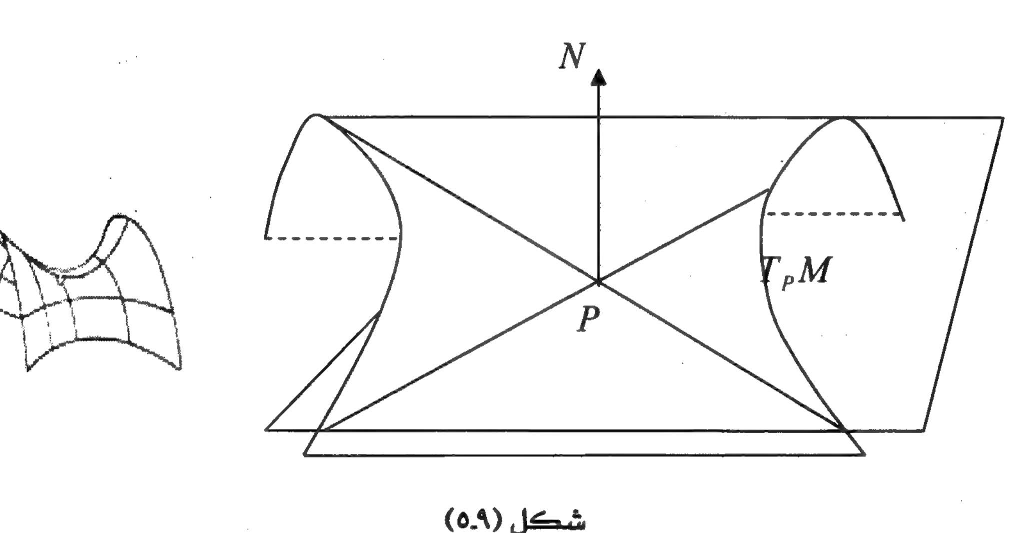
يقال أن النقطة P على السطح M نقطة ناقصية elliptic إذا كان $L > 0$ أي إذا كانت المعادلة (9.37) تصف مجسم مكافئ ناقصي elliptic paraboloid وفي منطقة الجوار المباشر للنقطة الناقصية يكون السطح في جهة واحدة من المستوى المماس $T_P M$ عند P كما هو موضح في شكل (٩-٥).



شكل (٩-٥)

تعريف (٦.٩):

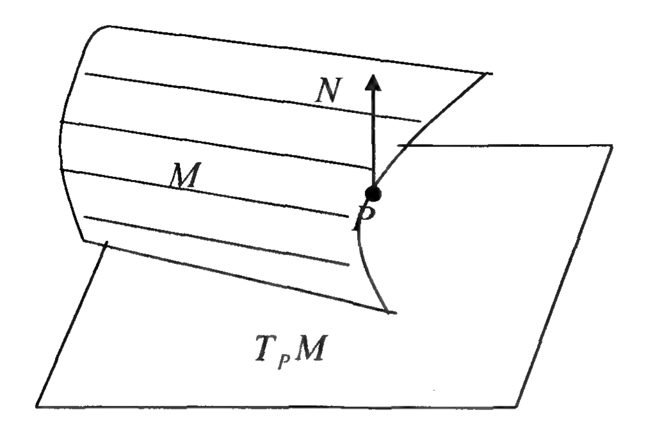
يقال أن النقطة P على السطح M نقطة زائدية hyperbolic إذا كان $L < 0$ أي إذا كانت المعادلة (9.37) تصف مجسم مكافئ زائدي hyperbolic paraboloid (سطح سرج) وفي هذه الحالة يوجد خطين مستقيمين مختلفين في المستوى المماس T_PM للسطح عند P ويقسمان المستوى المماس إلى أربعة مقاطع فيها تتغير إشارة d من موجب إلى سالب وعلى هذين الخطين تكون $d = 0$ ، وفي منطقة الجوار المباشر للنقطة P يقع السطح على جانبي المستوى المماس عند P كما هو موضح في شكل (٦.٩).

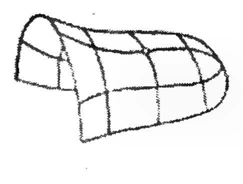


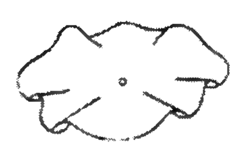
شكل (٥.٩)

تعريف (٧.٩):

يقال أن النقطة P على السطح M نقطة مكافئة parabolic إذا كان المجسم اللاصق عند هذه النقطة يتحول إلى مكافئ أسطواني parabolic cylinder (أسطوانة مقامة على قطع مكافئ) أي أن $L = 0$ ، الكميات $L_{\alpha\beta}$ ليست جمعيها أصفار. في هذه الحالة يوجد خط مستقيم واحد في المستوى عند P طوله $d = 0$. كما هو موضح في شكل (٧.٩).







شكل (٩-٧)

تعريف (٩-٨):

النقطة على السطح تسمى نقطة مستوية إذا كان $L_{\alpha\beta}=0$ تطابقياً أي $d=0$ لكل اتجاه (du^1,du^2) أي أن المجسم اللاصق عند هذه النقطة يتحول إلى مستوى هو المستوى المماس عند هذه النقطة. وفي هذه الحالة الانحناء العمودي ينعدم تطابقياً.

تعريف (٩-٩):

النقطة التي عندها الكميات الأساسية الثانية $L_{\alpha\beta}$ والكميات الأساسية الأولى $g_{\alpha\beta}$ متناسبة تسمى نقطة كروية أو نقطة صُرّة umbilical وفي هذه الحالة الانحناء العمودي ثابت تطابقياً (أي لجميع نقاط السطح) مثل نقطة الصرة في بطن الإنسان.

مثال (٩-٥):

المستوى كل نقاطه نقاط مستوية والكرة كل نقاطها نقاط كروية أما الأسطوانة فكل نقاطها نقاط مكافئة.

الحل:

حالة المستوى والكرة واضحة من التعريف والتمثيلات البارامترية المنتظمة لكل منهما.

أما بالنسبة للأسطوانة نعتبر تمثيل بارامتري عام لأسطوانة مقامة على المنحنى المستوى $y = f(x)$ (راجع الهندسة التحليلية في الفرقة الأولى) على النحو الآتي:

$$R(u^1,u^2)=(u^1,f(u^1),u^2),u^1 \in I \subset \mathbb{R}$$

بحساب المشتقات حتى الرتبة الثانية نحصل على

$$R_1=(1,f',0)\ ,\ R_2=(0,0,1);$$

$$R_{11}=(0,f'',0), R_{12}=(0,0,0), R_{22}=(0,0,0)\ ;$$

$$g_{11}=1+f'^2\ ,\ g_{22}=1, g_{12}=0, 1+f'^2=g\ .$$

وحقل متجه العمودي على سطح الأسطوانة هو

$$N=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}(f',-1,0), '=\frac{d}{dx}$$

والكميات الأساسية الثانية تعطى من (9.12) على الصورة

$$L_{11}=\frac{-f''}{\sqrt{1+f'^2}}\ ,\ L_{12}=0\ ,\ L_{22}=0$$

إذاً $L_{\alpha\beta}$ ليست جميعها أصفار، $L=0$ أي أن كل نقاط الأسطوانة نقاط مكافئة.

نعطي الآن نظرية توضح علاقة نوعية نقاط السطح بإشارة الانحناء الجاوسي.

نظرية (٦.٩):

النقطة على السطح المنتظم تكون ناقصية أو زائدية أو مكافئة أو مستوية إذا كانت $K>0$ أو $K<0$ أو $K=0$ أو $K=0$ و $L_{\alpha\beta}=0$ لجميع قيم α,β على الترتيب.

الحل:

البرهان واضح من العلاقة $K=\frac{L}{g}$ حيث $g>0$ إذاً إشارة K تتفق مع إشارة L و استخدام التعاريف السابقة.

مثال (٦.٩):

بين أن الانحناء الجاوسي للكرة لا يعتمد على اتجاه الكرة بينما الانحناء المتوسط يعتمد على اتجاه الكرة.

الحل:

بينا في مثال (٤.٩) أن الانحناء العمودي k_n ثابت ويعطى من $k_n = \frac{1}{a}$ حيث a نصف قطر الكرة وأن حقل متجه العمودي على سطح الكرة في اتجاه أنصاف الأقطار للداخل أو الخارج أي $N = \pm \frac{R}{a}$ وبالتالي فإن

$$k_1 = k_2 = \frac{L_{11}}{g_{11}} = \frac{L_{22}}{g_{22}} = \pm \frac{1}{a}$$

$$\therefore\ K = k_1 k_2 = \frac{1}{a^2} > 0\ ,\ H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \pm \frac{1}{2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{a}) = \pm \frac{1}{a}$$

وهذا يوضح المطلوب في المثال (أي أن إشارة H تتفق مع إشارة N).

(٥.٩) مميز ديوبين Dupin's Indicatrix

في هذا الجزء ندرس مقطع المجسم المكافئ اللاصق المناظر للمقطع بالمستوى $d =$ const.

تعريف (١٠.٩):

القطع المخروطي conic section المناظر للصيغة التربيعية II = const. يسمى مميز ديوبين Dupin's indicatrix.

ملاحظة (١١.٩):

مميز ديوبين هو مقطع المجسم المكافئ اللاصق بالمستوى $d =$ const. لنحصل على معادلة من الدرجة الثانية في المتغيرات du^1, du^2 وبالتالي فهي تمثل قطع مخروطي.

نحاول الآن إيجاد **الصورة القياسية** لمعادلة القطع المخروطي ولذلك نفرض أن السطح M أمكن تمثيله من خلال صورة مونج البارامترية الآتية

$$R=(u^1,u^2,f(u^1,u^2)),(u^1,u^2)\in D\subset\mathbb{R}^2$$

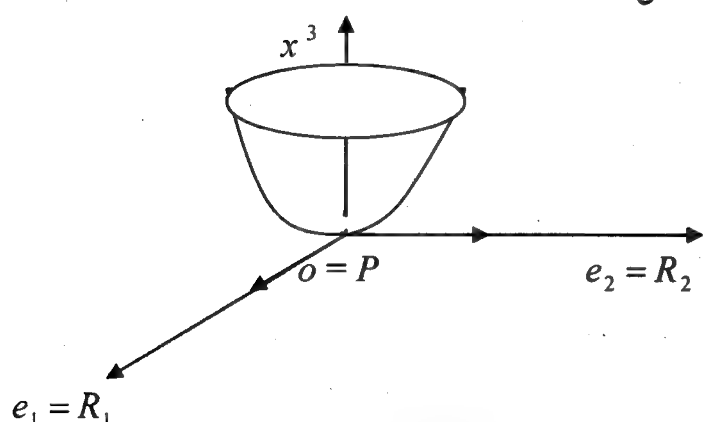
بحيث المستوى المماس T_PM عند النقطة P ينطبق على المستوى الإحداثي x^1x^2 وأن P انطبقت على نقطة أصل الإحداثيات وبالتالي فإن المماسات R_1,R_2 للخطوط البارامترية على السطح عند النقطة P تنطبق على متجهات الوحدة الثانية e_1,e_2 في اتجاه محاور الإحداثيات ox^1,ox^2 على الترتيب.

يترتب على ذلك أن $\frac{\partial f}{\partial u^1}$ ، $\frac{\partial f}{\partial u^2}$ تساوي صفر عند نقطة الأصل لأن

$$(R_1)_o=(1,0,0)\ =(1,0,(f_1)_o)$$

وكذلك بالنسبة للمماس R_2 إذاً $(f_1)_0=(f_2)_0=0$

كما يتضح من شكل (٨-٩)



شكل (٨-٩)

وبالتالي فإن الكميات الأساسية الأولى عند نقطة الأصل هي

$$g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}(0)=<R_\alpha,R_\beta>_o=<(R_\alpha)_o,(R_\beta)_o>$$

$$=<e_\alpha,e_\beta>=\delta_{\alpha\beta}$$

$$\therefore g_{11}=1\ ,\ g_{12}=0, g_{22}=1$$

وبالتالي فإن k_n يؤول إلى

$$k_n=\frac{\text{II}}{\text{I}}=\frac{L_{\alpha\beta}du^{\alpha}du^{\beta}}{(du^1)^2+(du^2)}\qquad(9.38)$$

بما أن الانحناء العمودي k_n يعتمد فقط على النسبة $\frac{du^1}{du^2}$ إذاً نستطيع أن نقوم بتبسيط العلاقة السابقة وذلك باختيار

$(du^1)^2+(du^2)^2=1$ أي باختيار $du^1=\cos\theta\ ,\ du^2=\sin\theta$

$$\therefore\ k_n=L_{11}\cos^2\theta+2L_{12}\sin\theta\cos\theta+L_{22}\sin^2\theta\quad(9.39)$$

نفرض أن $k_n=\frac{1}{r^2}$ وكذلك $x^1=r\cos\theta, x^2=r\sin\theta$

إذاً وبالتعويض في (9.39) نحصل على

$$L_{11}(x^1)^2+2L_{12}x^1x^2+L_{22}(x^2)^2=\pm1\quad(9.40)$$

هذه المعادلة تحدد قطع مخروطي في المستوى x^1x^2 يسمى مميز ديوبين.

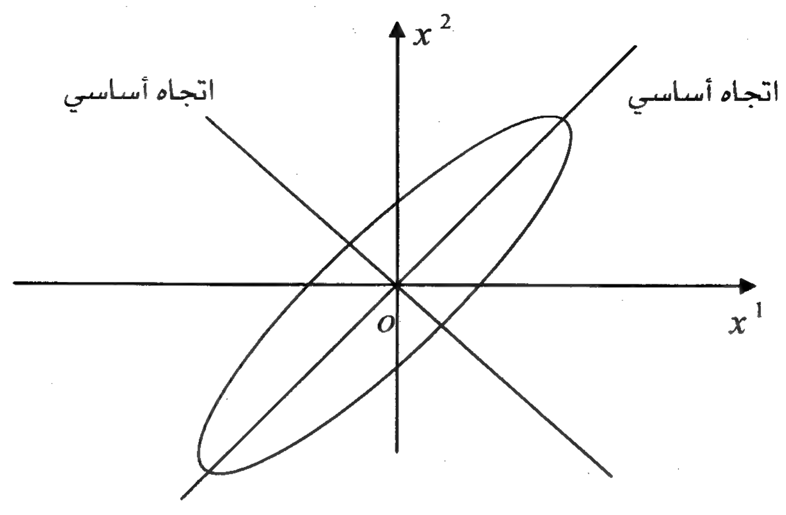
ملاحظة (١٢.٩):

المسافة r من النقطة (x^1,x^2) على القطع المخروطي إلى نقطة الأصل تساوي مقلوب $\sqrt{|k_n|}$ في الاتجاه $\frac{du^1}{du^2}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

من معادلة الدرجة الثانية (9.40) وبمراجعة ما درسه الطالب في الفرقة الأولى حول تصنيف معادلة الدرجة الثانية نتوصل إلى النتائج الآتية:

تمهيدية (٥.٩):

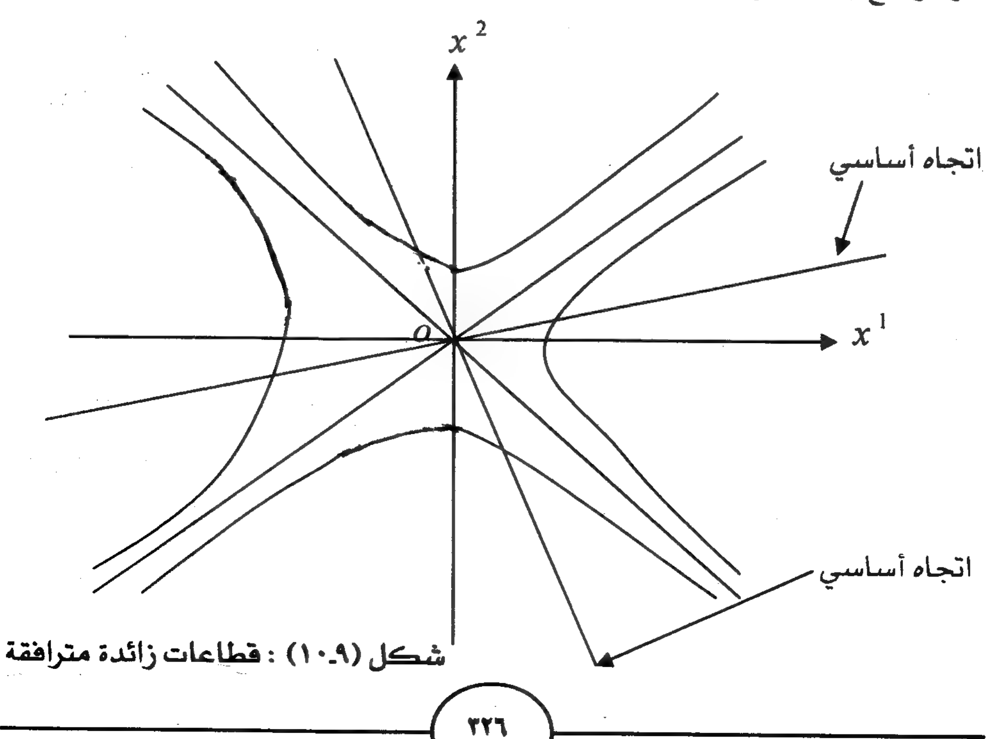
إذا كانت النقطة p نقطة ناقصية $(L>0)$ فإن مميز ديوبين المناظر لها عبارة عن قطع ناقص كما هو موضح في شكل (٩.٩).



شكل (٩ـ٨) : قطع ناقص

تمهيدية (٩ـ٦):

إذا كانت النقطة p زائدية $(L < 0)$ فإن مميز ديوبين يتكون من زوج مترافق من القطاعات الزائدية بحيث k_n يكون موجب على أحدهما وسالب على الآخر كما هو موضح في شكل (٩ـ١٠).



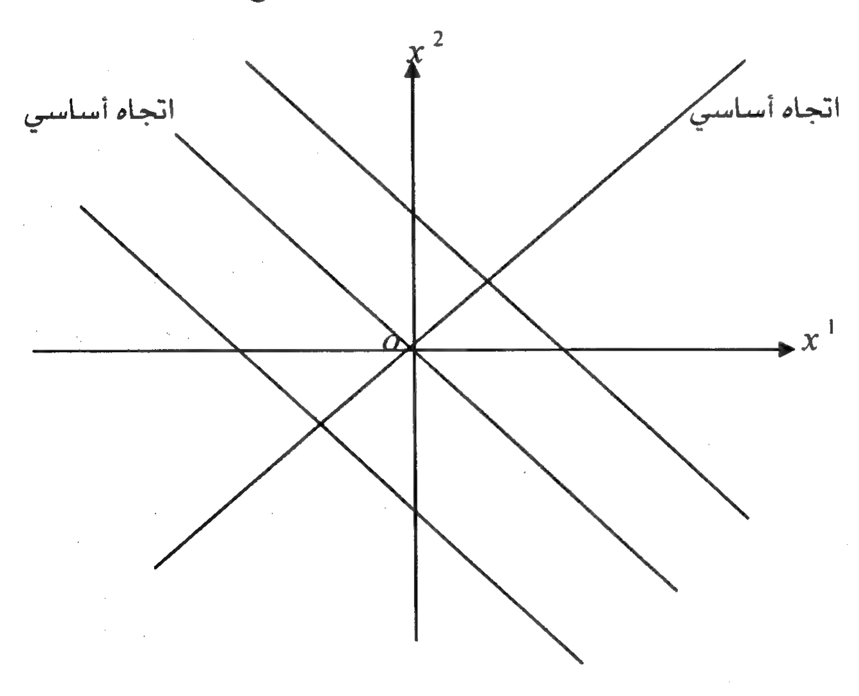
شكل (٩ـ١٠) : قطاعات زائدة مترافقة

تمهيدية (٧.٩):

الخطوط التقاربية المشتركة للقطاعات الزائدية المترافقة تناظر $k_n = 0$.

تمهيدية (٨.٩):

إذا كانت النقطة p نقطة مكافئة $(L = 0)$ فإن الطرف الأيسر من المعادلة (9.40) يمكن تحليله إلى عاملين من الدرجة الأولى وبالتالي فإن مميز ديوبين يتكون من زوج من المستقيمات المتوازية واتجاههما هو الاتجاه الذي عليه $k_n = 0$ وفي حالة النقاط المستوية فإن مميز ديوبين غير موجود. كما هو موضح في شكل (١١.٩).



شكل (١١.٩) : زوج من المستقيمات المتوازية

تعريف (١١.٩):

النقطة على السطح تسمى ناقصية كروية (مكافئة كروية) إذا كانت كروية ناقصية (كروية مكافئة) أي إذا كان $k_n = \text{const.} \neq 0$ وكل الاتجاهات

على السطح هي اتجاهات أساسية حيث $L > 0$) $k_n = 0$ ، $L = 0$ ، $L_{\alpha\beta}$ ليست جميعها أصفار).

مثال (٩-٧):

كل نقطة على سطح الكرة هي نقطة كروية ناقصية لأن $L > 0$ وكل اتجاه هو اتجاه أساسي.

مثال (٩-٨):

كل نقطة على المستوى هي نقطة مستوية أو مكافئة كروية وكل اتجاه هو اتجاه أساسي ($L = 0$ ، $L_{\alpha\beta} = 0$).

مثال (٩-٩):

الانحناء الجاوسي والمتوسط للمستوى منعدم لجميع نقاطه.

مثال (٩-١٠):

أثبت أن سطح المكافئ الزائدي $x^3 = (x^1)^2 - (x^2)^2$ مكون من نقاط زائدية . أوجد مميز ديوبين عليه.

الحل:

السطح معطى في صورة مونج الكارتيزية ويكون لها تمثيل بارامتري منتظم على الصورة الاتجاهية الآتية

$$R(u^1,u^2)=(u^1,u^2,(u^1)^2-(u^2)^2)$$

وبحسابات روتينية نجد أن

$$R_1 = (1,0,2u^1)\ ,\ R_2 = (0,1,-2u^2)\ ;$$

$$R_{11} = (0,0,2)\ ,\ R_{22} = (0,0,-2)\ ,\ R_{12} = (0,0,0)\ ;$$

$$g_{11} = 1+4(u^1)^2\ ,\ g_{12} = -4u^1u^2\ ,\ g_{22} = 1+4(u^2)^2\ ;$$

$$\therefore g = 1+4((u^1)^2+(u^2))^2\ ,$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{g}}(-2u^1,2u^2,1)\ ,$$

$$L_{11}=\frac{2}{\sqrt{g}}\ ,L_{22}=\frac{-2}{\sqrt{g}}\ ,L_{12}=0,\ L=\frac{-4}{g}<0\ \ ,\forall(u^1,u^2)$$

وبالتالي فإن السطح المعطى كل نقاطه نقاط زائدية ($L<0$).

عند نقطة الأصل $(u^1,u^2)=(0,0)$ يكون

$$g_{11}=1,\ g_{12}=0,g_{22}=1\ \ ;\ \ L_{11}=2,L_{12}=0\ ,\ L_{22}=-2$$

$$\therefore\ k_n(o)=\frac{2(du^1)^2-(du^2)^2)}{(du^1)^2+(du^2)^2}$$

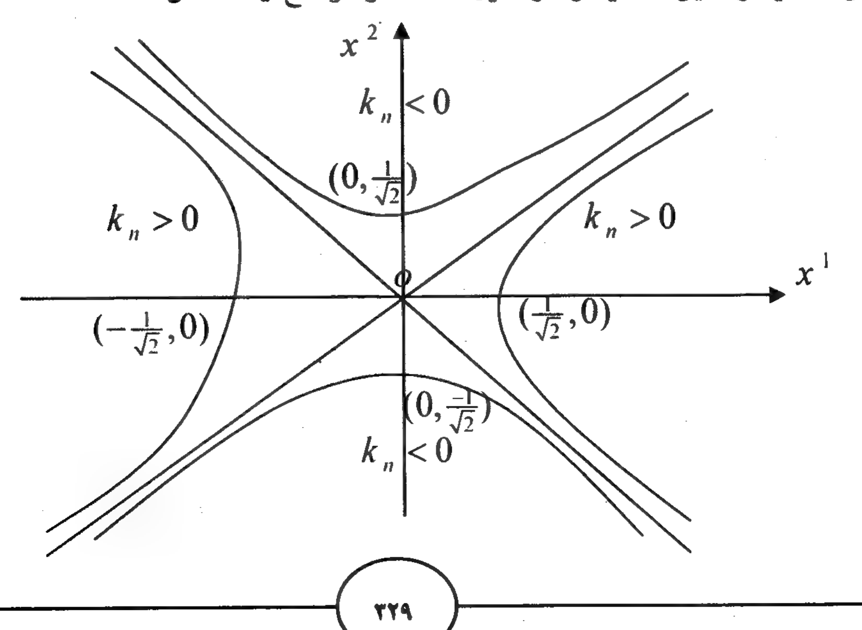
بوضع $x^1=r\cos\theta\ ,\ x^2=r\sin\theta\ \ ,\ \ du^1=\cos\theta\ ,\ du^2=\sin\theta$

حيث $r^2=\dfrac{1}{|k_n(o)|}$

نحصل على مميز ديوبين على الصورة:

$$(x^1)^2-(x^2)^2=\pm\frac{1}{2}$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية معرفة في المستوى ox^1x^2 وتعرف قطع مخروطي عبارة عن قطعين زائدين قائمين ومترافقين كما هو موضح في شكل (١٢.٩).





شكل (١٢.٩) : المكافئ الزائدي

واضح أن القيمة العظمى والصغرى للانحناء العمودي هي 2 ,2- وتأخذ على امتداد محور ox^1 ، ox^2 . والاتجاهات الأساسية عند $p=(0,0)$ هي اتجاهات المحاور ox^1 ، ox^2 على الترتيب.

ملاحظة (١٣.٩):

في المثال السابق كانت $g_{12}(o)=L_{12}(o)$ أي أن المماسات للخطوط البارامترية (محاور الإحداثيات) عند نقطة الأصل منطبقة على الاتجاهات الأساسية.

مثال (١١.٩):

أوجد عائلتي خطوط الانحناء على سطح المكافئ الناقصي الدوراني $z=x^2+y^2$ وأوجد نقطة الكروية إن وجدت.

الحل:

السطح المعطى في صورة مونج وله التمثيل البارامتري المنتظم على الصورة:

$$R=(u^1,u^2,(u^1)^2+(u^2)^2)$$

وكما في المثال السابق نجد أن

$$g_{11}=1+4(u^1)^2, g_{12}=4u^1u^2, g_{22}=1+4(u^2)^2, g=1+4((u^1)^2+(u^2)^2)$$

وكذلك فإن

$$L_{11}=L_{22}=2\ ,\ L_{12}=0, L=\frac{4}{g}>0$$

بالتعويض عن $g_{\alpha\beta}$ ، $L_{\alpha\beta}$ في المعادلة التفاضلية (9.29) التي تعطي الخطوط الانحنائية نحصل على

$$u^1u^2(du^1)^2+((u^2)^2-(u^1)^2)du^1du^2-u^1u^2(du^2)^2=0$$

و بالتحليل يكون لدينا

$$(u^1du^1+u^2du^2)(u^2du^1-u^1du^2)=0$$
$$\therefore u^1du^1+u^2du^2=0 \quad \text{or} \quad u^2du^1-u^1du^2=0$$

حل المعادلة التفاضلية الأولى هو عائلة من الدوائر مركزها نقطة الأصل وتعطى من

$$(u^1)^2+(u^2)^2=C_1^2$$

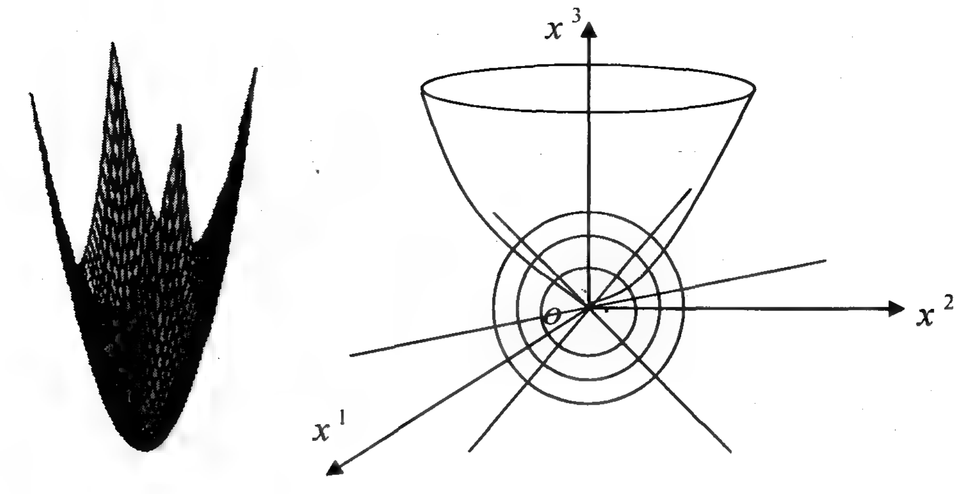
حل المعادلة التفاضلية الثانية هو عائلة من الخطوط المستقيمة $u^1=C_2u^2$ والتي تمر بنقطة الأصل.

إذاً الخطوط الانحنائية على السطح تتكون من عائلة من الخطوط المستقيمة وعائلة من الدوائر كما هو موضح في شكل (١٣.٩).

عند نقطة الأصل تكون $u^1=u^2=0$ والكميات الأساسية الأولى والثانية تصبح على الصورة

$$g_{11}=1\ ,\ g_{12}=0\ ,\ g_{22}=1\ ;\ L_{11}=2\ ,\ L_{12}=0\ ,\ L_{22}=2$$

أي أن الكميات الأساسية الثانية والأولى متناسبة عند نقطة الأصل وبذلك تكون نقطة الأصل هي نقطة كروية وباقي نقاط السطح كلها ناقصية (باستخدام التعريف).



المكافئ الناقصي الدوراني

شكل (١٣.٩)

نظرية (٧.٩):

الخطوط الانحنائية على السطح تكون شبكة من المنحنيات المتعامدة.

البرهان:

نعني بالشبكة المتعامدة هو أن الخطوط الانحنائية تتقاطع على التعامد فيما بينها مثنى مثنى ونوضح ذلك كما يلي:

من المعادلة التفاضلية (9.29) للخطوط الانحنائية نجد أن

$$\frac{du^1}{du^2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \quad , a \neq 0 \qquad (9.41)$$

حيث

$$a = L_{11}g_{12} - L_{12}g_{11} , b = L_{11}g_{22} - L_{22}g_{11} , c = L_{12}g_{22} - L_{22}g_{12}$$

وبالتالي فإن الاتجاهات الأساسية على السطح (المماسات للخطوط الانحنائية) لها الاتجاهات

$$(\lambda^{\alpha})=(\xi,1)du^2,(\mu^{\alpha})=(\eta,1)du^2,$$

$$\xi=-\frac{b}{2a}+\sqrt{(\frac{b}{2a})^2-\frac{c}{a}}\ ,\ \eta=-\frac{b}{2a}-\sqrt{(\frac{b}{2a})^2-\frac{c}{a}} \qquad (9.42)$$

وباستخدام الصيغة (8.10) التي تعطي الزاوية بين الاتجاهات على السطح نجد أن جيب تمام الزاوية بين الاتجاهات الأساسية على السطح يساوي صفر إذا تحقق

$$g_{11}\xi\eta+g_{12}(\xi+\eta)+g_{22}=0 \qquad (9.43)$$

وبالتعويض عن ξ,η حيث

$$\xi\eta=\frac{c}{a}\ ,\ \xi+\eta=-\frac{b}{a}$$

وبالتالي فإن شرط التعامد (9.43) يصبح على الصورة

$$g_{11}c-g_{12}b+g_{22}a=0 \qquad (9.44)$$

وبالتعويض عن a, b, c نجد أن الشرط (9.44) يتحقق تطابقياً بمعنى أن أي خطين انحنائيين عند نقطة ما على السطح يتقاطعا على التعامد.

تمارين (٩)

(١) أثبت أن قيم الانحناء الجاوسي K والانحناء المتوسط H على السطح

$$R=(u^1+u^2, u^1-u^2, u^1u^2)$$

عند النقطة $u^1=1,\ u^2=1$ هي $K=\dfrac{1}{16},\ H=\dfrac{1}{8\sqrt{2}}$

(٢) أوجد النقاط المستوية على سطح سرج القرد monkey saddle

$$R(u^1,u^2)=(u^1,u^2,(u^1)^3-3(u^2)^2u^1)$$

(٣) أثبت أن الانحناءات الأساسية على السطح $x^1\sin x^3-x^2\cos x^3=0$ هي $\dfrac{\pm 1}{1+(x^1)^2+(x^2)^2}$ وبين أن الانحناء الجاوسي سالب وأن الانحناء المتوسط منعدم.

(**إرشاد:** معادلة السطح تأخذ شكل مونج $x^3=\tan^{-1}\dfrac{x^2}{x^1}$)

(٤) أوجد النقاط الكروية على سطح سرج القرد monkey saddle

$$z=x^3-3xy^2$$

(٥) أثبت أن كل نقط الأسطوانة العامة هي نقط مكافئة أو نقط مستوية.

(٦) أوجد الخطوط الانحنائية على السطح $x^3=x^1\sin x^2$ وكذلك أوجد الانحناءات الأساسية.

(٧) بين أن أي اتجاه على كل من سطح الكرة والمستوى هو اتجاه أساسي.

(٨) أثبت أن الانحناء الجاوسي K والمتوسط H على سطح الكرة يحقق $K=H^2$.

(٩) أوجد الانحناء الجاوسي والمتوسط للسطح $z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$

(١٠) أوجد الانحناء المتوسط والانحناء الجاوسي للسطح $z = axy$ عند النقطة $x=y=0$، a ثابت.

(١١) أوجد الانحناء العمودي للمنحنى $u=v$ على السطح $R=(u\cos v, u\sin v, u)$.

(١٢) أوجد النقاط الكروية على المجسم الناقصي $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

(١٣) أوجد الانحناءات الأساسية للسطح $y=x\tan\dfrac{z}{a}$ ، a ثابت حقيقي.

(١٤) أوجد الانحناء الجاوسي والمتوسط وخطوط الانحناء على السطح

$$R=(u^1\cos u^2, u^1\sin u^2, au^1),\ a\neq 0$$

(١٥) أوجد التقريب التربيعي (المجسم اللاصق) عند نقطة الأصل للسطوح

(i) $z=e^{x^2+y^2}$ (ii) $z=(x+3y)^2$

(١٦) أوجد مميز ديوبين على السطوح الآتية:

(i) $z=xy$ (ii) $z=x^2-y^2$

(iii) $z=x^2-y$ (iv) $z=x^3-3xy^2$

(v) $z=\tan\dfrac{y}{x}$

الباب العاشر
الصيغة الأساسية الثالثة
The Third Fundamental Form

هذا الباب يتناول الخصائص الهندسية التي تتعلق بحركة حقل متجه العمودي على السطح والتي تسمى خصائص المميز الكروي بطريقة مشابهة لما تعرضنا له في نظرية المنحنيات. وفيه نعرف الصورة الكروية أو راسم جاوس والصيغة الأساسية الثالثة ومؤثر الشكل ومعادلات رودريجز وأويلر وفي نهاية الباب نتعرض للخطوط التقاربية على السطح.

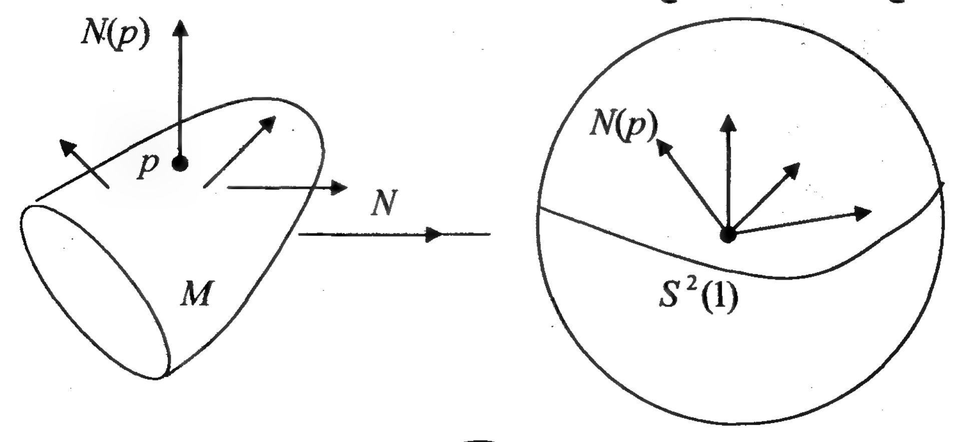
(١.١٠) الصورة الكروية (راسم جاوس):
Spherical Image (Gauss Mapping):

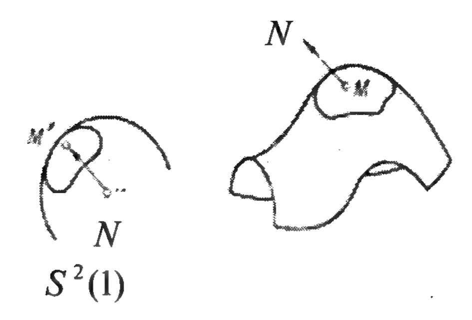
تعريف (١.١٠):

نفرض أن $M \subset \mathbb{R}^3$ سطح منتظم له توجيه N . الراسم (التطبيق) $N: M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ الذي يأخذ قيمة على كرة الوحدة unit sphere

$$S^2(1)=\{x=(x^1,x^2,x^3)\in\mathbb{R}^3, |x|^2=1\}$$

يعرف راسم $N: M \longrightarrow S^2(1)\subset\mathbb{R}^3$ يسمى راسم جاوس Gauss mapping للسطح M كما هو موضح في شكل (١.١٠) حيث $M'=N(M)\subset S^2(1)$.





شكل (١٠.١)

ملاحظة (١.١٠):

من السهل التأكد أن راسم جاوس $g \neq 0$, $N = \dfrac{R_1 \wedge R_2}{\sqrt{g}}$ تفاضلي differentiable لأن كل من R_1, R_2 تفاضلي (من تعريف السطح المنتظم $R = R(u^1, u^2)$).

تمهيدية (١.١٠):

إذا كان $N : M \longrightarrow S^2(1)$ فإن التفاضلي dN_p (dN محسوبة عند النقطة p) للراسم N هو راسم خطي linear map من المستوى المماس T_pM للسطح M إلى المستوى المماس $T_{N(p)}S^2(1)$ لكرة الوحدة.

وبما أن المستويات المماسية T_pM ، $T_{N(p)}S^2(1)$ متوازية وذلك من تعريف راسم جاوس إذاً يمكن النظر للراسم dN_p على أنه راسم خطي من T_pM إلى نفسه وبذلك يمكن تلخيص ما سبق في الآتي:

إذا كان لدينا سطح منتظم $M : R = R(u^1, u^2)$ فإن راسم جاوس $N : M \longrightarrow S^2(1)$ حيث

$$N(u^1, u^2) = \frac{R_1 \wedge R_2}{\sqrt{g}}$$

$$\therefore dN_p : T_pM \longrightarrow T_pM$$

راسم خطي

ملاحظة (٢.١٠):

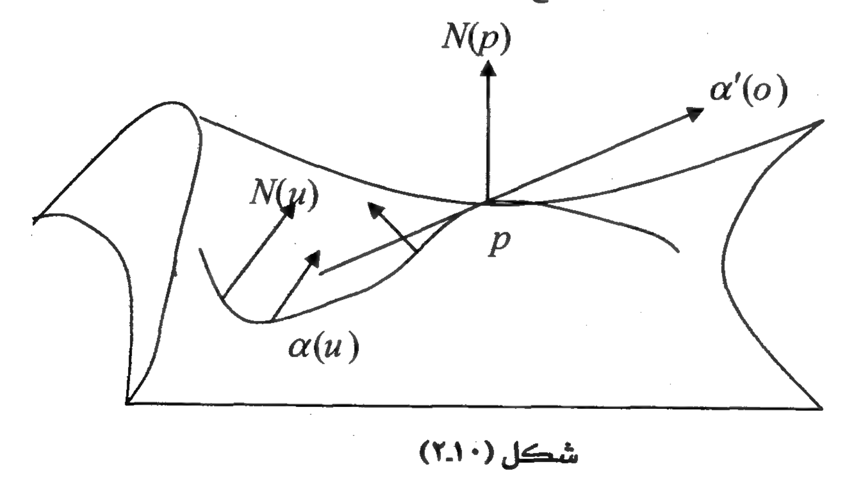
إذا كانت $N(p)$ نقطة على سطح كرة الوحدة فإن $N(M)$ (صورة السطح) هي منطقة من $S^2(1)$ أي $M'=N(M)\subset S^2(1)$ (شكل (١.١٠)).

تعريف (٢.١٠):

الراسم الخطي $dN_p : T_pM \longrightarrow T_pM$ يسمى التفاضلي لراسم جاوس أو مؤثر الشكل shape operator.

الآن نوضح **هندسياً** ماذا نعني بمؤثر الشكل:

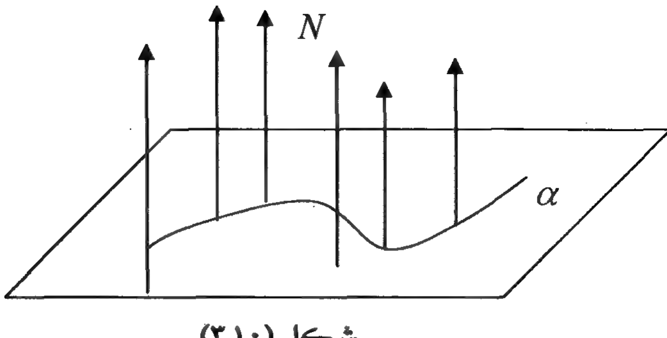
نأخذ منحنى منتظم $\alpha(u)\subset M$ عليه نقطة $p=\alpha(o)\in M$ فإن صورته $N(\alpha(u))=N(u)$ هو منحنى واقع على الكرة $S^2(1)$ وهذا معناه أننا اعتبرنا العمودي N على امتداد المنحنى $\alpha(u)$. متجه المماس $N'(o)=dN_p(\alpha'(o))$ هو متجه في T_pM ويقيس معدل تغير العمودي N عند $u=0$ عندما يتحرك على امتداد المنحنى $\alpha(u)$. أي أن dN_p يقيس مدى انحراف N بعيداً عن $N(p)$ في منطقة الجوار المباشر للنقطة p كما هو موضح في شكل (٢.١٠).



شكل (٢.١٠)

مثال (١.١٠):

بالنسبة للمستوى يكون العمودي N ثابت لجميع النقاط وبالتالي فإن $dN=0$ كما هو موضح في شكل (٣.١٠).



شكل (٣-١٠)

مثال (٣-١٠):

بالنسبة لسطح الكرة $S^2(a)$ الممثلة بارامترياً بالتمثيل الجيوجرافي $R = R(u^1, u^2)$ المعرف في الباب السابع رأينا أن حقل متجه الوحدة العمودي هو

$$N = \pm \frac{R}{a}, \ (S^2(a) \text{ نصف قطر الكرة } a)$$

حيث الإشارة +، - تشير إلى اتجاه العمودي إلى الخارج outward أو إلى الداخل intward من المركز على الترتيب.

حقل العمودي على امتداد منحنى $\alpha = \alpha(u)$ واقع على سطح الكرة يعطى من

$$N(u) = \pm \frac{R(u)}{a} = \pm \frac{R(u^1(u), u^2(u))}{a}$$

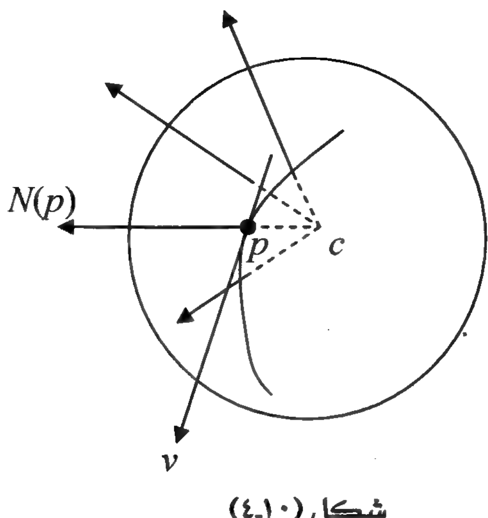
وهي دالة اتجاهية في u ولذلك نحصل على

$$dN(R'(u)) = N'(u) = \pm \frac{R'(u)}{a}$$

بمعنى أن

$$dN_p(v) = \pm \frac{v}{a} \ , v = R'(u) \in T_p(S^2(a)), p \in S^2(a))$$

وهذا معناه أن مقياس التغير ثابت ولكن يختلف في الإشارة على حسب اختيار توجيه سطح الكرة كما هو مبين في شكل (٤-١٠).



شكل (١٠-٤)

مثال (١٠-٣):

بالنسبة للأسطوانة الدائرية القائمة $x^2 + y^2 = 1$ والتي لها تمثيل بارامتري منتظم على الصورة

$$R(u^1,u^2)=(u^1,\sqrt{1-(u^1)^2},u^2)$$

من السهل الحصول على حقل متجه الوحدة العمودي N على الأسطوانة حيث

$$N=(\pm x,\pm y,0)$$

حيث العمودي متجه إلى محور الأسطوانة (إلى الداخل) أو إلى الخارج ويتوقف ذلك على الإشارة سالبة أم موجبة.

نأخذ منحنى واقع على الأسطوانة وليكن $x^2(u)+y^2(u)=1$ حيث كل من x, y دالة في البارامتر u أو في الصورة الاتجاهية

$$R(u)=R(u^1(u),u^2(u))=(u^1(u),\sqrt{1-(u^1(u))^2},u^2(u))$$

إذاً حقل متجه الوحدة العمودي على امتداد هذا المنحنى يأخذ الصورة

$$N(u)=(\pm x(u),\pm y(u),0)$$

وبالتالي فإن

$$dN\,(R'(u))=N'(u)=(\pm x'(u),\pm y'(u),0)$$

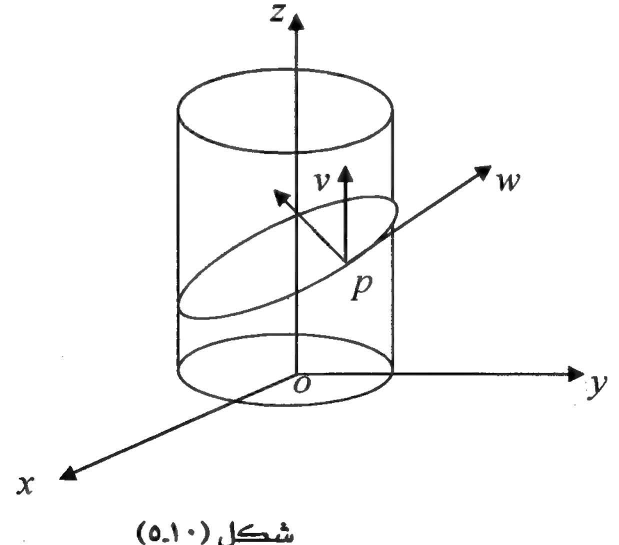
حيث $v=R'(u)$ المماس للمنحنى الواقع على الأسطوانة فمثلاً إذا كان v يوازي المحور $oz=^3x$ للأسطوانة فإن

$$dN\,(v)=0=ov$$

وإذا كان المماس w للمنحنى موازي للمستوى xy (مستوى قاعدة الأسطوانة) فإن

$$dN\,(w)=w=1.w$$

ومن تعريف القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمؤثرات الخطية (جبر خطي) يتضح أن v، w متجهات ذاتية للمؤثر الخطي dN تناظر قيم ذاتية 0، 1 في حالة v يوازي محور الأسطوانة أو w موازي لقاعدة الأسطوانة على الترتيب. كما هو موضح في شكل (٥.١٠).



شكل (٥.١٠)

ملاحظة (٣.١٠):

القيم الذاتية 0 ,1 لمؤثر الشكل dN هي الانحناءات الأساسية في اتجاه الاتجاهات الأساسية $v=(0,0,1)$، $w=(1,1,0)$ (المتجهات الذاتية للمؤثر الخطي).

وعليه يمكن تعميم المثال السابق على الصورة

$$dN(v) = -k\,v$$

حيث k انحناء أساسي، v هو اتجاه أساسي.

توجد علاقة رائعة بين مساحة السطح ومساحة صورته الكروية والانحناء الجاوسي ونبين ذلك من خلال النظرية الآتية:

نظرية (١.١٠):

الانحناء الجاوسي K عند أي نقطة p على السطح المنتظم $R = R(u^{\alpha})$ يعطى من

$$K = \frac{|N_1 \wedge N_2|}{|R_1 \wedge R_2|} = \frac{L}{g} \qquad (10.1)$$

البرهان:

بما أن السطح منتظم إذاً الصورة الكروية له لها تمثيل منتظم $N = N(u^1, u^2)$ وبالتالي فإن $N_1 \wedge N_2 \neq 0$ وكذلك $R_1 \wedge R_2 \neq 0$.

بما أن N_{α} واقع في المستوى المماس T_pM لأن N حقل متجه وحدة عمودي على المستوى المماس. إذاً N_{α} يمكن كتابتها في صورة تركيبة خطية من المتجهات R_{β} (أساس المستوى المماس) على الصورة

$$N_{\alpha} = a_{\alpha}^{\beta} R_{\beta}\ ,\ \alpha, \beta = 1,2 \qquad (10.2)$$

ولهذا

$$dN(\alpha'(u)) = N_1 u'^1 + N_2 u'^2$$

$$= (a_1^1 u'^1 + a_1^2 u'^2) R_1 + (a_2^1 u'^1 + a_2^2 u'^2) R_2$$

$$\therefore dN \begin{pmatrix} u'^1 \\ u'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'^1 \\ u'^2 \end{pmatrix}$$

إذا المصفوفة a_{α}^{β} هي مصفوفة مؤثر الشكل dN shape operator matrix

ونكون حاصل الضرب الاتجاهي (من (10.2))

$$N_1 \wedge N_2 = (a_1^1 R_1 + a_1^2 R_2) \wedge (a_2^1 R_1 + a_2^2 R_2)$$

وباستخدام خواص حاصل الضرب الاتجاهي نحصل على

$$N_1 \wedge N_2 = (a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1) R_1 \wedge R_2$$

$$= Det(a_\alpha^\beta) R_1 \wedge R_2 \qquad (10.3)$$

وبأخذ القياس للطرفين يكون لدينا

$$Det(a_\alpha^\beta) = \frac{|N_1 \wedge N_2|}{|R_1 \wedge R_2|} = \frac{|N_1 \wedge N_2|}{g} \qquad (10.4)$$

وباستخدام العلاقات التي تعطي الكميات الأساسية الثانية $L_{\alpha\beta}$ على السطح نجد أن

$$L_{11} = \langle R_{11}, N \rangle = -\langle R_1, N_1 \rangle = -\langle R_1, a_1^1 R_1 + a_1^2 R_2 \rangle$$

$$= -a_1^1 \langle R_1, R_1 \rangle - a_1^2 \langle R_1, R_2 \rangle$$

$$\therefore\ L_{11} = -a_1^1 g_{11} - a_1^2 g_{12}$$

بالمثل نحصل على

$$L_{12} = -a_1^1 g_{12} - a_1^2 g_{22} \quad , \quad L_{22} = -a_2^1 g_{12} - a_2^2 g_{22}$$

أو في صورة مختصرة

$$L_{\alpha\beta} = -a_\alpha^\gamma g_{\beta\gamma} \qquad (10.5)$$

الطرف الأيمن حاصل ضرب مصفوفتين بمعنى أن

$$(-L_{\alpha\beta}) = (a_\alpha^\gamma)(g_{\beta\gamma})$$

وبأخذ المحدد للطرفين نجد أن

$$Det(-L_{\alpha\beta}) = Det(a_\alpha^\gamma) Det(g_{\beta\gamma})$$

$$\therefore \quad L = Det(a_\alpha^\gamma).\, g$$

$$\therefore \; Det(a_\alpha^\gamma) = \frac{L}{g} = K$$

وهو المطلوب.

ملاحظة (٤.١٠):

من العلاقة $L_{\alpha\beta} = -a_\alpha^\gamma g_{\beta\gamma}$ يمكن الحصول على

$$(a_\alpha^\gamma) = (-L_{\alpha\beta})(g_{\beta\gamma})^{-1}$$

$$= (-L_{\alpha\beta})(g^{\beta\gamma}) \qquad (10.6)$$

وبالتالي المعادلات الآتية: $N_\alpha = a_\alpha^\gamma R_\gamma$ يمكن كتابتها على الصورة

$$N_\alpha = -L_{\alpha\beta}\, g^{\beta\gamma} R_\gamma \qquad (10.7)$$

أي أن المؤثر الخطي dN يتحدد من خلال المصفوفة

$$(a_\alpha^\gamma) = -(L_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma}) \qquad (10.8)$$

والتي تسمى مصفوفة مؤثر الشكل (مؤثر فينجارتن) أو مصفوفة فينجارتن Weingarten matrix أو W-operator

نظرية (٢.١٠):

الانحناء الجاوسي K والانحناء المتوسط H يعطى (من خلال مؤثر الشكل dN) بالعلاقات الآتية:

$$K = \frac{1}{2} tr(dN) \;\; ، \;\; K = Det(dN)$$

البرهان:

لحساب الانحناء الجاوسي والمتوسط K، H نتذكر أن $-k_1, -k_2$ هما القيم الذاتية (انحناءات أساسية) للمؤثر dN أي أن

$$dN(v) = -k\, v = -k\, \mathrm{I} v$$

حيث $v \neq 0$، $v \in T_p M$، I راسم الوحدة

إذاً
$$(dN + kI)v = 0, v \neq 0$$

أي أن $dN + kI$ مصفوفة غير قابلة للعكس أو شاذة وبالتالي نحصل على المعادلة الذاتية (المميزة) characteristic على الصورة

$$Det\begin{pmatrix} a_1^1 + k & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 + k \end{pmatrix} = 0$$

أو ما يكافئ

$$k^2 + k(a_1^1 + a_2^2) + a_1^1 a_2^2 - a_1^2 a_2^1 = 0 \qquad (10.9)$$

$$\therefore H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{-1}{2}(a_1^1 + a_2^2) = -\frac{1}{2}tr(a_\alpha^\beta)$$

$$= \frac{1}{2}tr(dN) \qquad (10.10)$$

$$= \frac{1}{2g}(g_{22}L_{11} - 2g_{12}L_{12} + L_{22}g_{11}),$$

$$K = Det(a_\alpha^\beta) = Det(dN) \qquad (10.11)$$

$$\therefore k^2 - 2Hk + K = 0$$

وبالتالي الجذور المميزة هي

$$k_1, k_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K} \qquad (10.12)$$

(٢.١٠) صيغ رودريجز التفاضلية: Rodrigues Formula

نفرض أن $(du^\alpha) = (du^1, du^2)$ اتجاه أساسي عند نقطة $p \in M$ على السطح المنتظم $M : R = R(u^\alpha)$ وأن k هو الانحناء الأساسي المناظر لهذا الاتجاه الأساسي.

باشتقاق العلاقة $<dR,N>=0\ ,dR\in T_pM$

نحصل على $<d^2R,N>+<dR,dN>=0$

وباستخدام تعريف الصيغة الأساسية الثانية II (من الباب السابق) نجد أن

$$\text{II}=<d^2R,N>=-<dR,dN> \qquad (10.13)$$

$$=-<R_\alpha du^\alpha,N_\beta du^\beta>=L_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$$

$$\therefore\ L_{\alpha\beta}=-<R_\alpha,N_\beta> \qquad (10.14)$$

وبالتعويض في المعادلات (9.24) في الباب السابق حيث $k_n=k$ نحصل على

$$\begin{aligned}&(<N_1,R_1>+k<R_1,R_1>)du^1\\&+(<N_2,R_1>+k<R_2,R_1>)du^2=0,\end{aligned} \qquad (10.15)$$

$$\begin{aligned}&(<N_1,R_2>+k<R_1,R_2>du^1\\&+(<N_2,R_2>+k<R_2,R_2>)du^2=0\end{aligned}$$

وباستخدام خواص حاصل الضرب الداخلي وأخذ R_1 عامل مشترك من المعادلة الأولى و R_2 من المعادلة الثانية يكون لدينا

$$<(N_1du^1+N_2du^2+k(R_1du^1+R_2du^2)),R_1>=0$$

$$<(N_1du^1+N_2du^2+k(R_1du^1+R_2du^2)),R_2>=0$$

أو ما يكافئ

$$\begin{aligned}&<(N_\alpha du^\alpha+kR_\alpha du^\alpha,R_1>=0,\\&<(N_\alpha du^\alpha+kR_\alpha du^\alpha,R_2>=0\end{aligned} \qquad (10.16)$$

أو في الشكل المختصر (عناصر تفاضلية)

$$\begin{aligned}&<dN+kdR,R_1>=0\\&<dN+kdR,R_2>=0\end{aligned} \qquad (10.17)$$

وحيث أن R_1,R_2 مستقلين فإن dR واقع في المستوى المماس وبما أن N حقل متجه وحدة فإن dN عمودي على N أي dN واقع في المستوى المماس T_pM (من تعريف راسم جاوس). وحيث أن dR يوازي dN فإن المتجه $dN + k\,dR$ يوازي المستوى المماس T_pM عند النقطة p.

إذاً العلاقة (10.17) تتحقق فقط إذا كان $dN + kdR = 0$ أو

$$dN = -kdR \qquad (10.18)$$

إذاً في اتجاه الاتجاه الأساسي يكون المتجه dN موازياً للمتجه dR ويعطى من العلاقة (10.18) أو $dN \times dR = 0$ حيث k الانحناء الأساسي في هذا الاتجاه. وبالتالي نصل إلى برهان النظرية الآتية:

نظرية (٣.١٠):

الاتجاه dR على السطح المنتظم $M : R = R(u^1,u^2)$ يكون اتجاه أساسي إذا كان المتجه $dN + kdR$ متجه صفري أو $dN \times dR = 0$ حيث $k \neq 0$ انحناء أساسي.

عكس هذه النظرية صحيح بمعنى أنه إذا كان (du^1,du^2) اتجاه على السطح M عند نقطة p عليه والتي عندها يتحقق (10.18) حيث k ثابت (عدد قياسي) فإن هذا الاتجاه يكون اتجاه أساسي و k انحناء أساسي.

ولتوضيح ذلك نقوم بضرب (10.18) قياسياً في R_1 مرة، R_2 مرة نحصل على

$$< dN + kdR, R_1 > = 0 \, , < dN + kdR, R_2 > = 0$$

والتي تكافئ المعادلات (10.17) وباستخدام (10.14) نحصل على المعادلات (9.25) التي تحدد أن k انحناء أساسي والاتجاه (du^1,du^2) اتجاه أساسي.

وبذلك يمكن صياغة النظرية الآتية:

نظرية (٤،١٠):

الاتجاه (du^1, du^2) على السطح المنتظم $M : R = R(u^1, u^2)$ يكون اتجاه أساسي و k هو الانحناء الأساسي في هذا الاتجاه عند نقطة $p \in M$ إذا كان وكان فقط

$$dN = -k\,dR \quad \text{أو} \quad dN \times dR = 0. \qquad (10.19)$$

حيث
$$dR = R_\alpha du^\alpha \quad , dN = N_\beta du^\beta$$

تعريف (٣،١٠):

الصيغ التفاضلية (10.19) تسمى صيغ رودريجز التفاضلية Differential Rodrigues Formula.

في حالة ما إذا كانت الخطوط البارامترية هي الخطوط الانحنائية أي أن R_α هي نفسها الاتجاهات الأساسية فإن صيغ رودريجز (10.19) تأخذ الصورة

$$N_\alpha = -k_\alpha R_\alpha \qquad (10.20)$$

حيث k_α هو الانحناء الأساسي في الاتجاه R_α .

ملاحظة (٥،١٠):

الصيغ (10.20) تتحقق حيث $L_{12} = g_{12} = 0$ ، $k_\alpha = \dfrac{L_{\alpha\alpha}}{g_{\alpha\alpha}}$.

تعريف (٤،١٠):

يقال أن السطح مغطى بغطاء أساسي principal patch إذا كانت الشبكة البارامترية هي نفسها الشبكة الانحنائية ($L_{12} = g_{12} = 0$).

تعريف (٥،١٠):

للسطح المنتظم M والموجه نعرف الصيغة الأساسية الثالثة 3rd fundamental form وهي عبارة عن الصيغة الأساسية الأولى للصورة الكروية (أي المرسومة بحقل المتجه العمودي) ويرمز لها بالرمز III.

من هذا التعريف يمكن كتابة III على الصورة

$$\text{III} = < dN, dN > \qquad (10.21)$$

ولا تتغير بتغير اتجاه السطح كما رأينا في الباب السابق أي أنها لا تغيرية invariant مثل الصيغة الأساسية الأولى.

نظرية (٥.١٠):

على السطح المنتظم $M : R = R(u^1, u^2)$ يتحقق

$$\text{III} - 2H\,\text{II} + K\,\text{I} = 0 \qquad (10.22)$$

حيث K، H هما الانحناء الجاوسي والمتوسط على الترتيب، I، II، III هي الصيغ الأساسية الأولى والثانية والثالثة على الترتيب.

البرهان:

دون خسارة في التعميم نختار سطح منتظم مغطى بغطاء أساسي $(L_{12} = g_{12} = 0)$ وباستخدام صيغ رودريجز (10.20) نحصل على

$$\begin{aligned} dN &= N_1 du^1 + N_2 du^2 = -k_1 R_1 du^1 - k_2 R_2 du^2 \\ &= -k_1 R_1 du^1 - k_1 R_2 du^2 - k_2 R_2 du^2 + k_1 R_2 du^2 \\ &= -k_1 (R_1 du^1 + R_2 du^2) + (k_1 - k_2) R_2 du^2 \\ &= -k_1 dR + (k_1 - k_2) R_2 du^2 \end{aligned}$$

$$\therefore dN + k_1 dR = (k_1 - k_2) R_2 du^2 \qquad (10.23)$$

بالمثل يمكن إثبات أن

$$dN + k_2 dR = (k_2 - k_1) R_1 du^1 \qquad (10.24)$$

بضرب المعادلة (10.23) في (10.24) قياسياً نحصل على

$$< dN + k_1 dR, dN + k_2 dR > = -(k_1 - k_2)^2 < R_1, R_2 > du^1 du^2$$

وحيث أن (غطاء أساسي) $g_{12}=<R_1,R_2>=0$

$$\therefore <dN+k_1dR, dN+k_2dR>=0$$

وباستخدام خواص الضرب القياسي يكون لدينا

$$<dN,dN>+k_2<dN,dR>+k_1<dR,dN>+k_1k_2<dR,dR>=0$$

$$\therefore <dN,dN>+(k_1+k_2)<dN,dR>+k_1k_2<dR,dR>=0$$

وباستخدام تعريف الصيغ الأساسية الأولى والثانية والثالثة وكذلك تعريف الانحناء الجاوسي والمتوسط نحصل على:

$$\mathrm{III}-2H\,\mathrm{II}+K\,\mathrm{I}=0$$

وهذا يكمل البرهان.

نظرية (٦.١٠): (نظرية أويلر Euler's Theorem)

الانحناء العمودي k_n عند نقطة p في اتجاه ما $v=(du^1,du^2)$ على سطح منتظم $M:R=R(u^1,u^2)$ يعطى من

$$k_n=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta \qquad (10.25)$$

حيث k_1,k_2 هما الانحناءات الأساسية عند النقطة p ، θ هي ا لزاوية بين الاتجاه v والاتجاه الأساسي المناظر للانحناء الأساسي k_1 .

البرهان:

دون خسارة في التعميم نعتبر سطح منتظم مغطى بغطاء أساسي $(g_{12}=L_{12}=0)$. إذاً الانحناء العمودي k_n عند نقطة $p\in M$ في الاتجاه (du^1,du^2) يعطى من

$$k_n=\frac{L_{11}(du^1)^2+L_{22}(du^2)^2}{g_{11}(du^1)^2+g_{22}(du^2)^2} \qquad (10.26)$$

ومن نظرية (٤.٩) في الباب السابق نجد أن: $\frac{L_{11}}{g_{11}}=k_1\ ,\ \frac{L_{22}}{g_{22}}=k_2$

وبالتعويض في (10.26) نحصل على

$$k_n = k_1 \frac{g_{11}(du^1)^2}{g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2} + k_2 \frac{g_{22}(du^2)^2}{g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2} \quad (10.27)$$

إذا كانت θ ، ϕ هي الزوايا بين الاتجاه (du^1, du^2) والاتجاهات الأساسية $(1,0)$، $(0,1)$ على الترتيب (المماسات R_2, R_1 للخطوط البارامترية). وباستخدام العلاقة (8.10) التي تعطي الزاوية بين الاتجاه (du^1, du^2) وكل من الاتجاهات $(1,0)$، $(0,1)$ نجد أن (من الباب الثامن)

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{g_{11}}\, du^1}{\sqrt{g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2}} \ ,$$

$$\cos\phi = \frac{\sqrt{g_{22}}\, du^2}{\sqrt{g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2}} \quad (10.28)$$

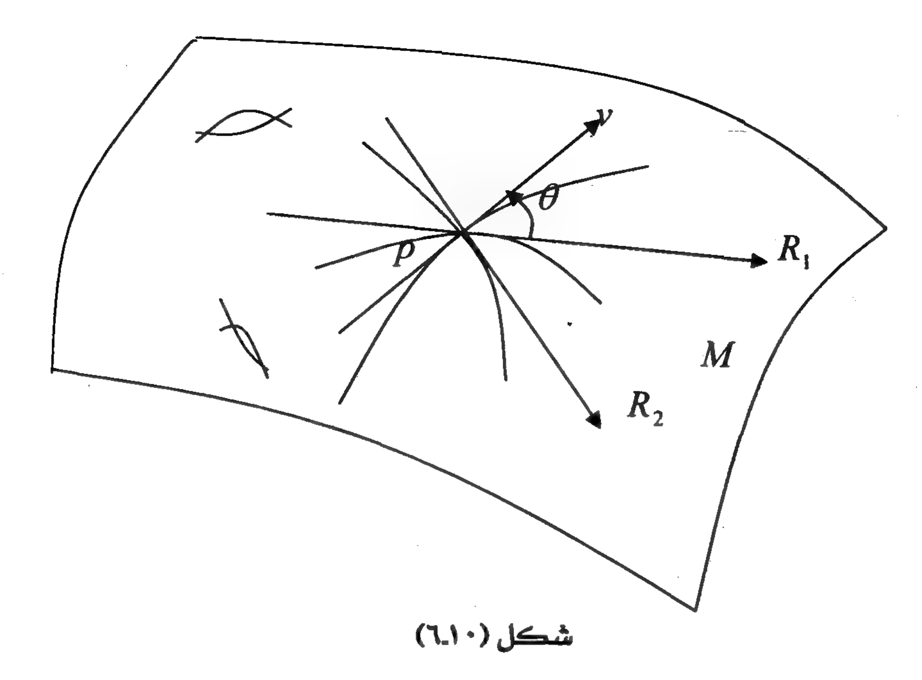
وبالتربيع والتعويض في (10.27) نحصل على

$$k_n = k_1 \cos^2\theta + k_2 \cos^2\phi \quad (10.29)$$

وحيث أن الاتجاهات الأساسية متعامدة $(L_{12} = g_{12} = 0)$ أي أن $\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$ كما هو موضح في شكل (١٠-٦). واستخدام (10.29) يكون لدينا

$$k_n(\theta) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta \quad (10.30)$$

هذه العلاقة تسمى صيغة أويلر Euler formula للانحناء العمودي عند نقطة ما على السطح في اتجاه متجه v يصنع زاوية θ مع الاتجاه الأساسي R_1 .



شكل (١٠-٦)

مثال (١٠-٤):

بين أن الانحناء المتوسط H عند نقطة p على السطح المنتظم يعطى من

$$H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} k_n(\theta)d\theta \qquad (10.31)$$

حيث θ هي الزاوية بين الاتجاه (du^{α}) عند النقطة p والاتجاه الأساسي R_1.

الحل:

باستخدام صيغة أويلر (10.30) وتكامل الطرفين بالنسبة إلى θ من 0 إلى π نحصل على

$$\int_0^{\pi} k_n d\theta = k_1 \int_0^{\pi}\cos^2\theta d\theta + k_2 \int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta$$

$$= k_1\pi + k_2\pi = \pi(k_1 + k_2)$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} k_n d\theta = \frac{1}{2}(k_1+k_2) = H$$

وهو المطلوب.

هذه النتيجة يمكن صياغتها من خلال الملاحظة الآتية:

ملاحظة (١٠.٦):

القيمة المتوسطة للانحناءات العمودية للسطح في نقطة ما على السطح تساوي الانحناء المتوسط للسطح عند تلك النقطة.

إذا حسبنا الانحناء العمودي $k_n(\theta)$ في اتجاهين متعامدين أي $k_n(\theta)$ ، $k_n(\theta+\frac{\pi}{2})$ واستخدمنا العلاقة (10.30) نحصل على

$$k_n(\theta+\frac{\pi}{2}) = k_1\sin^2\theta + k_2\cos^2\theta \qquad (10.32)$$

وبجمع (10.30)، (10.32) نحصل على (استخدم المتطابقات المثلثية)

$$k_n(\theta+\frac{\pi}{2}) + k_n(\theta) = k_1 + k_2$$

$$\therefore H = \frac{1}{2}(k_1+k_2) = \frac{1}{2}(k_n(\theta) + k_n(\theta+\frac{\pi}{2})) \quad (10.33)$$

وبالتالي يكون لدينا الملاحظة الآتية:

ملاحظة (١٠.٧):

الانحناء المتوسط يساوي نصف مجموع الانحنائين العموديين في اتجاهين متعامدين.

تعريف (١٠.٦):

السطح المنتظم الذي يحقق أن انحنائه المتوسط H منعدم يسمى سطح مستصغر minimal surface.

ومن تعريف الانحناء المتوسط والعلاقة (9.33) في الباب السابق التي تعطي H بدلالة الكميات الأساسية الأولى والثانية نجد أن السطوح المستصغرة تحقق

$$L_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta} = 0 \qquad (10.34)$$

وبالتعويض عن $g^{\alpha\beta}$ بدلالة $g_{\alpha\beta}$ من (9.31) في الباب السابق نحصل على

$$g_{22} L_{11} - 2 g_{12} L_{12} + g_{11} L_{22} = 0 \qquad (10.35)$$

وبالتعويض عن $g_{\alpha\beta}$ ، $L_{\alpha\beta}$ نحصل على

$$\begin{aligned} &< R_2, R_2 > [R_1, R_2, R_{11}] - 2 < R_1, R_2 > [R_1, R_2, R_{12}] \\ &+ < R_1, R_1 > [R_1, R_2, R_{22}] = 0 \end{aligned} \qquad (10.36)$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية حلها هو الدالة الاتجاهية $R = R(u^1, u^2)$ التي تصف سطح مستصغر في الفراغ الثلاثي.

ملاحظة (١٠.٨):

المعادلة التفاضلية (10.36) تتحقق تطابقياً بالنسبة للمستوى $(R_{\alpha\beta} = 0)$ أي أن المستوى سطح مستصغر.

مثال (١٠.٥):

أثبت أن السطح (كما هو مبين في شكل (١٠.٧)

$$R(u^1, u^2) = (u^1 \cos u^2, u^1 \sin u^2, c\, u^2), c = \text{const.} \neq 0$$

مستصغر وأوجد انحنائيه الأساسيين وكذلك خطوط الانحناء عليه.

الحل:

بالتفاضل جزئياً مرتين بالنسبة إلى u^1, u^2 نحصل على:

$$R_1 = (\cos u^2, \sin u^2, 0)\ ,\ R_2 = (-u^1 \sin u^2, u^1 \cos u^2, c)$$

$$R_{11} = (0,0,0)\ ,\ R_{12} = (-\sin u^2, \cos u^2, 0)\ ,$$

$$R_{22} = (-u^1 \cos u^2, -u^1 \sin u^2, 0)$$

الكميات الأساسية الأولى $g_{\alpha\beta}$ على السطح هي

$$g_{11}=1, g_{12}=0, g_{22}=(u^1)^2+c^2, g=(u^1)^2+c^2$$

إذاً حقل متجه الوحدة العمودي على السطح يعطى من

$$N=\frac{R_1\wedge R_2}{\sqrt{g}}=\frac{1}{\sqrt{(u^1)^2+c^2}}(c\sin u^2, c\cos u^2, u^1)$$

وبالتالي فإن الكميات الأساسية الثانية $L_{\alpha\beta}$ تعطى من $L_{\alpha\beta}=\langle R_{\alpha\beta}, N\rangle$

أو ما يكافئ

$$L_{11}=L_{22}=0,\ L_{12}=\frac{-c}{\sqrt{(u^1)^2+c^2}}$$

وبما أن $L_{12}=g_{12}=0$ نجد أن الخطوط الانحنائية منطبقة على الخطوط البارامترية.

وحيث أن $g_{12}=0$ فإن الكميات المترية المترافقة $g^{\alpha\beta}$ تحسب من

$$g^{11}=\frac{1}{g_{11}},\ g^{22}=\frac{1}{g_{22}},\ g^{12}=0$$

$$\therefore\ 2H=k_1+k_2=g^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta}=g^{11}L_{11}+g^{22}L_{22}+g^{12}L_{12}$$

$$=0+0=0$$

إذاً السطح المعطى انحنائه المتوسط منعدم تطابقياً أي أنه سطح مستصغر.

لإيجاد الانحناءات الأساسية k_1 ، k_2 نضع $k_1=k, k_2=-k$ لأن $k_1+k_2=0$

$$\therefore\ k_1k_2=-k^2=K=\frac{L}{g}=\frac{-L_{12}^2}{g}=\frac{-c^2}{((u^1)^2+c^2)^2}$$

$$\therefore\ k=\pm\frac{c}{(u^1)^2+c^2} \qquad (*)$$

إذاً الانحنائيين الأساسيين هما k ,$-k$ والانحناء الجاوسي K سالب لجميع نقاط السطح.

بالتعويض في المعادلة التفاضلية (9.34) في الباب السابق والتي تعطي خطوط الانحناء على السطح نحصل على

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ 0 & L_{12} & 0 \\ 1 & 0 & g_{22} \end{vmatrix} = 0$$

أو ما يكافئ

$$L_{12}(g_{22}(du^2)^2 - (du^1)^2) = 0, L_{12} \neq 0$$

$$\therefore g_{22}(du^2)^2 - (du^1)^2 = 0$$

وبفصل المتغيرات (g_{22} دالة في u^1 فقط) نحصل على:

$$\frac{du^1}{\sqrt{(u^1)^2 + c^2}} = \pm du^2 \qquad (**)$$

وبالتكامل (على الطرفين) يكون لدينا الحل على الصورة:

$$\sinh^{-1}\frac{u^1}{c} = \pm(u^2 + c_1) \qquad (c_1 \text{ ثابت التكامل})$$

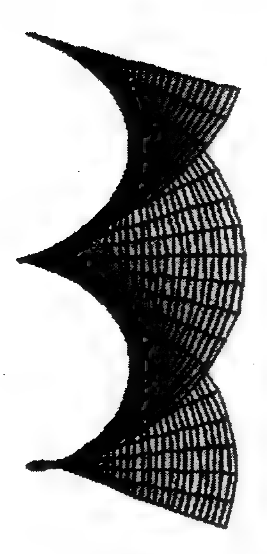
$$\therefore u^1 = c\sinh(\pm(u^1 + c_1))$$

وحيث أن الدالة sinh فردية نحصل على

$$u^1 = \pm c\sinh(u^2 + c_1)$$

وبالتعويض في المعادلة الاتجاهية على السطح المعطى نحصل على المعادلات الاتجاهية التي تصف عائلتي خطوط الانحناء على السطح حيث

$$R(u^2) = (\pm c\sinh(u^2 + c_1)\cos u^2, \pm c\sinh(u^2 + c_1)\sin u^2, c\,u^2)$$



شكل (٧.١٠): سطح الهليكويد

ملاحظة (٩.١٠):

إذا حسبنا انحناءات المنحنيات السابقة بالطرق التي تعلمتها في نظرية المنحنيات نجد أنها هي نفسها المعطاة في (*).

السطح الذي درسناه في المثال السابق يسمى سطح الهليكويد **Helicoid** أو السطح اللولبي وهو يمثل فراغ الشكل لحركة لولبية **Helical motion** أي دوران مصحوب بانتقال في اتجاه محور الدوران (شكل (٧.١٠)).

ملاحظة (١٠.١٠):

من العلاقة (**) نجد أن خطوط الانحناء لها الاتجاهات

$$(du^1, du^2) = (\pm\sqrt{(u^1)^2 + c^2}, 1)du^2$$

وبحساب الزاوية بين الاتجاهين

$$(\lambda^1, \lambda^2) = (\sqrt{(u^1)^2 + c^2}, 1)du^2,$$

$$(\mu^1, \mu^2) = (-\sqrt{(u^1)^2 + c^2}, 1)du^2$$

وذلك بالتعويض في الصيغة (8.10) نجد أن $\theta=\frac{\pi}{2}$ وهذا معناه أن الخطوط الانحنائية على سطح الهليكويد تكون شبكه من المنحنيات المتعامدة. وهذا يؤكد النظرية (٤.٩).

وبصفة عامة يمكن إثبات أن الخطوط الانحنائية على السطح تكون شبكة من المسارات المتعامدة وذلك باستخدام الصيغة (8.10)، (9.29) والنظرية (٧.٩).

(٣.١٠) الخطوط التقاربية على السطح: Asymptotic Lines

تعريف (٧.١٠):

نفرض أن p نقطة على السطح المنتظم $M:R=R(u^{\alpha})$. الاتجاه v على السطح يقال أنه اتجاه تقاربي asymptotic direction إذا كان $v\in T_pM$ ويحقق أن الانحناء العمودي في هذا الاتجاه يساوي صفراً.

تعريف (٨.١٠):

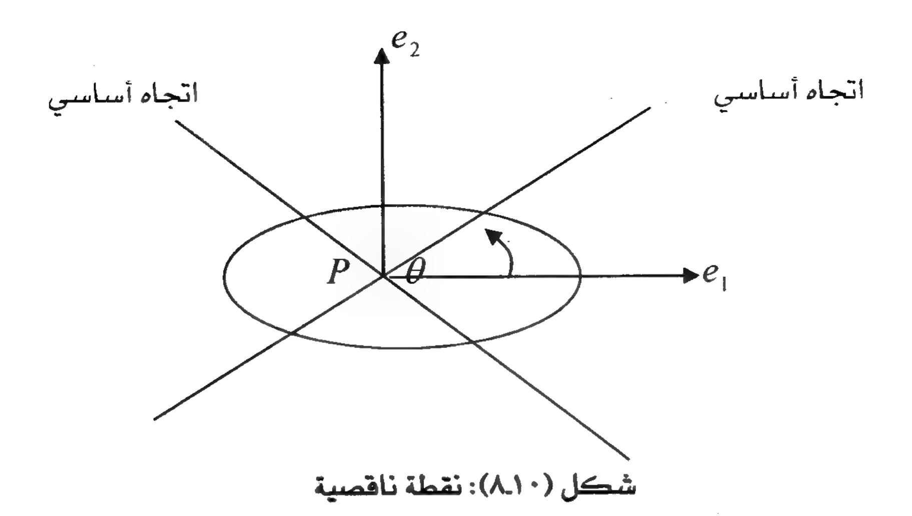
المنحنى المنتظم والمترابط $C\subset M$ على السطح M يقال أنه خط تقاربي asymptotic line إذا كان المماس له عند أي نقطة عليه اتجاه تقاربي.

ملاحظة (١٠.١٠):

من التعريف السابق يمكن ملاحظة أنه لا توجد خطوط تقاربية عند النقاط الناقصية $(k_n\neq 0)$.

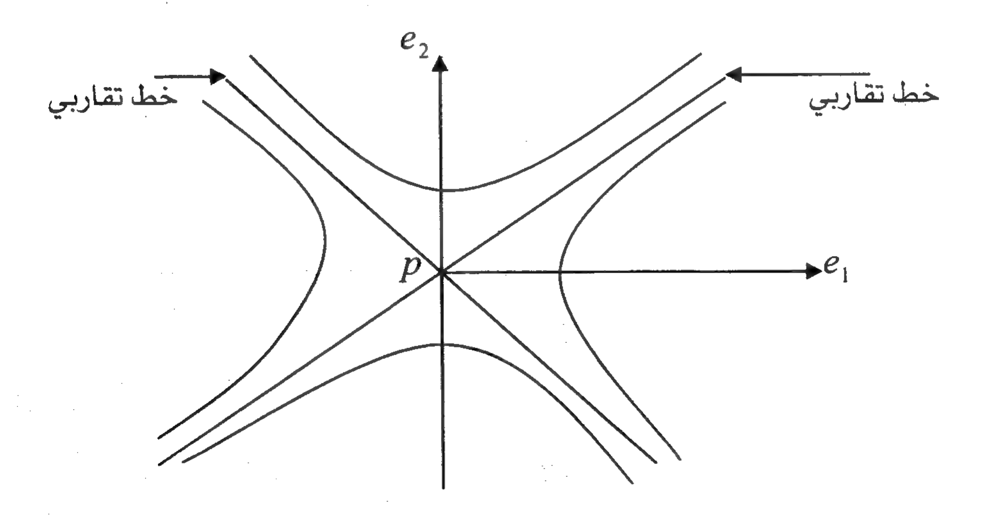
نعطي الآن **التأويل الهندسي** للاتجاهات التقاربية باستخدام مميز ديوبين Dupin indicatrix كالآتي:

(i) عند النقطة الناقصية يكون مميز ديوبين قطع ناقص (k_1,k_2 لهما نفس الإشارة) وهذا القطع يؤول إلى دائرة إذا كانت النقطة نقطة صُرّة (كروية) غير مستوية ($k_1=k_2\neq 0$). وبالتالي لا توجد اتجاهات تقاربية كما هو موضح في شكل (٨.١٠).



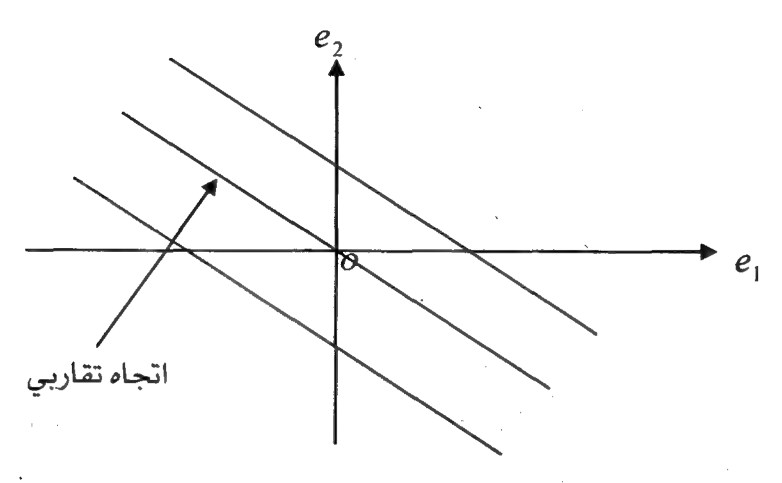
شكل (١٠-٨): نقطة ناقصية

(ii) بالنسبة للنقطة الزائدية (k_1, k_2 مختلفي الإشارة) فإن مميز ديوبين يتكون من زوج من القطاعات الزائدية لهما زوج مشترك من الخطوط التقاربيه. على امتداد الاتجاهات التقاربية يكون الانحناء العمودي منعدم وبالتالي فهي اتجاهات تقاربية على السطح (زوج من الاتجاهات التقاربية) كما هو موضح في شكل (١٠-٩).



شكل (١٠-٩): نقطة زائدية

(iii) عند النقطة المكافئة (أحد الانحناءات الأساسية منعدم) فإن مميز ديوبين يتحلل إلى زوج من الخطوط المتوازية. ويكون الاتجاه المشترك لهذه الخطوط هو اتجاه تقاربي عند هذه النقطة كما هو موضح في شكل (١٠.١٠).



شكل (١٠ـ١٠): نقطة مكافئة

ونوضح ما سبق **تحليلياً** كالآتي:

على امتداد الاتجاهات التقاربية يتحقق

$$k_n = \frac{\text{II}}{\text{I}} = \frac{L_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}{g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta} = 0$$

إذاً الاتجاهات التقاربية (الخطوط التقاربية) على السطح المنتظم تعطى من

$$\text{II} = L_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = 0$$

أو ما يكافئ تفصيلياً

$$L_{11}(du^1)^2 + 2L_{12} du^1 du^2 + L_{22}(du^2)^2 = 0 \quad (10.37)$$

هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الثانية في $\frac{du^1}{du^2}$ حيث

$$L_{11}(\frac{du^1}{du^2})^2+2L_{12}\frac{du^1}{du^2}+L_{22}=0 \qquad (10.38)$$

ويكون لها حل (اتجاه تقاربي) أو حلان (اتجاهين تقاربين) أو ليس لها حل إذا كان مميزها $\Delta=4(L_{12}^2-L_{11}L_{22})$ يساوي الصفر أو أكبر من الصفر أو أقل من الصفر على الترتيب. أي إذا كان $L=0$ أو $L<0$ أو $L>0$ وهذا يناظر النقاط المكافئة والزائدية والناقصية وهذا ما توصلنا إليه في التأويل الهندسي.

ملاحظة (١١.١٠):

عند النقاط المستوية ($L_{\alpha\beta}=0, L=0$) كل اتجاه هو اتجاه تقاربي لأن المعادلة (10.37) تتحقق تطابقياً.

نظرية (٧.١٠):

المستوى اللاصق لمنحنى تقاربي على سطح منتظم عند نقطة ما عليه هو نفسه المستوى المماس للسطح عند نفس النقطة.

البرهان:

بما أن $k_n=k<n,N>=\frac{\text{II}}{\text{I}}=0$ عند أي نقطةعلى خط تقاربي إذاً

$$<n,N>=0\ ,k\neq 0\Rightarrow \cos\theta=0\Rightarrow\ \theta=\frac{\pi}{2}$$

أي أن العمود الأساسي n للمنحنى عمودي على العمودي N على السطح أي أن $n\in T_pM$ وبالتالي فإن N يوازي b ($N=\pm b$) وعليه فإن المستوى اللاصق (يحوي T، n) لمنحنى تقاربي ينطبق على المستوى المماس للسطح عند نفس النقطة.

نظرية (٨.١٠):

الخطوط البارامترية على السطح هي خطوط تقاربية إذا كان وكان فقط $L_{11}=L_{22}=0$.

البرهان:

خط u^1 البارامتري ($du^2 = 0$) يكون خط تقاربي إذا كان الاتجاه $(1,0)$ يحقق المعادلة (10.37) وهذا يؤدي إلى $L_{11} = 0$. بالمثل بالنسبة لخط u^2 البارامتري نحصل على $L_{22} = 0$ والعكس صحيح.

ملاحظة (١٢.١٠):

الخط المستقيم $(k = 0)$ على السطح هو خط تقاربي بمعنى أنه إذا وجد خط مستقيم يقع بأكمله على سطح منتظم فإن هذا الخط هو خط تقاربي.

نظرية (٩.١٠):

عند كل نقطة على الخط التقاربي (ليست خط مستقيم) يتحقق

$$\tau^2 = -K \qquad (10.39)$$

حيث K الانحناء الجاوسي و τ الليّ للخط التقاربي عند هذه النقطة.

البرهان:

من النظرية السابقة توصلنا إلى أنه عند أي نقطة على خط تقاربي يكون $\pm N = b$ ومنها يكون

$$\pm \frac{dN}{ds} = \frac{db}{ds} = -\tau n$$

وحيث أن $\mathrm{II} = 0$ على الخط التقاربي وكذلك $\mathrm{I} = ds^2 = < dR, dR >$

والصيغة الأساسية الثالثة تعطى من

$$\mathrm{III} = < dN, dN > = < -\tau ds\, n, -\tau ds\, n >$$

$$= \tau^2 ds^2 < n, n > = \tau^2 \mathrm{I}$$

وباستخدام العلاقة (10.22) بين الصيغ I، II، III نحصل على

$$\tau^2 \mathrm{I} + 0.H + K\,\mathrm{I} = 0 \,,\, \mathrm{II} = 0$$

$$\Rightarrow (\tau^2 + K)\mathrm{I}=0 \, , \, \mathrm{I}\neq 0 \Rightarrow \tau^2 + K = 0$$

وهو المطلوب.

ملاحظة (١٣.١٠):

النظرية السابقة تسمى نظرية بلترامي ـ إينيبر Beltrami-Enneper وتتحقق فقط عند النقاط الزائدية والمكافئة لأن $\tau^2=-K$ تتحقق إذا كانت $K<0$ أو $K=0$.

مثال (٦.١٠):

أوجد الخطوط التقاربية على السطح (سطح الهليكويد)

$$R(u^1,u^2)=(u^1\cos u^2, u^1\sin u^2, c\,u^2)$$

الحل:

من المثال (٥.١٠) أوجدنا $L_{12}\neq 0, L_{11}=L_{22}=0$. إذاً الخطوط التقاربية هي الخطوط البارامترية كما هو موضح في شكل (٧.١٠).

مثال (٧.١٠):

أوجد الخطوط التقاربية على سطح السرج.

الحل:

بالنسبة لسطح السرج $R(u^1,u^2)=(u^1,u^2,(u^1)^2-(u^2)^2)$ وبالحسابات الروتينية كما في مثال (١.٩) في الباب السابق نجد أن

$$L_{11}=2, L_{22}=-2, L_{12}=0$$

إذاً معادلة الخطوط التقاربية على سطح السرج تأخذ الصورة

$$2(du^1)^2-2(du^2)^2=0$$

$$(du^1-du^2)(du^1+du^2)=0$$

إذاً عائلتي الخطوط التقاربية هما

$$du^1 - du^2 = 0 \quad \text{أو} \quad du^1 + du^2 = 0$$

وبالتكامل نحصل على

$$\therefore u^1 - u^2 = c_1 \;\; , u^1 + u^2 = c_2$$

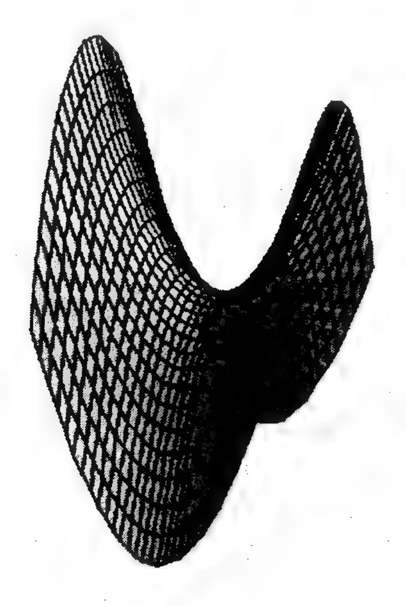
وبالتعويض في المعادلة الاتجاهية لسطح السرج نحصل على الدالة الاتجاهية التي تصف عائلتي الخطوط التقاربية كالآتي:

$$R(u^2) = (c_1 \pm u^2, u^2, (c_1 \pm u^2)^2 - (u^2)^2)$$

وإذا أخذنا نقطة الأصل $(u^1, u^2) = (0,0)$ فإن الثوابت $c_1 = c_2 = 0$ وبالتالي فإن الخطوط التقاربية عند نقطة الأصل هي

$$R(u^2) = (\pm u^2, u^2, 0)$$

وهي خطوط مستقيمة متقاطعة تمر بنقطة أصل الإحداثيات، كما هو موضح في شكل (١٠ـ١١).



شكل (١٠ـ١١): سطح السرج

مثال (٨.١٠):

أثبت أن الانحناء المتوسط يساوي صفر على سطح له الخطوط التقاربية متعامدة.

الحل:

نفرض أن لدينا سطح منتظم $M : R = R(u^{\alpha})$ حيث $L_{\alpha\beta}, L < 0$ ، $g_{\alpha\beta}$ معرفة عند أي نقطة عليه. المعادلة التفاضلية (10.38) التي تصف الخطوط التقاربية تأخذ الشكل

$$(\frac{du^1}{du^2})^2 + 2\frac{L_{12}}{L_{11}} du^1 + \frac{L_{22}}{L_{11}} = 0 \, , \, L_{11} \neq 0$$

ونفرض أن لها حلان هما $\frac{du^1}{du^2} = \gamma$ ، $\frac{du^1}{du^2} = \nu$ حيث

$$\gamma = -\frac{L_{12}}{L_{11}} + \sqrt{(\frac{L_{12}}{L_{11}})^2 - \frac{L_{22}}{L_{11}}} \, , \, \nu = -\frac{L_{12}}{L_{11}} - \sqrt{(\frac{L_{12}}{L_{11}})^2 - \frac{L_{22}}{L_{11}}} \qquad (10.40)$$

إذاً اتجاهات الخطوط التقاربية تعطى من

$$(\lambda^{\alpha}) = (du^1, du^2) = (\gamma, 1) du^2 \; ,$$
$$(\mu^{\alpha}) = (du^1, du^2) = (\nu, 1) du^2 \; .$$

الزاوية θ بين اتجاهي الخطوط التقاربية (λ^{α}) ، (μ^{α}) تعطى من (8.10) وتأخذ الصورة

$$\cos\theta = \frac{g_{11}\gamma\nu + g_{22} + (\gamma + \nu) g_{12}}{\sqrt{g_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}\lambda^{\beta}} \sqrt{g_{\alpha\beta}\mu^{\alpha}\mu^{\beta}}}$$

وإذا كانت الخطوط التقاربية متعامدة ($\cos\theta = 0$) فإن

$$g_{11}\gamma\nu + g_{22} + (\gamma + \nu) g_{12} = 0 \qquad (10.41)$$

حيث $\gamma\nu=\frac{L_{22}}{L_{11}}$ حاصل ضرب الجذرين، $\gamma+\nu=\frac{-2L_{12}}{L_{11}}$ مجموع الجذرين

وبالتعويض عنهما في (10.41) نحصل على

$$g_{11}\frac{L_{22}}{L_{11}}+g_{22}-\frac{2L_{12}}{L_{11}}g_{12}=0$$

بالضرب في L_{11} يكون لدينا

$$g_{11}L_{22}+g_{22}L_{11}-2g_{12}L_{12}=0$$

ومن تعريف الانحناء المتوسط ومن (10.35) نجد أن هذا المقدار يكافئ $H=0$ (سطح مستصغر).

مثال (١٠.٩):

أوجد الانحناءات والاتجاهات الأساسية والخطوط التقاربية على سطح إينيبر Enneper

$$R(u,v)=(u-\frac{u^3}{3}+uv^2, v-\frac{v^3}{3}+vu^2, u^2-v^2)$$

الحل:

بإتباع نفس الحسابات الروتينية نحصل على

$$g_{11}=g_{22}=(1+u^2+v^2)^2, g_{12}=0,$$

$$L_{11}=2, L_{22}=-2, L_{12}=0,$$

$$K=\frac{-4}{(1+u^2+v^2)^4},\ H=0.$$

$$\therefore\ k_1=-k_2=\frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}$$

وبما أن $L_{12}=g_{12}=0$ إذاً الخطوط البارامترية هي الخطوط الانحنائية من نظرية (٤.٩).

وبالتعويض عن $L_{\alpha\beta}$ في المعادلة التفاضلية (9.34) للخطوط التقاربية نحصل على

$$du^2 - dv^2 = 0$$

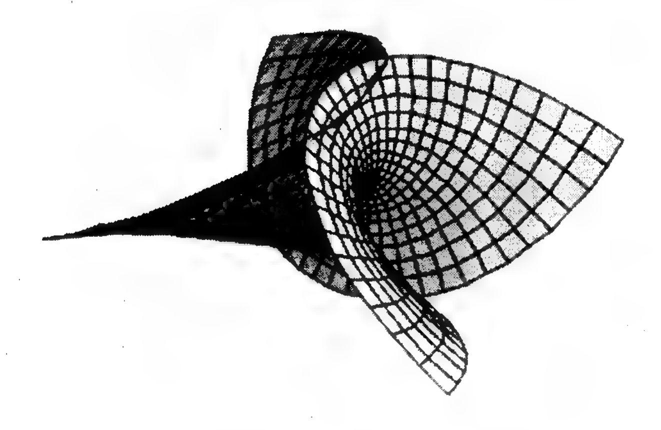
أو

$$(du - dv)(du + dv) = 0$$

وبالتالي فإن الخطوط التقاربية تعطى من تكامل $du - dv = 0, du + dv = 0$ أي تعطى من

$$u - v = \text{const.} \quad , u + v = \text{const.}$$

وهذا السطح موضح في شكل (١٠-١٢).



شكل (١٠-١٢): سطح إينيبر

(١٠-٤) عائلات المنحنيات المترافقة على السطح المنتظم:

Conjugate Families Curves of Regular Surface:

تعريف (١٠-٩):

يقال أن الاتجاه $(\delta u^1, \delta u^2)$ عند نقطة على الرقعة الإحداثية $x = x(u^\alpha)$ مترافق conjugate مع الاتجاه (du^1, du^2) إذا كان

$$\langle dx, \delta N \rangle = 0 \qquad (10.42)$$

حيث $dx = x_\alpha du^\alpha \;,\; \delta N = N_\beta \delta u^\beta$

وباستخدام (10.14) نجد أن (10.42) تأخذ الصورة

$$L_{11}du^1\delta u^1 + L_{12}(du^1\delta u^2 + du^2\delta u^1) + L_{22}du^2du^2 = 0 \quad (10.43)$$

ومن التماثل يتضح أن (du^1, du^2) مترافق مع $(\delta u^1, \delta u^2)$ وبالتالي يمكننا كتابة الشكل المختصر لشرط الترافق على الصورة

$$L_{\alpha\beta}du^\alpha \delta u^\beta = 0 \qquad (10.44)$$

ملاحظة (١٠،١٤):

الاتجاه التقاربي (du^1, du^2) مرافق لنفسه self conjugate .

لاتجاه اختياري (du^1, du^2)، المعادلة (10.43) يمكن كتابتها في شكل معادلة خطية في $(\delta u^1, \delta u^2)$ على الصورة

$$(L_{11}du^1 + L_{12}du^2)\delta u^1 + (L_{12}du^1 + L_{22}du^2)\delta u^2 = 0$$

ويكون لها حل على الصورة

$$\frac{\delta u^2}{\delta u^1} = -\frac{L_{11}du^1 + L_{12}du^2}{L_{12}du^1 + L_{22}du^2} \;,\; L = L_{11}L_{22} - L_{12}^2 \neq 0$$

وبهذا نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الآتية:

نظرية (١٠،١٠):

عند أي نقطة ناقصية أو زائدية على السطح المنتظم يكون أي اتجاه له اتجاه مرافق وحيد.

تعريف (١٠،١٠):

يقال أن عائلتين من المنحنيات على السطح هي عائلات مترافقة إذا كانت اتجاهات المماسات لها مترافقة عند كل نقطة.

مثال (١٠،١٠):

بين متى تكون عائلتي الخطوط البارامترية على السطح المنتظم مترافقة.

الحل:

اتجاه الخطوط البارامترية على السطح يعطى من:

على خط u^1 البارامتري $(du^\alpha)=(du^1,du^2)=(1,0),$

على خط u^2 البارامتري $(\delta u^\alpha)=(\delta u^1,\delta u^2)=(0,1),$

وبالتعويض في المعادلة (10.43) نحصل على $L_{12}=0$ والعكس صحيح ويقال في هذه الحالة أن السطح مغطى بغطاء مترافق.

هذا المثال يعتبر برهان لنظرية مشهورة، نعطي الآن نصها كالآتي:

نظرية (١٠.١١):

السطح المنتظم يغطى بغطاء مترافق إذا تحقق $L_{12}=0$.

وباستخدام هذه النظرية ونظرية (٤.٩) في الباب التاسع نصل إلى صياغة لنظرية هامة على الصورة:

نظرية (١٠.١٢):

الخطوط البارامترية على السطح المنتظم (الخالي من النقاط الكروية) تكون شبكة من المنحنيات المتعامدة والمترافقة إذا كان وكان فقط هي الخطوط الانحنائية ($L_{12}=g_{12}=0$)

مثال (١٠.١١):

بالنسبة لسطح المكافئ الدوراني (مثال (٩ـ١١)) أوجدنا في الباب التاسع الخطوط الانحنائية وكانت خطوط مستقيمة تمر بنقطة الأصل ودوائره مركزها نقطة الأصل (راسم المجسم) وعلى هذا السطح يتحقق $L_{12}=g_{12}=0$ وبالتالي وباستخدام النظرية (١٠ـ١٢) فإن هذه العائلات (الخطوط المستقيمة والدوائر) هي عائلات مترافقة.

تمارين (١٠)

(١) أوجد الخطوط التقاربية على سطح الأسطوانة.

(٢) أوجد الخطوط التقاربية على سطح المخروط.

(٣) هل توجد خطوط تقاربية على سطح الكرة.

(٤) أثبت أن الخطوط الانحنائية على السطح تتقاطع مع الخطوط التقاربية على نفس السطح.

(**إرشاد:** استخدم نفس الأسلوب المتبع في مثال (٨.١٠) في هذا الباب).

(٥) أوجد الخطوط الانحنائية على السطح

$$R(u^1,u^2)=(e^{u^1}\cos u^2, e^{u^1}\sin u^2, u^1)$$

(٦) أوجد الخطوط التقاربية على السطح $x^3 - x^1 \sin x^2 = 0$

(**إرشاد:** هذا السطح له تمثيل مونج البارامتري على الصورة

$$R(u^1,u^2)=(u^1,u^2,u^1\sin u^2)$$)

(٧) أوجد الخطوط التقاربية للسطح $z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$

(٨) أوجد الخطوط التقاربية لسطح الكاتينويد

$$R(u^1,u^2)=(\cosh u^1\cos u^2, \cosh u^1\sin u^2, u^1)$$

(٩) أثبت أن إحدى عائلتي الخطوط التقاربية على السطح (السطح اللولبي)

$$R(u^1,u^2)=(au^1\cos u^2, au^1\sin u^2, bu^2)$$

(تتكون من مستقيمات بينما تتكون الأخرى من منحنيات حلزونية (لولبية)).

(حيث a, b ثوابت).

(١٠) أوجد الخطوط التقاربية على المجسم الزائدي ذو الطية الواحدة (الطبقة) $x^2+y^2-z^2=1$ one-sheeted

(١١) أوجد صيغة أويلر على كل من الأسطوانة والمخروط والكرة.

(١٢) تحقق من صحة معادلات رودريجز على كل من المستوى والأسطوانة.

(١٣) تحقق من صحة معادلات رودريجز على سطح الكرة.

(١٤) أوجد صيغة أويلر على سطح مستصغر ($k_1+k_2=0$)

(١٥) أثبت أن السطح $R=(\cosh u^1 \cos u^2, \cosh u^1 \sin u^2, u^1)$
هو سطح مستصغر ($H=0$).
(**إرشاد:** السطح المستصغر Minimal يحقق $H=g^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta}=0$)

(١٦) أوجد الاتجاهات الأساسية على السطح $z=x^2+y^2$ وتحقق من صيغ رودريجز على كل اتجاه أساسي.

(١٧) أوجد الانحناءات والاتجاهات الأساسية على السطح $z=4x^2+y^2$ عند $(0,0)$ باستخدام مميز ديوبين.

(١٨) أثبت أن الاتجاهات الأساسية تنصف الزاوية بين الخطوط التقاربية.
(**إرشاد:** نفس خطوات مثال (٨.١٠) وتمرين (٢٠٨)).

(١٩) بين أن الخطوط البارامترية على السطح

$$R(u^1,u^2)=e^{(u^1-u^2)/2}\cos(\frac{u^1+u^2}{2}),e^{(u^1-u^2)/2}\sin(\frac{u^1+u^2}{2}),\frac{u^1-u^2}{2})$$

هي خطوطه التقاربية وتحقق من نظرية بلترامي - إينيبر.

(٢٠) أوجد الخطوط التقاربية على السطوح الآتية:

(i) $z = xy^2$,

(ii) $R(u,v) = (u^2 + v, u^3 + uv, u^4 + \frac{2}{3}u^2 v)$

(iii) $R(u,v) = (a(1+\cos u)\cos v, a(1+\cos u)\sin v, a\frac{\cos u}{\sin v})$

(٢١) بين أن الخطوط البارامترية على السطح

$$R(u,v) = (\frac{a}{2}(u+v), \frac{b}{2}(u-v), \frac{uv}{2})$$

هي خطوط مستقيمة وأوجد خطوط الانحناء عليه.

(**إرشاد:** في الجزء الأول من السؤال ارجع إلى الباب السابع).

(٢٢) بين الانحناء الجاوسي عند أي نقطة منتظمة على شبه الكرة pseudo sphere (الكرة الكاذبة)

$$R(u,v) = (a\sin u\cos v, a\sin u\sin v, a(\cos u + \log\tan\frac{u}{2}))$$

يساوي 1- وأوجد خطوطه التقاربية عند هذه النقطة.

(٢٣) أوجد الانحناء الجاوسي على سطح الكانويد conoid

$$R(u,v) = (u\cos v, u\sin v, \cos 2v)$$

(٢٤) بين أن الخطوط البارامترية على السطح $x(u^1,u^2) = r(u^1) + \bar{r}(u^2)$ تكون شبكة مترافقة من المنحنيات.

(**إرشاد:** احسب L_{12} على السطح حيث

$$x_1 = r', x_2 = \bar{r}', x_{11} = r'', x_{12} = x_{21} = 0, x_{22} = \bar{r}''$$

$$L_{12} = < x_{12}, N > = < 0, N > = 0$$

حيث N حقل العمودي على السطح. وبتطبيق النظرية (١١.١٠). هذا السطح يسمى سطح الانتقال Translation surface).

(٢٥) أوجد الانحناءات الأساسية وخطوط الانحناء والخطوط التقاربية على سطح الانتقال في تمرين (٢٤).

(**إرشاد:** في التمرين السابق ودون خسارة في التعميم يمكن اختيار u^1 ، u^2 بارامترات طول القوس على منحنيات الانتقال $r = r(u^1)$ ، $\bar{r} = \bar{r}(u^2)$ أي أن

$$g_{11} = < x_1, x_1 > = < r', r' > = 1, g_{22} = < x_2, x_2 > = < \bar{r}', \bar{r}' >,$$

$$g_{12} = < x_1, x_2 > = < r', \bar{r}' >, g = 1 - < r', \bar{r}' >^2$$

$$N = \frac{x_1 \wedge x_2}{\sqrt{g}} = \frac{r' \wedge \bar{r}'}{\sqrt{g}},$$

$$L_{11} = < x_{11}, N > = < r'', N > = \frac{1}{\sqrt{g}} [r'', r', \bar{r}'],$$

$$L_{22} = \frac{1}{\sqrt{g}} [\bar{r}'', r', \bar{r}']$$

وعلى الطالب تكملة باقي الحسابات).

الباب الحادي عشر

السطوح المسطرة في الفراغ الثلاثي

Ruled Surfaces

في هذا الباب سوف نتناول أحد أنواع السطوح المشهورة والتي لها تطبيقات عملية كثيرة والتي تسمى السطوح المسطرة. ونقوم بدراسة الهندسة الداخلية والخارجية لها مع التركيز على أنواع خاصة منها مثل السطوح المصاحبة لحقل الإطار المتحرك على منحنى فراغ منتظم وكذلك السطوح القابلة للفرد وغلاف عائلة المستويات.

(١.١١) الهندسة الذاتية (الداخلية) للسطوح المسطرة:

Intrinsic Geometry for Ruled Surfaces:

تعريف (١.١١):

يقال أن السطح σ سطح مسطر أولي Elementary Ruled إذا مر بكل نقطة p من نقاطه مستقيم يشترك مع هذا السطح بقطعة مستقيمة تحتوي على النقطة p وتكون نهايتا هذه القطعة غير واقعة على السطح.

تعريف (٢.١١):

السطح σ يقال أنه سطح مسطر عام General إذا كان كل نقطة من نقاطه تقع في جوار مباشر عبارة عن سطح مسطر أولي. جميع المستقيمات على السطح المسطر تسمى رواسم مستقيمة Segment Generator.

باستخدام التعريف السابق يمكن كتابة المعادلة الاتجاهية للسطح المسطر الأولي على الصورة:

$$R = a(u^1) + u^2\, \ell(u^1)\,,\ |u^2| < \varepsilon_1\,,\ |u^1 - u_o^1| < \varepsilon_2 \qquad (11.1)$$

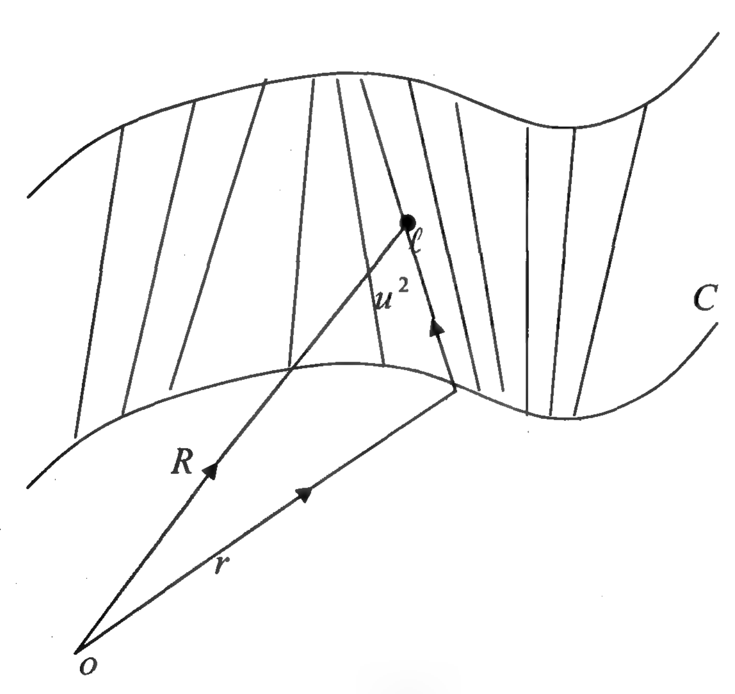
حيث ε_2 صغيرة صغر نهائي و $\ell(u_o^1) \neq 0$ والدالتين الاتجاهيتين $a(u^1)$ ، $\ell(u^1)$ معرفتين في جوار النقطة u_o^1 بالإضافة إلى الشرط

$$\ell(u_o^1)\wedge a'(u^1)\neq 0 \qquad (11.2)$$

هـذا الشرط يعني أن الاتجاه $\ell(u^1)$ لا يوازي الاتجاه $a'(u^1)$ عند النقطة u_o^1 (ذات البارامتر u_o^1).

الآن نعرف التمثيل البارامتري المنتظم للسطح المسطر العام كالآتي:

نفرض أن $C: r=r(u^1), u^1\in I\subset\mathbb{R}$ منحنى منتظم من طبقة C^m ، $\ell(u^1)$ حقل متجه غير صفري من طبقة C^m معرف على طول المنحنى C و R أي نقطة عامة على السطح المسطر وتقع على حقل المتجه $\ell(u^1)$ كما هو مبين في شكل (١١ـ١).



شكل (١١ـ١)

من شكل (١١ـ١) يتضح أن المعادلة الاتجاهية للسطح المسطر تعطى من

$$R(u^1,u^2)=r(u^1)+u^2\ell(u^1) \qquad (11.2)$$

حيث $(u^1,u^2)\in D=I\times R$

المتجه R يمثل نقطة عامة على السطح المسطر والبارامتر u^2 يمثل بارامتر عائلة الخطوط المستقيمة المولدة للسطح المسطر والتي تناظر $u^1=\text{const.}$. ونلاحظ أن الدالة R من طبقة C^m لأن كل من r ، ℓ من نفس الطبقة C^m .

واضح أن الخطوط البارامترية على السطح المسطر هي عائلة الخطوط المستقيمة $u^1=\text{const.}=c_1$ وتعطى من

$$\tilde{R}(u^2)=a+u^2c\ ,\ r(u^1)=r(c_1)=a,\ \ell(u^1)=\ell(c_1)=c$$

والعائلة الأخرى $u^2=\text{const.}=c_2$ وتعطى من

$$\hat{R}(u^1)=r(u^1)+c_2\,\ell(u^1)$$

وهي عائلة من المنحنيات توازي الدليل $C:r=r(u^1)$ وتعطي شكل السطح المسطر أي أن شكل السطح يختلف باختلاف الدليل directrix أو القاعدة base.

بالتفاضل جزئياً للدالة R بالنسبة إلى u^1,u^2 نحصل على

$$R_1=r'+u^2\ell'\ ,\ R_2=\ell\ ,\ '=\frac{d}{du^1} \qquad (11.4)$$

حقل الاتجاه العمودي على السطح يعطى من($r'\wedge\ell\neq 0$)

$$R_1\wedge R_2=(r'+u^2\ell')\wedge\ell\neq 0\ ,\ \forall(u^1,u^2) \qquad (11.5)$$

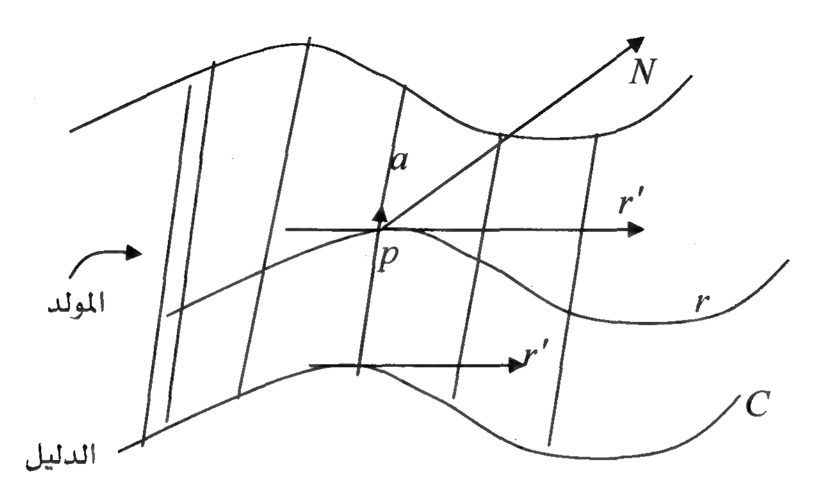
إذاً التمثيل الاتجاهي (11.2) هو تمثيل بارامتري منتظم ويسمى تمثيل في صورة مسطرة Ruled Parameterization أو تمثيل مسطر للسطح.

مثال (١.١١):

بالنسبة لسطح الأسطوانة Cylinder ($\ell=\text{const.}=a$) نجد أنها تعرف على أنها عائلة من الخطوط المستقيمة المتوازية وفي هذه الحالة يكون $\ell'=a'=0$. إذاً

$$R_1\wedge R_2=r'\wedge a\neq 0$$

لأنه لا يمكن أن يكون المولد (الراسم) a موازي للمماس r' للدليل كما هو موضح في شكل (٢.١١).



شكل (٢.١١): أسطوانة عامة

عائلة المولدات المتوازية $(u^1=\text{const.})$ ثابتة الاتجاه والعائلة الأخرى هي عائلة المنحنيات $(u^2=\text{const.})$ وتعتبر منحنيات انتقال Translation curves في اتجاه المولد a. حقل متجه الوحدة العمودي على المستوى المماس T_pM للأسطوانة العامة (المولد بالراسم a ، والمماس r' للدليل) يعطى من

$$N=\frac{r'\wedge a}{|r'\wedge a|} \qquad (11.6)$$

مثال (٢.١١):

بالنسبة لسطح المخروط Cone يكون $r(u^1)=\text{const.}=p$ أي أن المخروط هو عائلة من الخطوط المستقيمة التي تمر بنقطة ثابتة p (رأس المخروط) وفي هذه الحالة فإن المخروط يعطى من خلال الدالة الاتجاهية

$$R(u^1,u^2)=p+u^2\,\ell(u^1) \qquad (11.7)$$

ويكون
$$R_1 = u^2 \ell' \ , R_2 = \ell$$

$$\therefore R_1 \wedge R_2 = u^2 \ell' \wedge \ell \neq 0 \ , \forall u^2 \neq 0 \qquad (11.8)$$

لأن $\ell' \wedge \ell = 0$ فقط إذا كان المولد ثابت وهذا لا يحدث.

أما إذا كانت $u^2 = 0$ فإن

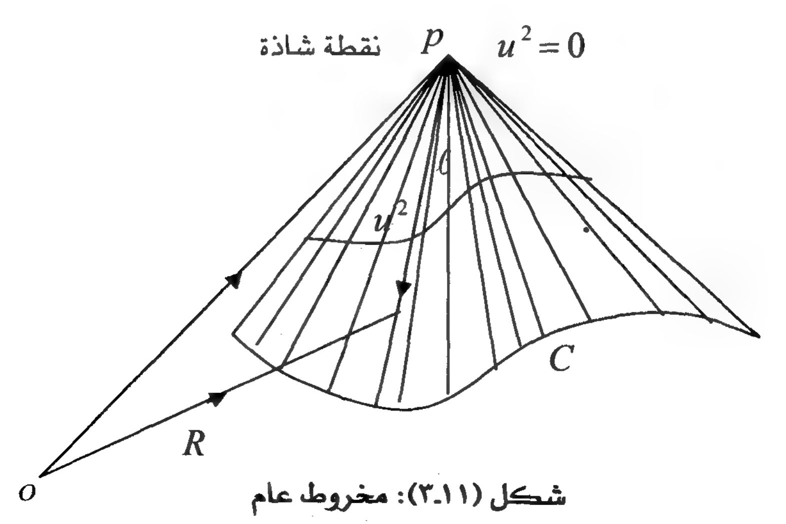
$$R_1 \wedge R_2 = 0 \ ; R(u^1, u^2) = p \quad (p \text{ رأس المخروط}) \qquad (11.9)$$

وبالتالي يمكن القول أن المخروط ليس سطح مسطر منتظم لكن المخروط بدون رأسه سطح مسطر منتظم كما أشرنا إلى ذلك في الباب السابع.

حقل متجه الوحدة العمودي على سطح المخروط (بدون الرأس) يعطى من

$$N = \frac{u^2 \ell' \wedge \ell}{u^2 |\ell \wedge \ell|} = \frac{\ell' \wedge \ell}{|\ell' \wedge \ell|} \ , u^2 \neq 0 \qquad (11.10)$$

الشبكة البارامترية على سطح المخروط عبارة عن عائلة من الخطوط المستقيمة $u^1 = \text{const.}$ وكلها تمر برأس المخروط والعائلة الثانية $u^2 = \text{const.}$ وهي عبارة عن منحنيات متوازية تتسع كلما ابتعدنا عن رأس المخروط أي بزيادة u^2 كما يتضح من شكل (١١-٣).



شكل (١١-٣): مخروط عام

مثال (٣.١١):

بين أن سطح المكافئ الزائدي (السرج) Parabolic Hyperboloid (saddle surface)

$$x^3=(x^1)^2-(x^2)^2 \qquad (11.11)$$

يتولد بعائلتين من الخطوط المستقيمة وأوجد تمثيل بارامتري لهذا السطح في صورة مسطرة بالنسبة لكل عائلة من مولداته.

الحل:

السطح المعطى هو عبارة عن سطح السرج ويمكن كتابة معادلته (صورة مونج) على الصورة

$$x^3=(x^1-x^2)(x^1+x^2)$$

ونفرض المستويات

$$\pi_1: x^1-x^2=u_o^1 \;,\; \pi_2:(x^1+x^2)u_o^1=x^3 \qquad (11.12)$$

واضح أن تقاطع المستوى $\pi_1: x^1-x^2=u_o^1$ مع السطح هو خط مستقيم يعطى بالمعادلات (11.12). أي هو خط تقاطع مستويين وبالتالي فإن عائلة الخطوط المستقيمة على السطح (11.11) هي تقاطع عائلتي المستويات

$$x^1-x^2=u^1 \;,\; x^1+x^2=u^2$$

وبحل المعادلتين نحصل على

$$x^1=\frac{1}{2}(u^1+u^2) \;,\; x^2=\frac{1}{2}(u^2-u^1)$$

وبالتعويض في (11.11) نحصل على $x^3=2u^1u^2$

وبالتالي يصبح التمثيل البارامتري للسطح على الصورة

$$R=(\frac{1}{2}(u^1+u^2),\frac{1}{2}(u^2-u^1),2u^1u^2) \qquad (11.13)$$

مـن (11.13) يتـضح أن الخطـوط البارامتريـة $u^1=\text{const.}$ هـي خطـوط مـستقيمة وكذلك الخطوط البارامترية $u^2=\text{const.}$ هي خطوط مستقيمة.
إذاً السطح يتولد بعائلتين من الخطوط المستقيمة هي على الترتيب

$$\hat{R}(u^2)=(\frac{1}{2}u^2+\hat{c},\frac{1}{2}u^2-\hat{c},4\hat{c}u^2)\ ,u^1=2\hat{c}$$

$$\tilde{R}(u^1)=(\frac{1}{2}u^1+\tilde{c},-\frac{1}{2}u^1+\tilde{c},4\tilde{c}u^1),u^2=2\tilde{c}$$

التمثيل البارامتري (11.13) يمكن كتابته على الصورة

$$R(u^1,u^2)=(\frac{u^1}{2},-\frac{u^1}{2},0)+u^2(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2u^1)\qquad(11.14)$$

أو في الصورة الاتجاهية

$$M_1: R(u^1,u^2)=r(u^1)+u^2\,\ell(u^1)$$

حيث الدليل $r=r(u^1)$ والمولد $\ell(u^1)$ يعطى من على الترتيب:

$$r(u^1)=(\frac{u^1}{2},-\frac{u^1}{2},0)\ ,\ \ell(u^1)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2u^1)$$

التمثيل البارامتري (11.14) يعطي تمثيل مسطر للسطح المسطر وليكن M_1 حيث $r=r(u^1)$ هو الدليل (خط مستقيم) والمولد هو خط مستقيم $\ell=\ell(u^1)$.
بالمثل يمكن كتابة (11.13) على الصورة

$$M_2: R(u^1,u^2)=(\frac{u^2}{2},\frac{u^2}{2},0)+u^1(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2u^2)\qquad(11.15)$$

وهـو تمثيـل بـارامتري للـسطح المـسطر ولـيكن M_2 في صـورة مـسطرة حيـث الدليل $r=r(u^1)$ والمولد $\ell=\ell(u^1)$ يعطى من على الترتيب:

$$r(u^1)=(\frac{u^2}{2},\frac{u^2}{2},0)\quad,\quad \ell(u^1)=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2u^2)$$

نختار أحد التمثيلات البارامترية وليكن (11.15) وتحسب المشتقات R_1, R_2 وهي على الصورة

$$R_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2u^2)\ ,\ R_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2u^1)$$

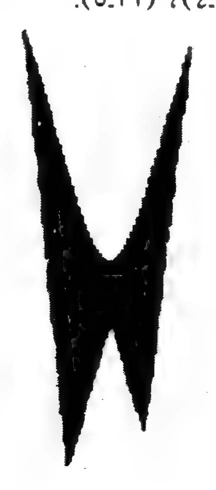
$$\therefore R_1 \wedge R_2 = (-u^1 - u^2, u^2 - u^1, \frac{1}{2}),$$

$$|R_1 \wedge R_2| = (2(u^1)^2 + 2(u^2)^2 + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} \neq 0$$

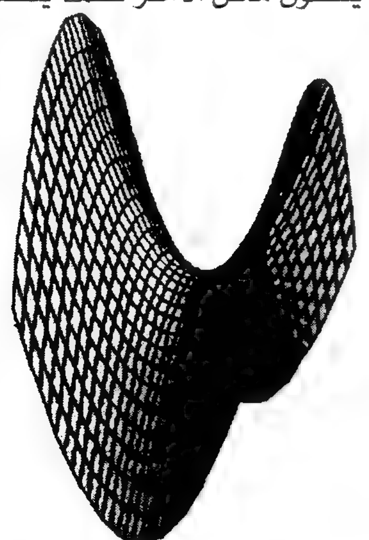
إذاً التمثيلات البارامترية (11.13)، (11.15) كلها تمثيلات بارامترية منتظمة لسطح السرج.

ملاحظة (١.١١):

واضح أن كل من الدليل والمولد لسطح السرج خطوط مستقيمة وبالتالي فإن عائلتي الخطوط البارامترية هي عائلات من الخطوط المستقيمة وهذا يفسر معنى أن سطح السرج مسطر مرتين Doubly ruled بمعنى أن عائلة المولدات تتبادل مع عائلة المنحنيات (الأدلة) أي أن كل منهما يصلح أن يكون محل الآخر كما يتضح من شكل (٤.١١)، (٥.١١).



شكل (٤.١١) : سطح السرج M_1



شكل (٥.١١): سطح السرج M_2

تعريف (٣.١١):

سطح الكانويد القائم Right conoid هو سطح مسطر مولد بعائلة من الخطوط المستقيمة التي توازي مستوى ما π وتمر خلال خط L عمودي على المستوى π وفي هذه الحالة فإن الخط L يسمى محور السطح.

مثال (٤.١١):

استنتج التمثيل البارامتري لسطح الكانويد القائم.

الحل:

نأخذ المحور L منطبق مع محور ox^3 والمولد يقع في مستوى π يوازي المستوى ox^1x^2. ونفرض أن المولد ℓ (متجه وحدة) يصنع زاوية θ مع اتجاه e_1. إذاً

$$\ell = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2, \theta = \theta(u^1) \qquad (11.16)$$

حيث θ دالة في u^1 وعليه فإن التمثيل البارامتري يعطى من

$$R(u^1,u^2) = r(u^1) + u^2\,\ell(u^1), r(u^1) = u^1 e_3 \,. \quad (11.17)$$

مثال (٥.١١):

بين أن التمثيل البارامتري (11.17) تمثيل بارامتري منتظم

الحل:

بحساب المشتقات التفاضلية الجزئية الاتجاهية للدالة R نحصل على

$$R_1 = (-u^2\theta'\sin\theta, u^2\theta'\cos\theta, 1)\,,\ ' = \frac{d}{du^1}$$

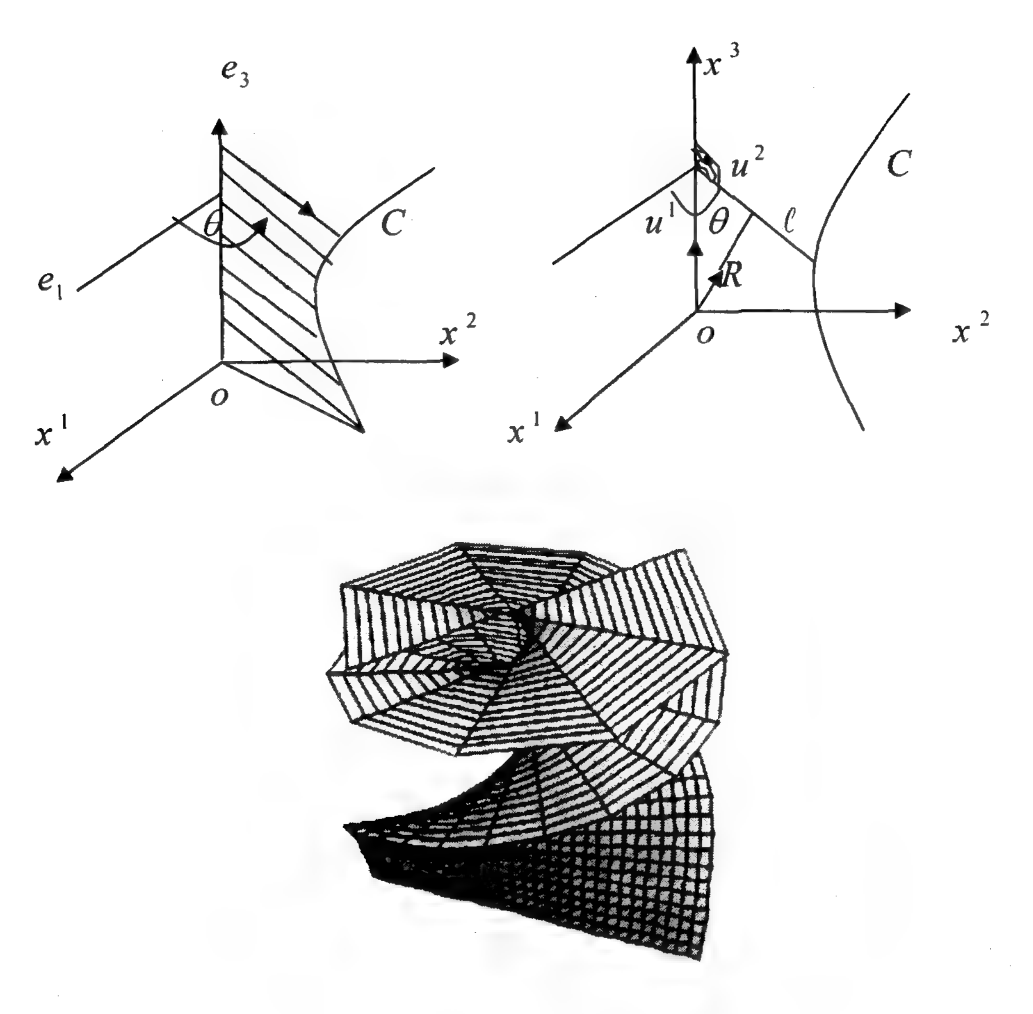
$$R_2 = (\cos\theta, \sin\theta, 0)\,.$$

اتجاه العمودي على السطح يعطى من

$$R_1 \wedge R_2 = (-\sin\theta, \cos\theta, -u^2\theta')$$

$$\therefore\ |R_1 \wedge R_2| = \sqrt{g} = 1 + (u^2\theta')^2 \neq 0\,,\ \forall (u^1,u^2) \quad (11.18)$$

واضح أن التمثيل البارامتري (11.17) لسطح الكانويد القائم منتظم بشرط أن θ دالة منتظمة في البارامتر u^1 . والشكل التخطيطي للسطح موضح في شكل (٦.١١).



شكل (٦.١١): سطح الكانويد

مثال (٦.١١):

بين أن المستوى المماس لسطح الأسطوانة ثابت لجميع نقاط أي راسم من رواسمها.

الحل:

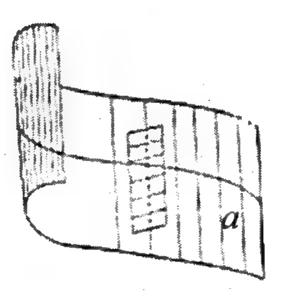
من التمثيل البارامتري لسطح الأسطوانة العامة يكون لدينا

$$R = r(u^1)+u^2 \ell \;, \; \ell=a=\text{const.}\;, \quad r' \wedge a \neq 0 \quad , '=\frac{d}{du^1}$$

ونجد أن حقل متجه الوحدة العمودي N على سطح الأسطوانة يعطى من

$$N = \frac{r' \wedge a}{|r' \wedge a|} = N(u^1) \qquad (11.19)$$

أي أن N لا تعتمد على البارامتر u^2 على طول اتجاه راسم الاسطوانة a . أي أن المستوى المماس ثابت لا يتغير بتغير نقاط المولد وبالتالي نقول أن المستوى المماس ثابت على امتداد أي مولد من مولدات الأسطوانة.



شكل (١١-٧)

تعريف (١١-٤):

إذا كان المستوى المماس للسطح المسطر ثابت على امتداد أي راسم من رواسمه فإنه يسمى سطح قابل للفرد Developable أو ما يكافئ أن العمود ثابت على امتداد أي مولد مثل سطح الأسطوانة.

تعريف (١١-٥):

السطح المسطر المولد بالماسات لمنحنى منتظم يسمى السطح المماسي Tangential surface.

مثال (٧.١١):

أثبت أن السطح المماسي لمنحنى فراغ هو سطح مفرود.

الحل:

دون خسارة في التعميم (لسهولة الحسابات) نأخذ البارامتر u^1 (بارامتر الدليل) هو بارامتر طول القوس. ونفرض أن الدليل خالي تماماً من نقاط الانقلاب (الانحناء k لا يساوي صفر لجميع نقاط الدليل). ونفرض أن $r=r(u^1)$ هو التمثيل الطبيعي للدليل ويكون المماس $T=r'(u^1)$ هو مولد السطح المماسي أي أن التمثيل البارامتري للسطح المماسي يعطى من

$$R(u^1,u^2)=r(u^1)+u^2T$$

وبالحسابات التقليدية واستخدام صيغ فرينيه التفاضلية نجد أن

$$R_1=T+u^2T'=T+u^2k\,n\;,R_2=T\;,'=\frac{d}{du^1}\qquad(11.20)$$

$$g_{11}=1+(u^2k)^2,g_{12}=1\,,g_{22}=1$$

$$\therefore R_1\wedge R_2=u^2k\,n\wedge T=-u^2k\,b$$

$$\sqrt{g}=|R_1\wedge R_2|=u^2k\neq 0,\;\forall u^2\neq 0,k>0\qquad(11.20)'$$

حيث (T, n, b) هو حقل إطار فرينيه لمنحنى الدليل (أنظر الباب الرابع في المنحنيات).

من العلاقة $(11.20)'$ يتضح أن السطح المماسي غير منتظم على امتداد منحنى الدليل ($u^2=0$) ولذلك نأخذ أجزاء السطح التي تناظر $u^2>0$ ، $u^2<0$ وحيث

$$\sqrt{g}>0\;,\;\forall u^2>0,k>0\;,$$

$$\sqrt{g}>0\;,\;\forall u^2<0,k<0.$$

ولذلك نجد أن حقل متجه الوحدة العمودي N على السطح يعطى من

$$N = \frac{R_1 \wedge R_2}{\sqrt{g}} = \frac{-u^2 k b}{u^2 k} = -b(u^1), u^2 > 0 \qquad (11.21)$$

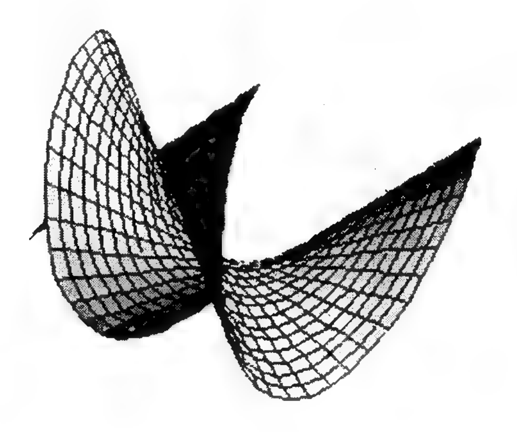
بينما لجزء السطح $u^2 < 0$ يكون

$$N = b(u^1) \ , u^2 < 0$$

وعليه فإن العمودي N على السطح دائماً يعتمد على u^1 (بارامتر الدليل) أي أنه ثابت على امتداد المولد ومن تعريف السطح القابل للفرد نجد أن السطح المماسي قابل للفرد.

ملاحظة (١١ـ٢):

العمودي على السطح المسطر المولد بالمماسات لمنحنى فراغ منتظم دائماً يكون على امتداد العمود الثانوي $\pm b(u^1)$ لمنحنى الدليل ويتضح ذلك من شكل (١١ـ٨).



شكل (١١ـ٨) : السطح المماسي

ملاحظة (١١ـ٣):

النقاط الشاذة للسطح المماسي تقع على امتداد الدليل($u^2 = 0$).

(١١ـ٢) الهندسة الخارجية للسطوح المسطرة:

Extrinsic Geometry of Ruled Surfaces:

نعتبر سطح مسطر عام ودون خسارة في التعميم (لسهولة الحسابات) نأخذ اتجاه المولد متجه وحدة $(\langle e, e' \rangle = 0) e(u^1)$ ومنحنى الدليل $C : r = r(u^1)$

ممثل تمثيل بارامتري طبيعي منتظم أي أن u^1 هو بارامتر طول القوس. إذاً السطح المسطر يعطى من التمثيل البارامتري المنتظم الآتي:

$$R(u^1,u^2)=r(u^1)+u^2 e(u^1)$$

وبحساب المشتقات التفاضلية الجزئية حتى الرتبة الثانية نحصل على

$$R_1=T+u^2e',\ R_2=e$$

$$R_{11}=k\,n+u^2e'',\ R_{22}=0, R_{12}=e'$$

ومنها نحصل على الكميات الأساسية الأولى

$$g_{\alpha\beta}=<R_\alpha,R_\beta>,\alpha,\beta=1,2$$

$$\therefore g_{11}=1+(u^2)^2<e',e'>+2u^2<T,e'>,$$
$$g_{12}=<T,e>,g_{22}=1 \qquad (11.22)$$

$$\therefore g=1+(u^2)^2<e',e'>+2u^2<T,e'>-<T,e>^2,$$

$$R_1\wedge R_2=T\wedge e+u^2e'\wedge e,$$

$$N=\frac{T\wedge e+u^2e'\wedge e}{\sqrt{g}} \qquad (11.23)$$

واضح أن

$$L_{22}=<N,R_{22}>=0$$

$$\therefore L=L_{11}L_{22}-L_{12}^2=-L_{12}^2 \quad =-<N,R_{12}>^2$$

$$=-\frac{<T\wedge e+u^2e'\wedge e,e'>^2}{g}$$

$$=-\frac{1}{g}(<T\wedge e,e'>+u^2<e'\wedge e,e'>)^2$$

$$=-\frac{1}{g}([T,e,e']+u^2[e',e,e'])^2, \quad \text{zero}$$ (تكرار صفين في محدد)

$$\therefore\ L=-\frac{1}{g}[T,e,e']^2<0 \qquad (11.24)$$

أي أن السطح المسطر مكون من نقاط زائدية والانحناء الجاوسي K يعطى من

$$K=\frac{L}{g}=-\frac{[T,e,e']^2}{g^2}<0 \qquad (11.25)$$

أي أن السطح المسطر انحنائه الجاوسي سالب لجميع نقاطه.

مثال (١١-٨):

أثبت أن السطح المماسي مكون من نقاط مكافئة.

الحل:

من المشتقات الجزئية (11.20) نجد أن

$$R_{11}=-k^2u^2T+(u^2k'+k)n+u^2k\tau b, '=\frac{d}{du^1} \qquad (11.26)$$

$$R_{12}=kn,\ R_{22}=0, u^2>0$$

إذاً الكميات الأساسية الثانية على السطح المماسي هي

$$L_{\alpha\beta}=<R_{\alpha\beta},N>, N=-b,$$

$$\therefore L_{11}=<R_{11},N>$$

$$=<-k^2u^2T+(u^2k'+k)n+u^2k\tau b,-b>, L_{12}=<kn,-b>=0$$

$$\therefore L_{11}=-u^2k\tau,\ L_{22}=0, L_{12}=0 \qquad (11.27)$$

$$\therefore\ L=Det(L_{\alpha\beta})=0,\ \forall(u^1,u^2)$$

وهذا يثبت أن كل نقاط السطح نقاط مكافئة.

ملاحظة (١١-٤):

في المثال السابق إذا كان منحنى الدليل منحنى مستوي $(\tau = 0)$ فإن $L_{\alpha\beta} = 0$ تطابقياً أي أن السطح الماسي كل نقاطه نقاط مستوية وبالتالي فإن السطح الماسي في هذه الحالة هو المستوى اللاصق الواقع فيه المنحنى.

مثال (١١-٩):

أوجد خطوط الانحناء والانحناءات الأساسية للسطح الماسي.

الحل:

من العلاقات (11.21)، (11.27) والتعويض في المعادلة التفاضلية (9.34) التي تعطي خطوط الانحناء نجد أن

$$Det\begin{bmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ 1+(ku^2)^2 & 1 & 1 \\ -u^2k\,\tau & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

والتي تأخذ ا لصورة التالية

$$u^2k\,\tau(du^2 + du^1)du^1 = 0$$

وحيث أن المنحنى (الدليل) فراغي منتظم $(u^2 \neq 0, k \neq 0, \tau \neq 0)$

$$\therefore \qquad (du^2 + du^1)du^1$$

وهي معادلة تفاضلية في u^1, u^2 ويمكن تحليلها إلى

$$du^1 = 0 \qquad \text{or} \qquad du^1 + du^2 = 0$$

وبالتكامل نحصل على

$$u^1 = \text{const.} = c_1 \ \ \text{or} \ \ u^1 + u^2 = \text{const.} = c_2$$

إذاً خطوط الانحناء على السطح الماسي هي عبارة عن عائلة منحنيات $u^1 = c_1$ (المولدات) وعائلة المنحنيات $u^1 + u^2 = c_2$ أو $u^2 = c_2 - u^1$ وعليه فإن هذه العائلة

تعرف من التمثيل البارامتري للسطح بوضع $u^2 = c_2 - u^1$ أي هي عائلة تعتمد على بارامتر c_2 وتمثل من خلال الدالة الاتجاهية

$$\tilde{R}(u^1) = r(u^1) + (c_2 - u^1)T(u^1)\,,\ (c_2 \neq u^1) \qquad (11.28)$$

$$\therefore\ \frac{d\tilde{R}}{du^1} = (c_2 - u^1)k\,n\ ,\ \left|\frac{d\tilde{R}}{du^1}\right| = |c_2 - u^1|k > 0$$

أي أن هذه العائلة من المنحنيات الانحنائية مكون من منحنيات منتظمة.

الانحناءات الأساسية k_1, k_2 تعطى من

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{11}L_{11} \quad \text{(الانحناء المتوسط)}$$

$$K = k_1 k_2 = \frac{L}{g} = 0 \qquad \text{(الانحناء الجاوسي)}$$

وحيث أن (من (11.27)، (11.20))

$$g^{11} = \frac{g_{12}}{g} = \frac{1}{(ku^2)^2}\,,\ L_{11} = -u^2 k\,\tau$$

$$\therefore\ k_1 + k_2 = \frac{-u^2 k\,\tau}{(u^2 k)^2} = -\frac{\tau}{ku^2}$$

أي أن الانحناءات الأساسية على السطح المماسي تحقق

$$k_1 k_2 = 0\,,\ k_1 + k_2 = -\frac{\tau}{ku^2}$$

ويجب أن يكون $k_1 = 0$ (مثلاً) وهو الانحناء الأساسي المناظر لعائلة المولدات، $k_2 = -\dfrac{\tau}{ku^2}$ وهو الانحناء الأساسي المناظر لعائلة خطوط الانحناء الأخرى (11.28).

وإذا كان المنحنى المولد مستوٍ $(\tau = 0)$ فإن $k_2 = 0$ ، أي أن السطح المسطر في هذه الحالة يكون مستصغر حيث $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0$ وكل نقاطه نقاط مستوية حيث $L_{\alpha\beta} = 0$ تطابقياً وعليه فإن السطح المسطر الذي يحقق $K = 0$ ، $H = 0$ يكون مستوى.

مثال (١١،١٠):

بين أن السطح الماسي لمنحنى فراغ منتظم يغطى بعائلة واحدة من الخطوط التقاربية منطبقة على مولداته.

الحل:

من المثال السابق نجد أن الخطوط التقاربية للسطح الماسي هي

$$\mathrm{II} = L_{\alpha\beta}\, du^{\alpha}\, du^{\beta} = L_{11}(du^1)^2 = 0 \ , \ L_{11} \neq 0$$

إذاً $du^1 = 0$ هي المعادلة التفاضلية للخطوط التقاربية وهي عائلة المولدات الوحيدة $(u^1 = \text{const.})$.

تعريف (١١،٦):

المنحنى $\bar{r}(u^1)$ الواقع على السطح المسطر $R(u^1, u^2) = r(u^1) + u^2 \ell(u^1)$ والذي يحقق $<\bar{r}', \ell'> = 0$ يسمى خط مضيق Line of Striction ونقاط هذا الخط تسمى نقاط مركزية Central Points للسطح المسطر.

ملاحظة (١١،٥):

خط المضيق على السطح المسطر لا يعتمد على اختيار الدليل.

نحاول الآن استنتاج التمثيل البارامتري لخط المضيق باعتباره منحنى $u^2 = \sigma(u^1)$ واقع على السطح المسطر بمعنى أن

$$\bar{r}(u^1) = r(u^1) + \sigma(u^1)\ell(u^1) \ , u^1 \in \mathrm{I} \qquad (11.29)$$

حيث $\sigma(u^1)$ دالة حقيقية اختيارية.

ودون خسارة في التعميم نختار المولد متجه وحدة بمعنى أن

$$<\ell,\ell'>=0 \qquad (11.30)$$

بالإضافة إلى أن (من تعريف (١١ـ٦))

$$<\bar{r}',\ell'>=0\ ,\bar{r}'=r'+\sigma'\ell+\sigma\ell' \qquad (11.31)$$

من العلاقات (11.29)، (11.30)، (11.31) يمكن استنتاج الدالة $u^2=\sigma(u^1)$ حيث

$$0=<\bar{r}',\ell'>=<r',\ell'>+\sigma(u^1)<\ell',\ell'>$$

إذاً

$$\sigma(u^1)=-\frac{<r',\ell'>}{<\ell',\ell'>} \qquad (11.32)$$

وبالتعويض في (11.29) نحصل على التمثيل البارامتري لخط المضيق على الصورة

$$\bar{r}(u^1)=r(u^1)-\frac{<r',\ell'>}{<\ell',\ell'>}\ell \qquad (11.33)$$

أو في الصورة المختصرة

$$\bar{r}(u^1)=r(u^1)+\sigma(u^1)\ell,\sigma(u^1)=-\frac{<r',\ell'>}{<\ell',\ell'>} \qquad (11.34)$$

الآن نعتبر سطح مسطر دليله خط المضيق وتمثيله البارامتري له الصورة

$$R(u^1,u^2)=\bar{r}(u^1)+u^2\ell(u^1) \qquad (11.35)$$

من (11.35) نحصل على

$$R_1=\bar{r}'+u^2\ell'\ ,R_2=\ell \quad ; \quad R_1\wedge R_2=\bar{r}'\wedge\ell+u^2\ell'\wedge\ell$$

وبما أن

$$<\ell',\ell>=0\ ,<\bar{r}',\ell'>=0 \qquad (11.36)$$

نستنتج أن (تحليل المتجهات حيث $\bar{r}'\wedge\ell=\lambda\ell'+\mu\ell$ ، $\mu=0$ في هذه الحالة)

$$\vec{r}' \wedge \ell = \lambda(u^1)\,\ell' \qquad (11.37)$$

حيث $\lambda(u^1)$ دالة اختيارية في البارامتر u^1 وبضرب طرفي العلاقة (11.37) قياسياً في ℓ' نحصل على

$$\lambda(u^1) = \frac{[\vec{r}', \ell, \ell']}{<\ell', \ell'>} \qquad (11.38)$$

لتعيين النقاط الشاذة على السطح المسطر (11.35) نقوم بحساب المميز المتري g حيث

$$g = |R_1 \wedge R_2|^2 = |\lambda\,\ell' + u^2 \ell' \wedge \ell|^2$$

$$= \lambda^2 |\ell'|^2 + (u^2)^2 |\ell' \wedge \ell|^2 + 2\lambda u^2 <\ell', \ell' \wedge \ell>$$

zero

$$= \lambda^2 |\ell'|^2 + (u^2)^2 |\ell'|^2 |\ell|^2 \sin^2\theta + 2\lambda u^2 [\ell', \ell', \ell]$$

وحيث أن ℓ ، ℓ' متعامدان $(\sin\theta = 1)$ ، ℓ متجه وحدة ($|\ell| = 1$)

$$\therefore g = |R_1 \wedge R_2|^2 = (\lambda^2 + (u^2)^2)|\ell'|^2 \qquad (11.39)$$

من هذه العلاقة يتضح أن النقاط الشاذة $(g = 0)$ تحدث عندما $u^2 = 0$ (على امتداد خط المضيق والذي ينطبق على الدليل) وهذا يحدث إذا كان وفقط إذا كان $\lambda(u^1) = 0$.

تعريف (٧.١١):

الدالة $\lambda = \lambda(u^1)$ المعرفة بالعلاقة (11.38) تسمى بارامتر التوزيع distribution parameter.

الانحناء الجاوسي K للسطح المسطر (11.35) يعطى من (11.25) حيث

$$g = (\lambda^2 + (u^2)^2)|\ell'|^2$$

$$L = -\frac{[\vec{r}', \ell, \ell']^2}{g}$$

$$\therefore K = \frac{L}{g} = \frac{-[\vec{r}', \ell, \ell']}{(\lambda^2 + (u^2)^2)^2 |\ell'|}$$

ومن (11.38) نحصل على

$$K=-\frac{\lambda^2(u^1)}{(\lambda^2+(u^2)^2)^2} \qquad (11.40)$$

وهذا معناه عند النقاط المنتظمة يكون الانحناء الجاوسي سالب أو يساوي صفر ويكون $K=0$ فقط على امتداد المولدات التي تلتقي مع خط المضيق عند نقاطه الشاذة. من المعادلة (11.40) يتضح أنه إذا كانت $\lambda\neq0$ فإن $|K(u^2)|$ دالة متصلة على المولد وبالتالي فإن النقطة المركزية central point يمكن وصفها على أنها النقطة التي عندها الدالة $|K(u^2)|$ تأخذ قيمة عظمى.

ملاحظة (١١.٦):

لاحظ أن K تأخذ نفس القيم عند النقاط على المولد والمتماثلة بالنسبة للنقطة المركزية.

حقل متجه العمودي $N(u^1,u^2)$ عند النقاط المنتظمة على السطح (11.35) يعطى من

$$N(u^1,u^2)=\frac{R_1\wedge R_2}{\sqrt{g}}=\frac{\lambda\ell'+u^2\ell'\wedge\ell}{\sqrt{\lambda^2+(u^2)^2}\,|\ell'|} \qquad (11.41)$$

عند النقطة $(u^1,0)$ يكون

$$N(u^1,0)=\frac{\ell'}{|\ell'|},\ \lambda\neq0 \qquad (11.42)$$

إذا كانت ϕ الزاوية بين $N(u^1,0),N(u^1,u^2)$ (عموديين عند نقطتين متجاورتين)

$$\therefore\cos\phi=\langle N(u^1,0),N(u^1,u^2)\rangle$$

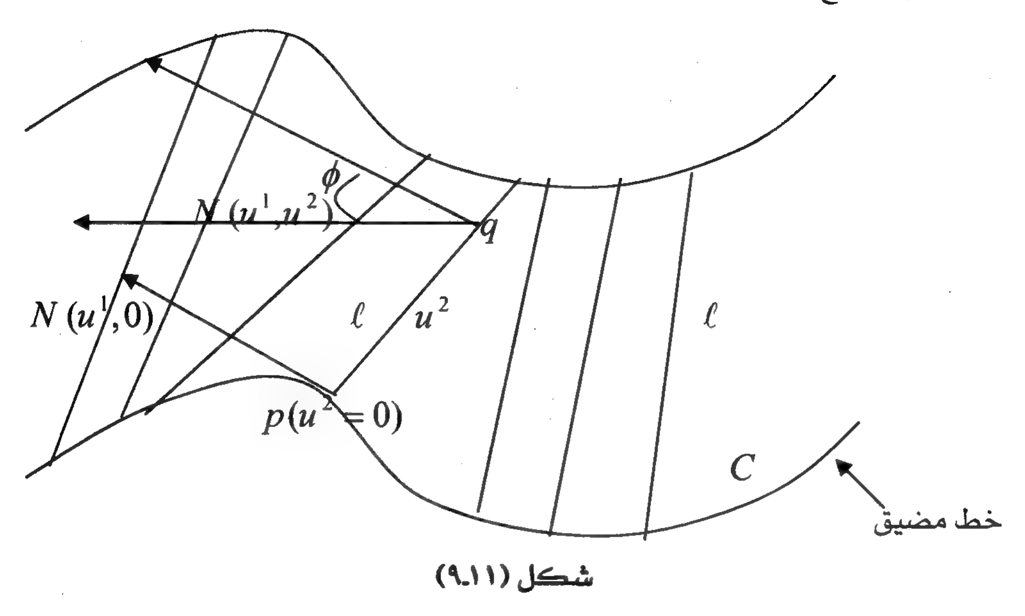
وبالتعويض من (11.41)، (11.42) نحصل على ($\langle\ell'\wedge\ell,\ell'\rangle=0$)

$$\cos\phi=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+(u^2)^2}}$$

إذاً (باستخدام العلاقات المثلثية) يكون لدينا

$$\tan\phi = \frac{u^2}{\lambda(u^1)} \qquad (11.43)$$

كما هو موضح في شكل (٩.١١)



شكل (٩.١١)

العلاقة (11.43) تعطي **تأويل هندسي** لبارامتر التوزيع حيث u^2 المسافة على امتداد مولد ما بين نقطة عامة q على المولد ونقطة مركزية p على نفس المولد (قريبة جداً منها).

مثال (١١.١١):

أوجد بارامتر التوزيع لسطح السرج

$$z = ax\,y \quad , a \neq 0 \qquad (11.44)$$

الحل:

التمثيل البارامتري المنتظم لسطح السرج المعطى بالمعادلة الكرتيزية يعطى من

$$R(u^1,u^2) = (u^1, \frac{u^2}{a}, u^1 u^2)$$

$$R(u^1,u^2)=(u^1,0,0)+u^2(0,\frac{1}{a},u^1) \qquad (11.45)$$

كما هو موضح بالشكل (١١-١٠) حيث أخذنا $a=1$



شكل (١١-١٠): السرج

في التمثيل البارامتري (11.45) نضع

$$r(u^1)=(u^1,0,0)\ ,\ \ \ell(u^1)=(0,\frac{1}{a},u^1)$$

إذاً $$r'=(1,0,0),\ell'=(0,0,1)$$

وبالتالي فإن الدليل $r=r(u^1)$ هو خط مضيق للسطح المسطر ($<r',\ell'>=0$).

وبالتعويض عن ℓ',ℓ ، r' في (11.38) نحصل على بارامتر التوزيع في الصورة

$$\lambda(u^1)=\frac{1+a^2(u^1)^2}{a^2}$$

$$\lambda(u^1)=\frac{1}{a^2}+(u^1)^2$$

أي أن بارامتر التوزيع $\lambda(u^1)$ دالة تزايدية بالنسبة لسطح السرج.

(٣.١١) السطوح المسطرة القابلة للفرد: Developable Ruled Surface

تعريف (٨.١١):

السطح المسطر القابل للفرد هو سطح مسطر بارامتر التوزيع له منعدم أي يحقق $\lambda(u^1)=[\ell,\ell',r']\equiv 0$.

تعريف (٩.١١):

يعرف خط المضيق بأنه المحل الهندسي للنقاط الشاذة لسطح مسطر قابل للفرد.

وباستخدام التعريف (١١ـ٨) والعلاقة (11.40) نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية الشهيرة التي تميز السطوح القابلة للفرد.

نظرية (١.١١):

الانحناء الجاوسي عند النقاط المنتظمة على السطح القابل للفرد يساوي صفراً تطابقياً identically zero.

زيادة في **التأويل الهندسي** للسطوح القابلة للفرد، نعتبر الشرط ($\lambda=0$)

$$[\ell,\ell',r']=0 \qquad (11.46)$$

وهذا الشرط يتحقق في الحالات الآتية:

$$\ell\wedge\ell'\equiv 0 \qquad \text{(i)}$$

إذاً $\ell'\equiv 0$ (المولد ℓ ثابت) وفي هذه الحالة يكون السطح المسطر أسطوانة عامة، وفي الحالة الثانية وهي أن خط المضيق $\bar{r}$ يحقق الشرط (11.46) أي على امتداد خط المضيق $\bar{r}$ $(<\bar{r}',\ell'>=0)$ للسطح المسطر يكون بارامتر التوزيع منعدم وهذا واضح من تعريف (١١ـ٩).

(ii) إذا كان $\overline{r}'\neq 0, \forall u^1 \in I$ و $<\overline{r}', \ell'>=0$ والشرط (11.46) محقق يتضح أن ℓ يوازي $\overline{r}'$. إذاً السطح المسطر هو السطح المماسي للمنحنى $\overline{r}$.

(iii) إذا كـان $\overline{r}' = 0, \forall u^1 \in I$ فـإن خـط المـضيق يـؤول إلى نقطـة $\overline{p}$ والسطح المسطر في هذه الحالة يكون مخروط رأسه النقطة p.

من العرض السابق نعطي النتيجة الآتية:

نتيجة (١.١١):

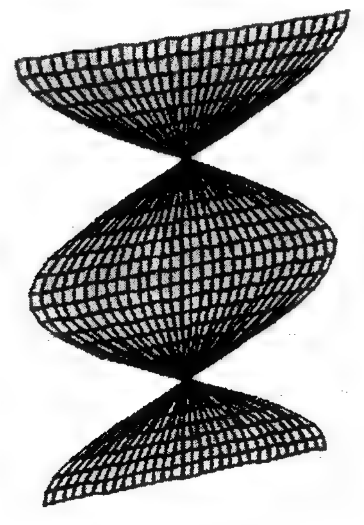
السطح القابل للفرد عند النقاط المنتظمة هو اتحاد مقاطع من أسطوانات ومخاريط وسطوح مماسية.

تعريف (١٠.١١):

السطح الناتج من سطح الكانويد القائم بوضع $\theta(u^1)=u^1$ ، واستبدال البارامتر u^1 بالقيمة au^1 حيث $u^1 \in (0,2\pi)$ يكون له التمثيل البارامتري

$$R(u^1,u^2)=(u^2\cos u^1, u^2\sin u^1, au^1) \qquad (11.47)$$

ويسمى سطح الهليكويد Helicoid أو السطح اللولبي كما هو موضح في شكل (١١.١١).



شكل (١١.١١)

هـذا السـطح يتكـون مـن عـائلتين مـن الخطـوط البارامتريـة أحـدهما $u^1 = \text{const.}$ (عائلة الخطـوط المستقيمة) والعائلـة الأخـرى تنـاظر $u^2 = \text{const.}$ (عائلـة الحلزونيـات الدائرية) وبالتالي فهو سطح مسطر يعطى بالتمثيل البارامتري المسطر الآتي:

$$R(u^1,u^2)=r(u^1)+u^2\ell(u^1)\,, \qquad (11.48)$$

حيث

$$r(u^1)=(0,0,au^1)\,,\ell(u^1)=(\cos u^1,\sin u^1,0)$$

(٤.١١) غلاف عائلة المستويات: Envelope of a Family of Planes

رأينا أن السطوح القابلة للفرد تتمتع بخاصية أن المستويات المماسية لها على امتداد أحد المولدات تكون ثابتة وفي هذه الحالة يقال أن السطح القابل للفرد (البسط) يمس عائلة من المستويات التي تعتمد على بارامتر واحد على امتداد أحد مولداته ويقال في هذه الحالة أن السطح المفرود غلاف envelope لعائلة المستويات المماسية. ولذلك هنا نقوم بتعريف معنى غلاف عائلة من السطوح.

تعريف (١١.١١):

نعتبر عائلة من السطوح المنتظمة $S(\mu)$ التي تعتمد على بارامتر واحد μ . السطح المنتظم الذي يمس عند كل نقطة من نقاطه سطحاً واحداً على الأقل من سطوح العائلة $S(\mu)$ يسمى غلاف envelope للعائلة $S(\mu)$.

نظرية (٢.١١): (بدون برهان):

غلاف عائلة السطوح المنتظمة

$$S_\mu : F(x^1,x^2,x^3;\mu)=0\,,\ \nabla F\neq 0$$

يتحدد من حذف μ من المعادلات الضمنية الآتية:

$$F(x^i,\mu)=0\,,\ \frac{\partial F}{\partial \mu}(x^i,\mu)=0 \qquad (11.49)$$

أي أن الغلاف يعطى بمعادلة ناتجة من حذف البارامتر μ من المعادلات (11.49).

نعتبر عائلة من المستويات

$$\pi(\mu):<r,N(\mu)>+d(\mu)=0 \qquad (11.50)$$

حيث $N(\mu)$ متجه الوحدة العمودي على المستوى المناظر للبارامتر μ و $d(\mu)$ طول العمود الساقط على المستوى $\pi(\mu)$ من نقطة الأصل.

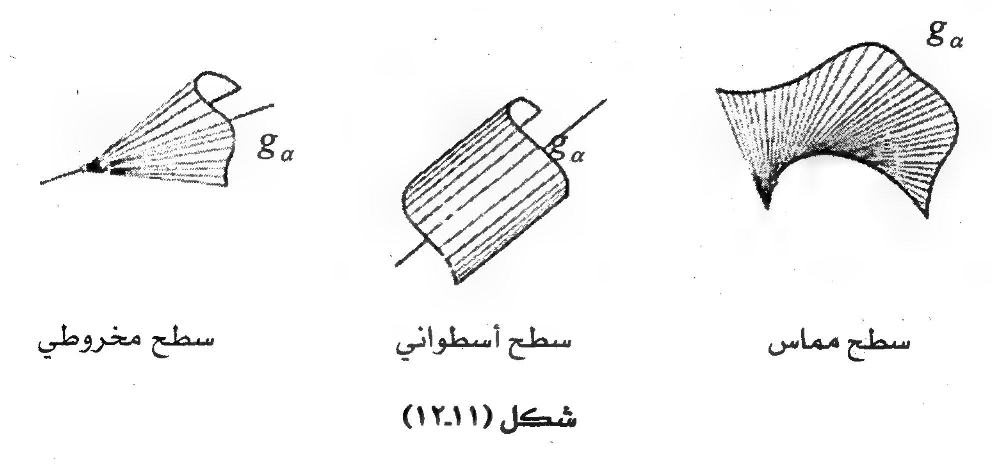
غلاف عائلة المستويات يتحدد من

$$<r,N(\mu)>+d(\mu)=0\,,$$
$$<r,N'(\mu)>+d'(\mu)=0\,,\ '=\frac{d}{d\mu} \qquad (11.51)$$

عندما تكون $\mu=\alpha$ ثابتة فإن المعادلتين (11.51) تحددان خط مستقيم $g_\alpha : L(\mu)$ وبالتالي فإن الغلاف يولد بواسطة المستقيم $g_\alpha : L(\mu)$.

نظرية (٣.١١):

غلاف عائلة المستويات أحادية البارامتر يمثل سطح أسطواني أو سطح مخروطي أو سطح مماسي كما هو موضح في شكل (١١-١٢).



شكل (١١-١٢)

البرهان:

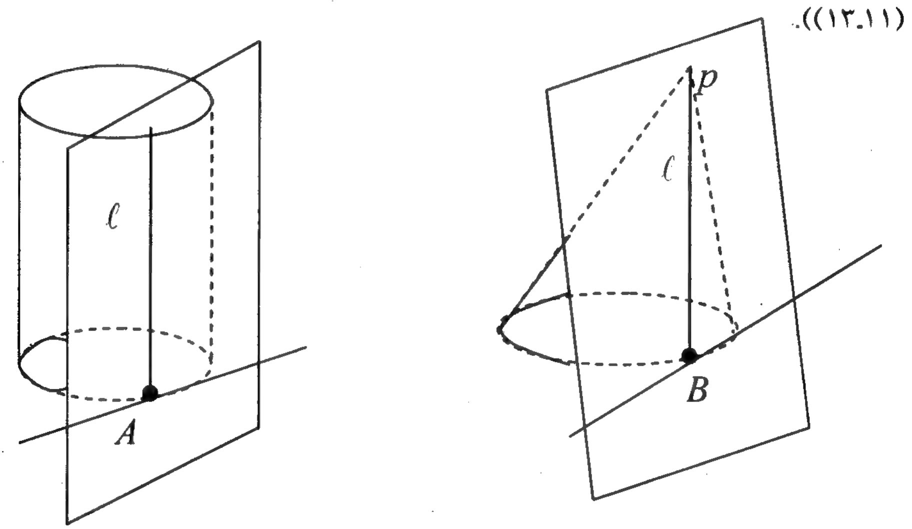
خارج نطاق الكتاب.

ملاحظة (٧.١١):

المعادلتان (11.51) تحددان عائلة من المستقيمات $g:L(\mu)$ تكون متوازية (سطح أسطواني) أو متقاطعة في نقطة (مخروط) أو تمس منحنى فراغ منتظم (سطح مماسي).

نتيجة (٢.١٠):

غلاف عائلة المستويات أحادية البارامتر هو سطح قابل للفرد (أنظر شكل (١٣.١١)).



شكل (٣.١١): الغلاف والسطح القابل للفرد

تمارين (١١)

(١) أوجد الكميات الأساسية الأولى $g_{\alpha\beta}$ والمميز المتري g للسطح المماسي ومن ثم أوجد نقاطه الشاذة. وكذلك مساحة جزء من السطح يناظر المنطقة $D \subset \mathbb{R}^2$ حيث $D=\{(u^1,u^2)|u^1 \in (-1,2), u^2 \in (1,3)\}$ في حالة المنحنى (الدليل) $r(u^1)=(\cos u^1, \sin u^1, u^2)$

(٢) أوجد الصيغة الأساسية الأولى والثانية والانحناء العمودي للسطح المسطر المولد بالعمود الثانوي $b=b(u^1)$ للمنحنى $r=r(u^1)$ حيث u^1 بارامتر طول القوس وأوجد النقاط الشاذة عليه إن وجدت.

(٣) بالنسبة لسطح الأسطوانة والمخروط أوجد الانحناء الجاوسي والمتوسط وكذلك خطوط الانحناء والانحناءات الأساسية عليه.

(٤) بين أن الخطوط التقاربية على السطح المماسي هي مماسات الدليل.

(٥) أوجد الانحناء الجاوسي والمتوسط للسطح المسطر المولد بالعمود الأساسي الأول $n=n(u^1)$ لمنحنى فراغ منتظم $r=r(u^1)$. وأوجد كذلك خطوط الانحناء والخطوط التقاربية وكذلك نقاطه الشاذة إن وجدت.

(٦) بين أي من السطوح المعطاة في التمارين من (١) إلى (٥) يكون قابل للفرد.

(٧) بين أن خط المضيق على سنطح الهليكويد Helicoid هو محور z.

(٨) بين أن بارامتر التوزيع لسطح الهليكويد ثابت.

(٩) أوجد خط المضيق على كل من الأسطوانة والمخروط والسطح المماسي.

(١٠) أوجد مساحة جزء من سطح الهليكويد $R(u^1,u^2)$ مناظر للمنطقة D

حيث $$(u^1,u^2)\in D=[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]\times[-1,2]\subset\mathbb{R}^2$$

(١١) أوجد خطوط الانحناء والانحناءات الأساسية على سطح الهليكويد.

(١٢) أوجد غلاف عائلة المستويات $\mu x+y+z=\mu^2$ حيث μ بارامتر العائلة.

(١٣) أوجد الانحناء الجاوسي والمتوسط وكذلك خطوط الانحناء والخطوط التقاربية للسطوح المسطرة التي رواسمها هي:

(i) الأعمدة الأساسية لمنحنى فراغ منتظم.

(إرشاد: $R(u^1,u^2)=r(u^1)+u^2n(u^1)$ كما في مثال (٩.١١)).

(ii) الأعمدة الثانوية لمنحنى فراغ منتظم.

(إرشاد: $R(u^1,u^2)=r(u^1)+u^2b(u^1)$ كما في مثال (٩.١١))

(١٤) للسطح المسطر $R(u,v)=r(u)+v\,\ell(u)$ أوجد شرط أن الانحناء الجاوسي يساوي صفر.

(١٥) متى يكون السطح المماسي مستصغر.

(١٦) ناقش فيما إذا كانت السطوح المسطرة الآتية مستصغرة

(i) السطح المولد بالعمود الأساسي.

(ii) السطح المولد بالعمود الثانوي.

(١٧) أوجد الانحناء الجاوسي لسطح الكانويد

$$R(u,v)=(u\cos v,u\sin v,\cos 2v)$$

الباب الثاني عشر

السطوح الدورانية في الفراغ الثلاثي

Surfaces of Revolution

في هذا الباب نقوم بتعريف وعرض أشكال السطوح الدورانية وطرق تمثيلها ونركز على دراسة الهندسة الداخلية والخارجية لها وكذلك دراسة السطوح الدورانية ذات الانحناء الثابت.

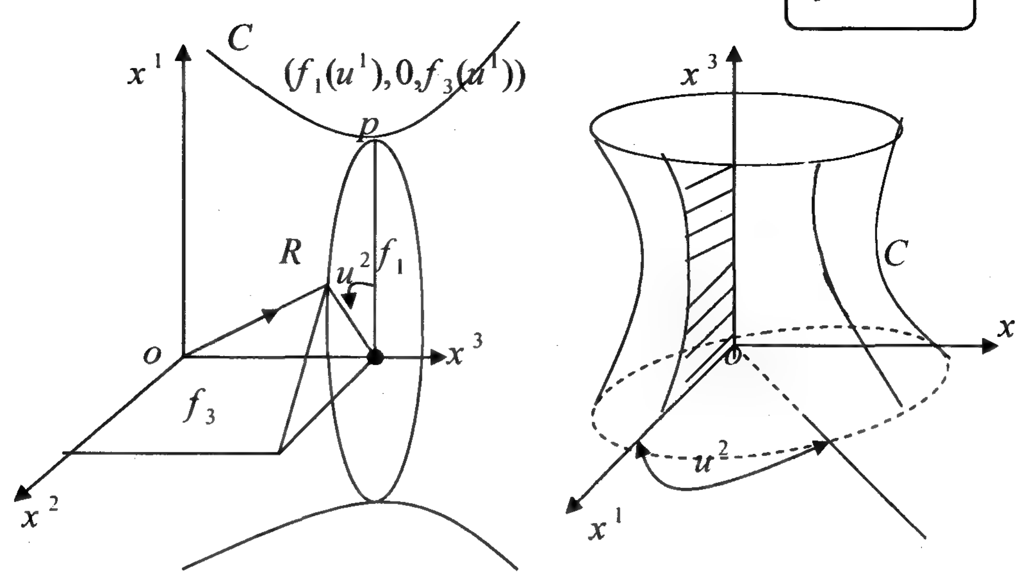
(١.١٢) البناء الهندسي للسطوح الدورانية Geometric Construction

نعتبر منحنى مستوي منتظم

$$C: r = r(u^1) = (f_1(u^1), 0, f_3(u^1)), f_1(u^1) > 0, u^1 \in (a,b) \quad (12.1)$$

واقع في المستوى $x_1 x_3$ حيث $|\frac{dr}{du^1}| = \sqrt{f_1'^2 + f_3'^2} \neq 0$ ، $' = \frac{d}{du^1}$

وباختيار محور الدوران منطبق على محور ox^3 حيث المنحنى C لا يقطع محور الدوران. بدوران المنحنى C دورة كاملة حول محور ox^3 فإن كل نقطة من نقاطه ترسم دائرة مركزها يقع على محور الدوران والشكل الناتج من الحركة يسمى سطح دوراني. والحركة تسمى الحركة الدورانية revolution motion والمنحنى يسمى منحنى الشكل profile curve أو منحنى الهيئة ومحور الدوران يسمى محور السطح الدوراني (محور التماثل axis of symmetry) كما هو موضح في شكل (١٢-١) حيث u^2 زاوية الدوران. ونلاحظ أنه عندما يدور المنحنى C حول المحور ox^3 فإن النقطة p تنتقل إلى نقطة جديدة $R(u^1, u^2)$ لها نفس الإحداثي x^3 ولكن الإحداثيات x^2, x^1 تغيرت إلى $f_1 \sin u^2, f_1 \cos u^2$ على الترتيب.



شكل (١٢-١)

المواضع المختلفة التي يأخذها المنحنى C أثناء الدوارن تسمى خط الزوال Meridians للسطح الدوراني والدائرة المرسومة بنقاط المنحنى C أثناء الدوران تسمى المتوازيات parallels للسطح الدوراني. ومن هندسة الشكل نجد أن

$$R(u^1,u^2)=(f_1(u^1)\cos u^2, f_1(u^1)\sin u^2, f_3(u^1)) \qquad (12.2)$$

أو

$$(x^1)^2+(x^2)^2=f_1^2(u^1)\,,\; x^3=f_3(u^1)$$

أو

$$(x^1)^2+(x^2)^2=f_1^2(f_3^{-1}(x^3))=\Phi(x^3)$$

حيث Φ دالة منتظمة في x^3 و f_3 دالة منتظمة (أي لها معكوس).

ونلاحظ أن R ناتج من دوران المنحنى C حول محور ox^3 بمصفوفة الدوران

$$A=\begin{pmatrix} \cos u^2 & -\sin u^2 & 0 \\ \sin u^2 & \cos u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (12.3)$$

أي
$$R = A . r'(u^1)$$

$$\therefore\ R = A . \begin{pmatrix} f_1(u^1) \\ 0 \\ f_3(u^1) \end{pmatrix} \qquad (12.4)$$

أو ما يكافئ (12.2).

نقوم الآن بحساب المميز المتري g للسطح الدوراني حيث

$$R_1 = (f_1' \cos u^2, f_2' \sin u^2, f_3'), ' = \frac{d}{du^1},$$

$$R_2 = (-f_1 \sin u^2, f_1 \cos u^2, 0),$$

$$R_1 \wedge R_2 = (f_1 f_3' \cos u^2, -f_1 f_3' \sin u^2, f_1 f_1'),$$

$$|R_1 \wedge R_2| = f_1 (f_1'^2 + f_3'^2)^{\frac{1}{2}}, f_1 > 0 \qquad (12.5)$$
$$\neq 0$$

إذاً التمثيل (12.2) تمثيل بارامتري منتظم للسطح الدوراني.

التمثيل البارامتري (12.2) ليس هو التمثيل البارامتري الوحيد ولكن توجد تمثيلات مختلفة للسطح الدوراني ونوضح ذلك كما يلي:

(١) بوضع $f_1(u^1) = v^1$ بشرط أن $\frac{dv^1}{du^1} = f_1' \neq 0$ أي أن f_1 تناظر أحادي. إذاً

$$f_3(u^1) = f_3(f_1^{-1}(v^1)) \qquad \text{أو} \qquad f_3(u^1) = f(v^1)$$

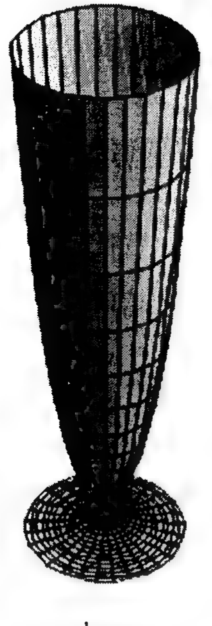
وبالتالي يكون لدينا التمثيل البارامتري

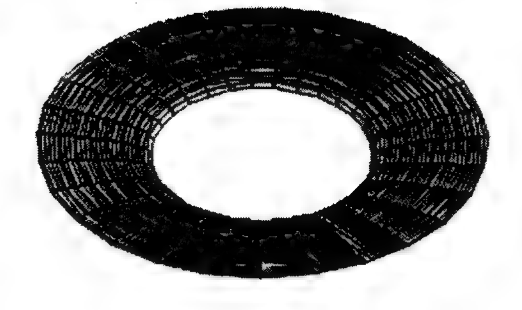
$$X(v^1, u^2) = (v^1 \cos u^2, v^1 \sin u^2, f(v^1)) \qquad (12.6)$$

أو في الحالة العامة (بدلالة رموز متشابهة)

$$R(u^1, u^2) = (u^1 \cos u^2, u^1 \sin u^2, f(u^1)), (u^1, u^2) \in D \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \ (12.7)$$

كما هو واضح في شكل (٢.١٢)





$f(u^1)=e^{u}$ $\qquad$ $f(u^1)=\cos^{-1}\frac{u^1}{5}$

شكل (٢.١٢): سطح دوراني

بالنسبة للسطح الدوراني (12.7) نحصل على

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= (\cos u^2, \sin u^2, f'), R_2 = (-u^1 \sin u^2, u^1 \cos u^2, 0), \\ \therefore R_1 \wedge R_2 &= u^1(f'\cos u^2, -f'\sin u^2, 1), \\ |R_1 \wedge R_2| &= u^1\sqrt{1+f'^2} \neq 0, u^1>0 \end{aligned}\right\} \quad (12.8)$$

أي أن (12.7) تمثيل بارامتري منتظم للسطح الدوراني.

(٢) التمثيل البارامتري يختلف باختلاف محور الدوران فمثلاً إذا كان منحنى الشكل

$$C: r(u^1)=(f_1(u^1), 0, f_3(u^1))$$

ومحور الدوران منطبق على محور ox^1 فإن السطح الناتج يكون له التمثيل البارامتري المنتظم الممثل بالدالة الاتجاهية

$$R(u^1,u^2)=(f_1,f_3(u^1)\sin u^2,f_3\cos u^2)$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos u^2 & \sin u^2\\ 0 & -\sin u^2 & \cos u^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\ 0\\ f_3\end{pmatrix} \qquad (12.9)$$

(٣) إذا كان المنحنى

$$C:r(u^1)=(0,f_2(u^1),f_3(u^1))$$

واقع في المستوى x^2x^3 ومحور الدوران منطبق على محور ox^2 فإن السطح الدوراني يكون له التمثيل البارامتري المنتظم الممثل في الدالة الاتجاهية

$$R(u^1,u^2)=(f_3\sin u^1,f_2(u^1),f_3\cos u^1)$$

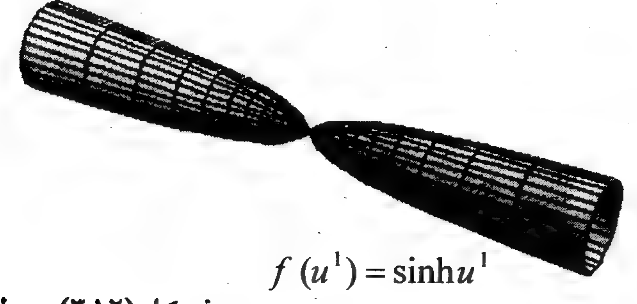
$$=\begin{pmatrix}\cos u^1 & 0 & \sin u^1\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin u^1 & 0 & \cos u^1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix} \qquad (12.10)$$

التمثيلات البارامترية المنتظمة (12.9)، (12.10) يمكن أن تؤول إلى (بتغيير البارامترات كما في (12.7))

$$R(u^1,u^2)=(f(u^1),u^1\sin u^2,u^1\cos u^2),u^1>0 \qquad (12.11)$$

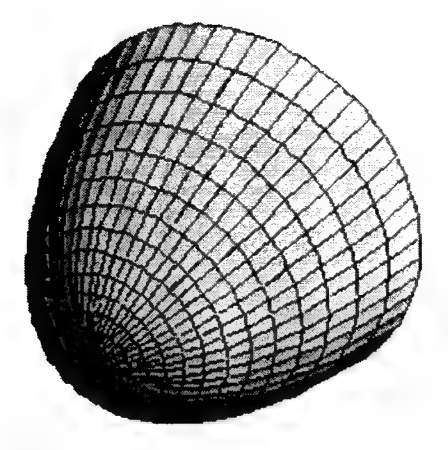
$$R(u^1,u^2)=(u^1\sin u^2,f(u^1),u^1\cos u^2),u^1>0 \qquad (12.12)$$

كما هو موضح في شكل (٣.١٢)، (٤.١٢) على الترتيب.



$f(u^1)=\sinh u^1$

شكل (٣.١٢): سطح دوراني



$f(u^1) = \cosh u^1$

شكل (١٢-٤): سطح دوراني

لوصف السطح الدوراني هندسياً نختار أحد التمثيلات البارامترية وليكن (12.7) ونحدد الخطوط البارامترية كالآتي:

الخطوط البارامترية $u^2 = \text{const.}$ تسمى خطوط الزوال meridians للسطح الدوراني. بينما الخطوط $u^1 = \text{const.}$ تسمى خطوط التوازي parallels وهي عبارة عن دوائر تقع في مستويات عمودية على محور الدوران.

وبحساب المماسات R_1 ، R_2 لخطوط التوازي والزوال على السطح الدوراني (12.7) نجد أن (من (12.8)) $g_{12} = \langle R_1, R_2 \rangle = 0$ أي أن خطوط الزوال وخطوط التوازي للسطح الدوراني تكون شبكة متعامدة.

ومن (12.8) نجد أن الكميات الأساسية الأولى $g_{\alpha\beta}$ تأخذ الشكل

$$g_{11} = 1 + f'^2 \ , \ g_{22} = (u^1)^2 \ , g_{12} = 0, g = (u^1)^2 (1 + f'^2) \quad (12.13)$$

حيث المسافات القوسية ds_1, ds_2 على امتداد الخطوط البارامترية تعطى من

$$\frac{ds_1}{du^1} = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{1 + f'^2} \ , \ \frac{ds_2}{du^2} = \sqrt{g_{22}} = u^1 > 0 \quad (12.14)$$

الكميات الأساسية الأولى المرافقة $g^{\alpha\beta}$ هي

$$g^{11}=\frac{1}{g_{11}}=\frac{1}{1+f'^2},g^{12}=g_{12}=0,g^{22}=\frac{1}{g_{22}}=\frac{1}{(u^1)^2} \quad (12.15)$$

حقل متجه الوحدة العمودي N على السطح الدوراني (12.7) يعطى من

$$N(u^1,u^2)=\frac{R_1\wedge R_2}{\sqrt{g}}=\frac{R_1\wedge R_2}{u^1\sqrt{1+f'^2}}$$

$$\therefore N=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}(-f'\cos u^2,-f'\sin u^2,1) \quad (12.16)$$

المشتقات التفاضلية الجزئية ذات الرتبة الثانية للدالة الاتجاهية (12.7) تعطى من

$$\begin{aligned} &R_{11}=(0,0,f''),R_{12}=(-\sin u^1,\cos u^2,0),\\ &R_{22}=(-u^1\cos u^2,-u^1\sin u^2,0),'=\frac{d}{du^1} \end{aligned} \quad (12.17)$$

وباستخدام تعريف الكميات الأساسية الثانية $L_{\alpha\beta}=<R_{\alpha\beta},N>$ نحصل على

$$\therefore L_{11}=\frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}},L_{22}=\frac{u^1f'}{\sqrt{1+f'^2}},L_{12}=0 \quad (12.18)$$

باستخدام نظرية (٤.٩) نجد أن خطوط الزوال وخطوط التوازي تنطبق على الخطوط الانحنائية لأن $g_{12}=0$, $L_{12}=0$.

ملاحظة (١.١٢):

واضح من (12.13)، (12.15)، (12.18) أن الكميات الأساسية الأولى والثانية دوال في البارامتر u^1 .

الانحناءات الأساسية k_1,k_2 والانحناء المتوسط H والانحناء الجاوسي K تعطى من العلاقات الآتية:

$$2H=k_1+k_2=g^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta}=g^{11}L_{11}+g^{22}L_{22}$$

وباستخدام (12.15) نحصل على

$$\therefore\ 2H=\frac{L_{11}}{g_{11}}+\frac{L_{22}}{g_{22}}=k_1+k_2\,, \qquad (12.19)$$

$$K=k_1k_2=\frac{L}{g}=\frac{L_{11}}{g_{11}}.\frac{L_{22}}{g_{22}} \qquad (12.20)$$

وباستخدام (12.19)، (12.20)، (12.18)، (12.13) نحصل على

$$k_1=\frac{L_{11}}{g_{11}}=\frac{f''}{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}=k_c\,, \quad \text{(انحناء خط الزوال)}$$
$$k_2=\frac{L_{22}}{g_{22}}=\frac{f'}{u^1(1+f'^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad \text{(انحناء خط التوازي)} \qquad (12.21)$$

حيث k_c هو انحناء منحنى الشكل (الهيئة). وكذلك فإن الانحناء الجاوسي K والانحناء المتوسط H يأخذ الصور الصريحة الآتية:

$$2H=\frac{u^1f''+f'(1+f'^2)}{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (12.22)$$

$$K=\frac{f'f''}{u^1(1+f'^2)^2}. \qquad (12.23)$$

الخطوط التقاربية على السطح الدوراني تعطى من

$$\text{II}=L_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta=0$$

ومن (12.18) نحصل على

$$L_{11}(du^1)^2+L_{22}(du^2)^2=0\Rightarrow(\frac{du^1}{du^2})^2=-\frac{L_{22}}{L_{11}}$$

وهذا محقق فقط إذا كان L_{11} ، L_{22} مختلفي الإشارة وبالتعويض عن L_{11} ، L_{22} نجد أن

$$(\frac{du^1}{du^2})^2=-\frac{u^1f'}{f''} \qquad (12.24)$$

إذا كانت الدالة f تزايدية فإن f' موجب. إذاً الخطوط التقاربية تكون موجودة إذا كانت u^1 ، f'' مختلفي الإشارة، وخلاف ذلك لا توجد خطوط تقاربية. وبما أن $u^1>0$ إذاً كي توجد خطوط تقاربية يجب أن يكون $f''>0$.

ملاحظة (٢.١٢):

خطوط التوازي وخطوط الزوال تكون شبكة مترافقة $(L_{12}=0)$.

(٢.١٢) السطوح الدورانية ذات الانحناء المتوسط ثابت:

السطح الدوراني الذي انحنائه المتوسط ثابت وليكن H_o يجب أن يحقق المعادلة التفاضلية

$$\frac{f''}{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{f'}{u^1(1+f'^2)^{\frac{1}{2}}}=2H_o \qquad (12.25)$$

هذه هي المعادلة التفاضلية للمنحنيات المولدة للسطح الدوراني الذي له الانحناء المتوسط ثابت (لأنها تحدد الدالة $f=f(u^1)$ التي تعرف منحنى الشكل (المولد)).

باستخدام التعويض

$$z=\frac{f'}{(1+f'^2)^{\frac{1}{2}}},\ '=\frac{d}{du^1}$$

$$\therefore\ z'=\frac{f''}{(1+f'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

وبالتالي (12.25) تأخذ الصورة:

$$z'+\frac{z}{u^1}=2H_o$$

وهي معادلة تفاضلية خطية في z',z ولها حل عام في الصورة:

$$z = H_o u^1 + \frac{c}{u^1}\ , c = \text{const.} \qquad (12.26)$$

والانحناءات الأساسية تأخذ الصورة الجديدة

$$k_1 = z'\ , k_2 = \frac{z}{u^1} \qquad (12.27)$$

وباستخدام (12.26) نحصل على

$$k_1 = H_o - \frac{c}{(u^1)^2}\ , k_2 = H_o + \frac{c}{(u^1)^2} \qquad (12.28)$$

من هذه المعادلة يتضح أنه إذا كان السطح له نقطة كروية $(k_1 = k_2)$ فإن $c = 0$ والسطح يتكون كله من نقط كروية. إذاً السطح إما أن يكون كرة $(H_o \neq 0)$ أو مستوى $H_o = 0$ وبالتالي نكون قد توصلنا إلى إثبات النظرية التالية:

نظرية (١٢.١):

السطح الدوراني ذو الانحناء المتوسط ثابت إما أن يكون كرة أو مستوى أو ليس له نقط كروية.

مثال (١٢.١):

أوجد معادلة المنحنيات المولدة للسطح الدوراني ذو الانحناء المتوسط ثابت.

الحل:

بما أن
$$z = \frac{f'}{(1 + f'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore\ \frac{f'^2}{1 + f'^2} = \left(\frac{H_o (u^1)^2 + c}{u^1}\right)^2$$

ومنها يكون لدينا

$$\frac{1}{f'^2} = \frac{(u^1)^2 - (H_o (u^1)^2 + c)^2}{(H_o (u^1)^2 + c)^2}$$

$$\therefore f' = \pm \frac{H_o (u^1)^2 + c}{\sqrt{(u^1)^2 - (H_o (u^1)^2 + c)^2}}$$

$$\therefore f = \pm \int \frac{H_o (u^1)^2 + c}{\sqrt{(u^1)^2 - (H_o (u^1)^2 + c)^2}} du^1 \quad (12.29)$$

وهذه هي معادلة المنحنيات المولدة (منحنيات الشكل) للسطح الدوراني.

مثال (١٢ـ٢):

أثبت أن الكاتينود هو السطح الدوراني الوحيد بخلاف المستوى الذي انحنائه المتوسط منعدم.

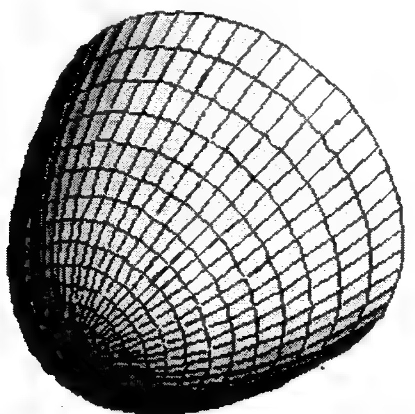
الحل:

بالنسبة للسطح الدوراني المستصغر $H_o = 0$ نجد أن

$$f = \pm \int \frac{c}{\sqrt{(u^1)^2 - c^2}} du^1 = \pm \cosh^{-1}(\frac{u^1}{c}) , c \neq 0$$

$$\therefore f = \pm \cosh^{-1}(\frac{u^1}{c}) , c \neq 0 \qquad (12.30)$$

وفي هذه الحالة يكون المنحنى المولد هو منحنى الكتينة والسطح الدوراني هو سطح الكاتينويد الدوراني. كما هو موضح في شكل (١٢ـ٥) (باعتبار الإشارة الموجبة).



شكل (١٢ـ٥): الكاتينويد

المثال السابق يمكن صياغته على الصورة:

مثال (٣.١٢):

السطح الدوراني المستصغر هو إما سطح الكاتينويد أو مستوى.

نعتبر الحالة العامة $(H_o \neq 0)$:

دون خسارة في التعميم يمكننا اختيار اتجاه عمودي على السطح بحيث يكون H_o موجب. وكي نحصل على سطوح دورانية حقيقية من المعادلة (12.29) يجب أن يكون المقدار

$$(u^1)^2 - (H_o(u^1)^2 + c)^2$$

موجب لجميع قيم u^1 خلال مدى تغيرها على السطح.

الآن يمكن أن نعتبر المقدار

$$(u^1)^2 - (H_o(u^1)^2 + c)^2$$

والمعادلة التربيعية في $(u^1)^2$ ولتكن $\Phi((u^1)^2)$ على الصورة:

$$\Phi((u^1)^2) = -H_o^2(u^1)^4 + (1 - 2H_oc)(u^1)^2 - c^2 \quad (12.31)$$

نفرض أن $v = (u^1)^2$ إذاً $\Phi(v)$ ليس لها إشارة سالبة (كي نحصل على سطوح دورانية حقيقية) وبالتالي فإن مميز المعادلة التربيعية (12.31) لا يمكن أن يكون سالب لأن قيم u^1 حقيقية ونعتبر الحالات الآتية:

إذا كانت $\Phi(v)$ سالبة فإن المميز للمعادلة $\Phi(v)$ لا يمكن أن يكون سالب ولهذا يجب أن يكون المميز موجب أو صفر. إذا كان المميز منعدم فإن $\Phi(v)$ يمكن كتابتها في صورة مقدار من الدرجة الثانية في v مضروب في $-H_o^2$ على الصورة

$$-H_o^2(v^2 + (\frac{1 - 2H_oc}{H_o^2})v + \frac{c^2}{H_o^2})$$

ويكون $\Phi(v)$ سالبة وهذا مرفوض (حيث أن Φ يجب أن تكون موجبة) وبالتالي فإن المميز للدالة $\Phi(v)$ يجب أن يكون موجب. إذاً لكي نحصل من المعادلة (12.29) على سطوح حقيقية يجب أن يكون المميز

$$\Delta=(1-2H_o c)^2-4H_o^2c^2>0$$

أي أن $1-4H_o c>0$ أو $c<\frac{1}{4H_o}$

إذاً المعادلة (12.29) تعطي عائلة ذات البارامتر الواحد c من السطوح الدورانية بحيث البارامتر c يحقق الشرط

$$c<\frac{1}{4H_o} \qquad (12.32)$$

هذه المتباينة تشمل الحالة التي فيها $c=0$ (المستوى).

بما أن المميز للدالة التربيعية $\Phi(v)$ موجب إذاً المعادلة $\Phi(v)=0$ لها جذران حقيقيان (مختلفان) وليكن p^2, q^2 حيث

$$v=(u^1)^2=p^2 \ , v=(u^1)^2=q^2 \ , p\le(u^1)^2\le q$$

$$\therefore \ \Phi(v)=-H_o^2(v-p^2)(v-q^2)$$

عندما $u^1=p, u^1=q$ يكون $\Phi(v)=0$ أي أن (من المعادلة (12.29))

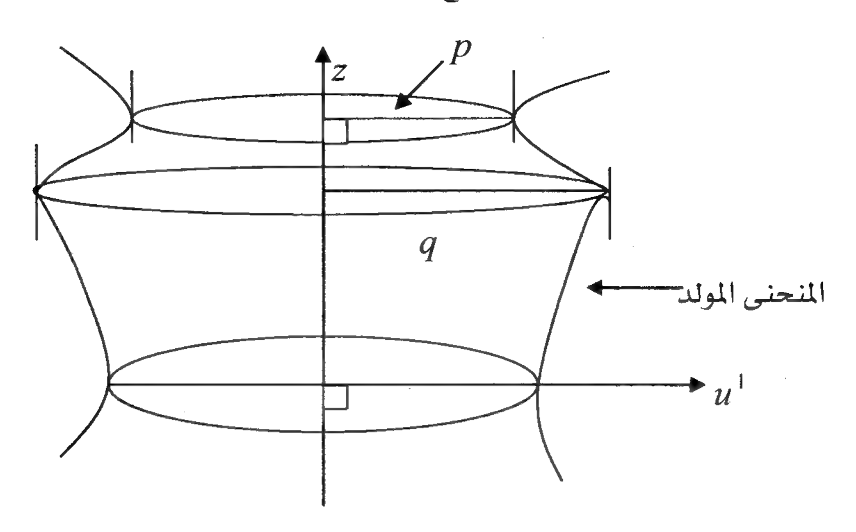
$$\frac{df}{du^1}=f'=\frac{dz}{du^1}=\infty$$

لأن المماس للمنحنى المولد عند نقطة النهاية العظمى أو الصغرى (التي تناظر $u^1=p$ أو $u^1=q$) يوازي محور z والميل في هذه الحالة لانهائي. إذاً يكون

$$\left(\frac{du^1}{dz}\right)_{u^1=p}=\left(\frac{du^1}{dz}\right)_{u^1=q}=0$$

ولهذا تكون القيم $u^1=p, u^1=q$ هي قيم النهاية الصغرى والعظمى للمتغير u^1.

عند القيم $u^1 = p$, $u^1 = q$ تكون المماسات للمنحنيات المولدة موازية لمحور الدوران إذا كانت $c \neq 0$ كما هو موضح في شكل (٦-١٢).



شكل (٦-١٢)

إذا كانت $c = 0$ فإن $\Phi((u^1)^2) = -H_o^2 (u^1)^4 + (u^1)^2 = 0$ تؤدي إلى أن

$$(u^1)^2 = \frac{1}{H_o^2} \text{ أو } (u^1)^2 = 0 \text{ إذاً } p = 0 \text{ أو } q = \frac{1}{H_o}$$

($p = 0$ تعني أن المنحنى المولد يقطع محور الدوران).

في هذه الحالة السطح يتكون كله من نقط كروية ($k_1 = k_2 = H_o$) وبالتالي فهو سطح الكرة. العكس صحيح بمعنى أنه إذا كان $p = 0$ فإن $c = 0$ ويكون السطح كرة. وبالتالي نكون قد توصلنا إلى

نظرية (٢-١٢):

إذا كانت المنحنيات المولدة تقطع محور الدوران فإن السطح الدوراني يكون كرة.

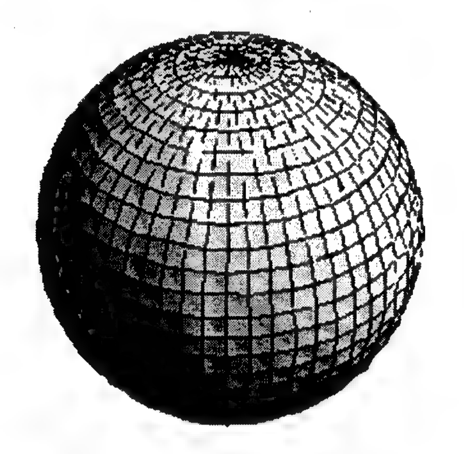
تعريف (١.١٢):

عدد الفتحات أو المقابض handles (الحفر holes) في السطح تسمى فصيلة (نوع) genus .

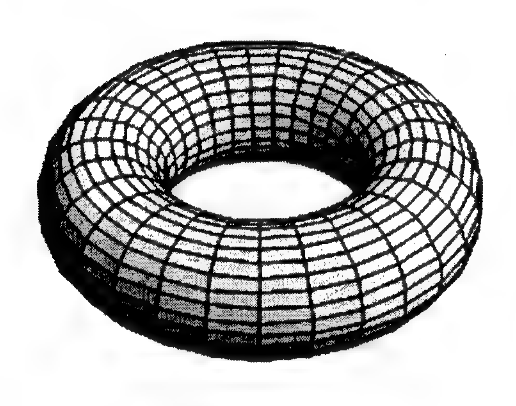
بديهية (١.١٢):

فصيلة أو نوع السطح خاصية لا تغيرية أي لا تتغير تحت تأثير أي تحويل.

ومن المعروف أن السطح الدوراني المقفل يجب أن يكون إما له جينس (geneous) صفراً أو واحد. في الحالة الأولى المنحنيات المولدة يجب أن تقطع محور الدوران مثل الكرة وفي الحالة الثانية يكون سطح قارب النجاة Torus . لكن إذا كان السطح الدوراني له الانحناء المتوسط ثابت فإنه يجب أن يكون كرة. كما هو موضح في شكل (٧.١٢)، (٨.١٢) على الترتيب.



شكل (٧.١٢): سطح الكرة .



شكل (٨.١٢): سطح قارب النجاة

ومن هنا نكون قد توصلنا إلى إثبات النظرية الآتية:

نظرية (٣.١٢):

السطح الدوراني الوحيد الذي له جينس صفر وله الانحناء المتوسط ثابت هو سطح الكرة.

نظرية (٤.١٢):

الطول $L(H_o,c)$ للمنحنى المولد للسطح الدوراني ذو الانحناء المتوسط ثابت يكون مقدراً محدود وثابت.

البرهان:

بما أن
$$L(H_o,c)=\int_p^q \sqrt{1+f'^2}\,du^1$$

ولكن (من (12.29) بتفاضل التكامل)
$$1+f'^2=\frac{(u^1)^2}{H_o^2(v-p^2)(q^2-v)}$$

$$\therefore\ L(H_o,c)=\int_p^q \frac{u^1du^1}{H_o\sqrt{(v-p^2)(q^2-v)}}$$

أو ما يكافئ (بوضع $v=(u^1)^2$)

$$L(H_o,c)=\frac{1}{2H_o}\int_{p^2}^{q^2}\frac{dv}{\sqrt{(v-p^2)(q^2-v)}}=\frac{\pi}{2H_o} \quad (12.33)$$

وذلك باستخدام حساب التكامل الناقص elliptic integral

$$\int_a^b \frac{dx}{H_o\sqrt{(v-a)(b-v)}}=\pi \quad (12.34)$$

(٣.١٢) السطوح الدورانية ذات الانحناء الجاوسي الثابت:

السطح الدوراني الذي له الانحناء الجاوسي ثابت $(K=c)$ يحقق المعادلة التفاضلية

(من (12.23))
$$K=c=\frac{f'f''}{u^1(1+f'^2)}$$

أو ما يكافئ

$$f'f''-cu^1(1+f'^2)^2=0 \qquad (12.35)$$

$$\therefore\ \frac{f'f''}{(1+f'^2)^2}=cu^1$$

وبتكامل الطرفين بالنسبة إلى u^1 نحصل على

$$-\frac{1}{2}(1+f'^2)^{-1}=\frac{c}{2}(u^1)^2+c_1$$

$$\therefore\ \frac{1}{1+f'^2}=-c(u^1)^2+c_2,c_2=-2c_1 \qquad (*)$$

$$\therefore 1+f'^2=\frac{1}{c_2-c(u^1)^2}$$

$$\therefore f'^2=\frac{1}{c_2-c(u^1)^2}-1$$

$$\therefore f'^2=\frac{1-c_2+c(u^1)^2}{c_2-c(u^1)^2}$$

$$\therefore\ f'=\sqrt{\frac{1}{c_2-c(u^1)^2}-1}$$

$$\therefore f=\int\sqrt{\frac{1}{c_2-c(u^1)^2}-1}du^1 \qquad (12.36)$$

ونعتبر الحالات الآتية:

(i) $K=c=0$ (السطح كل نقاطه مكافئة)

$$\therefore f=\int\sqrt{\frac{1}{c_2}-1}\,du^1\ ,c_2<1$$

$$f=c_3u^1+c_4\ ,c_3=\sqrt{\frac{1}{c_2}-1} \qquad (12.37)$$

وفي هذه الحالة فإن منحنى الشكل عبارة عن خط مستقيم يوازي محور الدوران. وبالتالي فإن السطح الدوراني يكون أسطوانة دائرية قائمة أو مخروط قائم $(L=0)$ أو مستوى $(L_{\alpha\beta}=0\,,\forall\alpha,\beta)$ إذا كانت $c_3\neq 0$ أو $c_3=0$.

(ii) إذا كان $K=c=1$ (انحناء جاوسي ثابت موجب) وباستخدام (12.36) يكون

$$f=\int\sqrt{\frac{1}{c_2-(u^1)^2}-1}\,du^1 \qquad (12.38)$$

وبأخذ $c_2=1$ (ثابت التكامل في (*)) نحصل على

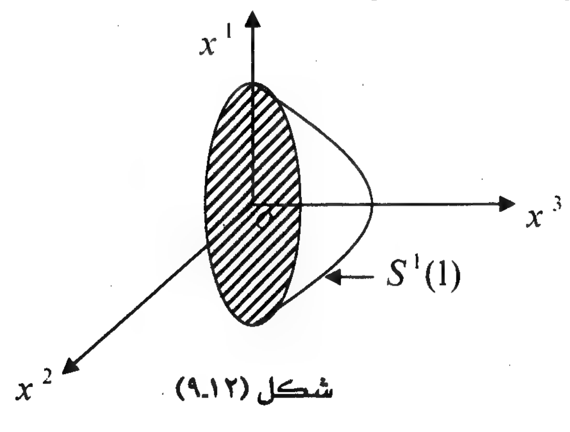
$$f=\int\frac{u^1}{1-(u^1)^2}du^1$$

$$=-\frac{1}{2}(1-(u^1)^2)^{-\frac{1}{2}}(-2u^1)du^1$$

$$=-\frac{1}{2}.\frac{2}{1}(1-(u^1)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore f=-\sqrt{1-(u^1)^2} \qquad (12.39)$$

هذه الدالة تعرف منحنى ربع دائرة $S^1(1)$ في المستوى x^1x^3 والسطح الناتج من الدوران نصف كرة كما في شكل (٩.١٢).



شكل (٩.١٢)

(iii) إذا كان $K = c = -1$ (انحناء جاوسي ثابت وسالب) ومن (12.36) نجد أن

$$f = \int_0^{u^1} \sqrt{\frac{1}{(u^1)^2 + c_2} - 1}\, du^1 \qquad (12.40)$$

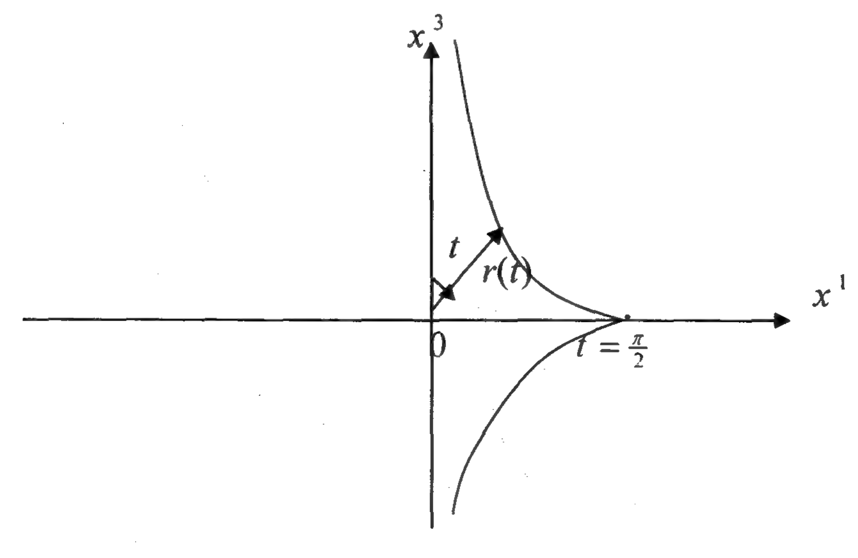
السطح الدوراني المناظر للقيمة $K = -1$ والناتج عن دوران المنحنى الممثل بالدالة f في (12.40) يسمى كرة كاذبة أو شبه كرة pseudo sphere كما هو موضح في شكل (١٢-١١).

ويمكن ملاحظة أن الكرة الكاذبة هي سطح دوراني ناتج عن دوران منحنى التراكترس tractrix الذي له التمثيل البارامتري المنتظم الآتي:

$$r(t):(0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$r(t) = (\cos t, 0, \cos t + \log \tan\frac{t}{2}),\ t \neq \frac{\pi}{2} \qquad (12.41)$$

حيث t هي الزاوية بين محور x^3 ومتجه الموضع $r(t)$ كما هو موضح في شكل (١٢-١٠).



شكل (١٢-١٠)

وبالتالي نجد أن الكرة الكاذبة لها تمثيل بارامتري منتظم على الصورة

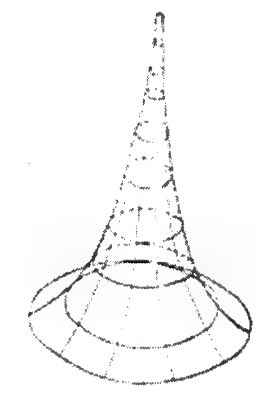
$$R(u^1,u^2)=(\sin u^1\cos u^2,\sin u^1\sin u^2,\cos u^1+\log\tan\frac{u^1}{2}) \quad (12.42)$$

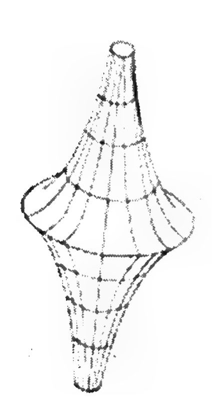
ملاحظة (٣.١٢):

الفرق الواضح بين الكرة والكرة الكاذبة هو أن المركبة الثالثة في التمثيل البارامتري (12.42) تساوي المركبة الثالثة في التمثيل الجيوجرافي للكرة مضافاً إليه الجزء $\log\tan\frac{u^1}{2}$ حيث $u^1 \neq \frac{\pi}{2}$ كما هو موضح في شكل (١٢-١١).

ملاحظة (٤.١٢):

بما أن الكرة الكاذبة لها الانحناء الجاوسي سالب ويساوي 1- عند جميع النقاط المنتظمة إذاً فهو يتكون من نقاط زائدية (أنظر شكل (١٢-١١)).





شكل (١٢-١١)

مثال (٤.١٢):

سطح قارب النجاة الدوراني torus T هو سطح دوراني ناتج عن دوران دائرة C في المستوى xz ونصف قطرها r ومركزها $(r_o,0,0)$ حول محور ox^3 ($r_o > r$ حتى لا تقطع الدائرة محور الدوران) وفي هذه الحالة فإن

$$r(u) = (r_o + r\cos u^1, 0, r\sin u^1)$$

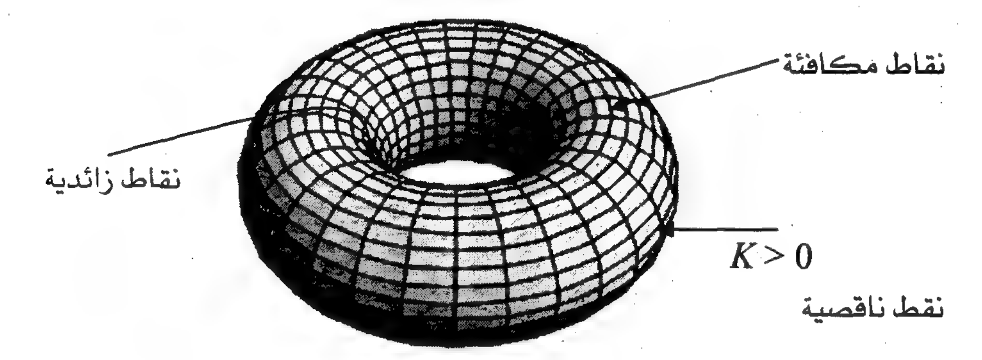
وبالتالي فإن السطح الدوراني الناتج (أنظر التمثيل (12.2)) له التمثيل البارامتري المنتظم

$$R(u^1,u^2) = ((r_o + r\cos u^1)\cos u^2, (r_o + r\cos u^1)\sin u^2, r\sin u^1) \quad (12.43)$$

مجال الدالة الاتجاهية R هو كل المستوى $\mathbb{R}^2$ مع ملاحظة أنها دورية في كل من u^1, u^2 أي أن

$$R(u^1 + 2\pi, u^2 + 2\pi) = R(u^1,u^2), \ \forall (u^1,u^2)$$

كما هو موضح في شكل (١٢.١٢).



شكل (١٢.١٢): سطح قارب النجاة

وبحساب الكميات الأساسية الأولى والثانية نجد أن

$$\begin{aligned} &g_{11} = r^2, g_{12} = 0, g_{22} = (r_o + r\cos u^1)^2, \\ &L_{11} = r, L_{12} = 0, L_{22} = (r_o + r\cos u^1)\cos u^1, \end{aligned} \quad (12.44)$$

$$\therefore k_1 = \frac{L_{11}}{g_{11}} = \frac{1}{r}, \ k_2 = \frac{L_{22}}{g_{22}} = \frac{\cos u^1}{r_o + r\cos u^1}$$

إذاً الانحناء الجاوسي K يعطى من

$$K = k_1 k_2 = \frac{\cos u^1}{r(r_o + r\cos u^1)} \qquad (12.45)$$

عند $u^1 = 0$ (النصف الخارجي من سطح قارب النجاة) نجد أن K تأخذ قيمة عظمى تساوي

$$\frac{1}{r(r_o + r)} \qquad (12.46)$$

أي أن المنطقة التي تحتوي $u^1 \in [0, \frac{\pi}{2})$ مكونة من نقاط ناقصية $(K > 0)$.

وعند $u^1 = \pi$ (النصف الداخلي من سطح قارب النجاة) نجد أن K تأخذ قيمة صغرى تساوي

$$\frac{-1}{r(r_o - r)}, r_o > r \qquad (12.47)$$

أي أن المنطقة التي تحقق $u^1 \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ مكونة من نقاط زائدية $(K < 0)$.

وعند $u^1 = \pm\frac{\pi}{2}$ (عند الدوائر العليا والسفلى) نجد أن

$$K = 0 \qquad (12.48)$$

أي أن هذه المنطقة مكونة من نقاط مكافئة $(K = 0)$ كما هو موضح في شكل (١٢.١٢).

مثال (٥.١٢):

بين أن مساحة سطح قارب النجاة الدوراني تساوي $4\pi^2 r\, r_o$

الحل:

من المثال السابق نجد أن الممتد المتري g يساوي $g = r^2(r\cos u^1 + r_o)^2$

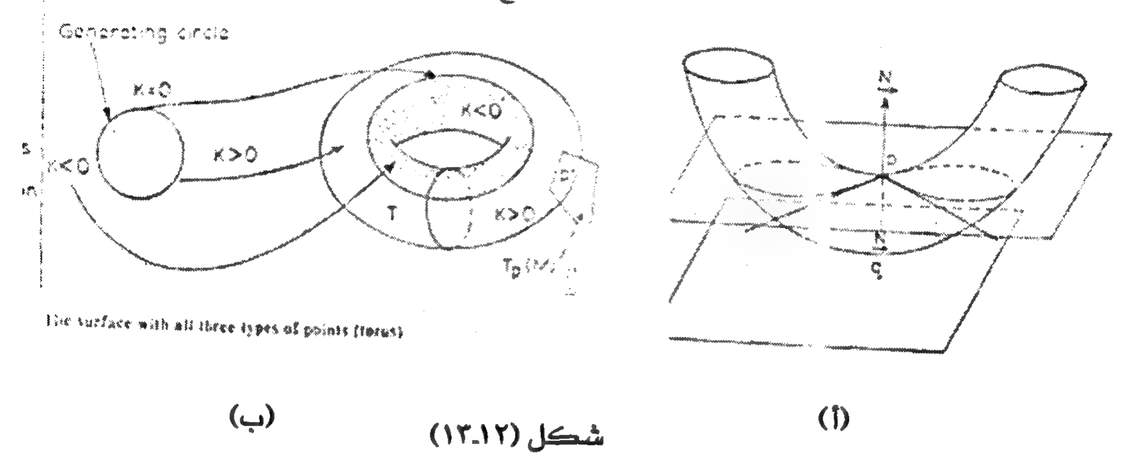
إذاً المساحة A تعطى من

$$A=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{g}\,du^1du^2 \;=\int_0^{2\pi} r\,(r\cos u^1+r_o)du^1\int_0^{2\pi}du^2$$

$$=4\pi^2 r_o r \qquad (12.49)$$

ملاحظة (١٢ـ٥):

سطح قارب النجاة الدوراني غني بالخواص الهندسية حيث أنه يحتوي على نقاط ناقصية وزائدية ومكافئة كما هو موضح في شكل (١٢ـ١٣).



(ب) (أ)

شكل (١٢ـ١٣)

(١٢ـ٤) تزيل عن التكاملات الناقصية: Appendix on Elliptic Integrals

التكاملات الناقصية سميت بهذا الاسم لأنها ظهرت في حساب طول منحنى (محيط) perimeter القطع الناقص ellipse

$$x=a\cos u\,,y=b\sin u\,,a>b$$

ونبدأ بحساب ربع طول المحيط الواقع في الربع الأول من المستوى حيث البارامتر u يتغير من $u=0$ إلى $u=\frac{\pi}{2}$. وباستخدام الصيغة التكاملية التي تعطي طول قوس منحنى في المستوى وهي (طول منحنى القطع الناقص بالكامل)

$$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\frac{dx}{du})^2+(\frac{dy}{du})^2}du \qquad (12.50)$$

وبالتعويض من المعادلات البارامترية للقطع الناقص نحصل على:

$$L = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 u}\, du \qquad (12.51)$$

حيث ε الاختلاف المركزي eccentricity للقطع الناقص وتعطى من

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1 \;, b < a$$

وإذا استخدمنا التعويض $u = \frac{\pi}{2} - v$ نحصل على الصيغة

$$L = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 v}\, dv \qquad (12.52)$$

التكاملات (12.51)، (12.52) تسمى تكاملات ناقصية تامة complete elliptic من النوع الأول. هذه التكاملات لا يمكن حسابها بالطرق العادية لأن الدالة الأصلية antiderivative للمتكامل integrand لا يمكن التعبير عنها من خلال الدوال الأولية elementary. وبالتالي طول محيط القطع الناقص يوجد باستخدام جداول تتوقف على قيم ε .

المتكامل $\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \phi}$ أو $\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \phi}$ قد يأخذ الشكل

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \phi}} \quad \text{أو} \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \phi}}$$

وفي هذه الحالة يكون لدينا صيغ تكاملية على الصورة:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \phi}} \qquad (12.53)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\phi}} \qquad (12.54)$$

هذه التكاملات تسمى تكاملات ناقصية من النوع الأول.

ويرمز لها بالرموز $K(\varepsilon)$ ، $E(\varepsilon)$ حيث

$$E(\varepsilon)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 u}\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 v}\,dv \qquad (12.55)$$

$$K(\varepsilon)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 u}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dv}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 v}} \qquad (12.56)$$

وفي بعض المشاكل يكون الطرف العلوي لحدود التكامل متغير وليكن ϕ مثلاً فإن التكاملات السابقة يرمز لها بالرموز $E(\varepsilon,\phi)$,$K(\varepsilon,\phi)$ على الترتيب حيث

$$E(\varepsilon,\phi)=\int_0^{\phi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 u}\,du = \int_0^{\phi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 v}\,dv \qquad (12.57)$$

$$F(\varepsilon,\phi)=\int_0^{\phi}\frac{dv}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 u}} = \int_0^{\phi}\frac{dv}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 v}} \qquad (12.58)$$

التكاملات السابقة تسمى تكاملات ناقصية غير تامة من النوع الثاني والنوع الأول على الترتيب.

نعتبر تكامل أعم من الصيغة السابقة على الصورة

$$\pi(\varepsilon,n,\phi)=\int_0^{\phi}\frac{1}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 u}}du$$

حيث $n\neq 0,\varepsilon<1$ ($n=0$) يتحول إلى تكامل غير تام من النوع الأول) ويسمى تكامل ناقصي غير تام من النوع الثالث وإذا كانت $\phi=\frac{\pi}{2}$ فإن التكامل يسمى تكامل ناقصي تام من النوع الثالث ونكتب

$$\pi(\varepsilon,n,\frac{\pi}{2})=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(1+n\sin^2\theta)\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 u}}du$$

ملاحظة (٦،١٢):

التكاملات الناقصية السابقة يمكن الحصول عليها بطرق التقريب فمثلاً باستخدام مفكوك ذات الحدين والتقارب المنتظم لمتسلسلة القوى فإنه يمكننا التكامل حداً حداً للمتسلسلة المناظرة للمقادير الآتية:

$$\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 u}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 u}}$$

$$\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 u}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 u}}$$

ملاحظة (٧،١٢):

هذه التكاملات قد لا تظهر بصورة مباشرة في المشاكل العملية ولكن باستخدام تعويض مناسب نحول التكامل المعطى (الذي لا يخضع إلى أي من طرق التكامل المعروفة) إلى أي من صور التكاملات الناقصية وبالكشف في الجداول أو الآلات الحاسبة تبعاً لقيمة ε أو ϕ نصل إلى قيمة تقريبية للتكامل.

تمارين (١٢)

(١) أوجد عنصر المساحة على السطح الدوراني.

(٢) أوجد مساحة السطح الدوراني الناتج عن دوران المنحنى $y = x^2$ حول محور x.

(٣) أوجد الانحناءات الأساسية للسطح الدوراني الناتج عن دوران المنحنى $y = \sin x$ حول محور x.

(٤) عين نقاط الصرة على السطح الدوراني الناتج عن دوران منحنى القطع الناقص حول أحد محاوره.

(٥) أوجد الخطوط التقاربية للسطح الدوراني الناتج عن دوران منحنى القطع الزائد القائم $x^2 - y^2 = a^2, z = 0$ حول محور y.

(٦) أوجد خطوط الانحناء والانحناءات الأساسية على السطح الدوراني الناتج عن دورات الخط $y = x$ حول محور y.

(٧) أوجد الانحناء الجاوسي والمتوسط للسطح الدوراني الناتج من دوران المنحنى $y = x^2$ حول محور y.

(٨) أثبت أن أي سطح دوراني يمكن أن يُطابق محلياً locally conformally مستوى.

(٩) أوجد الكميات الأساسية الأولى والثانية ومن ثم الانحناءات الأساسية للسطوح الدورانية الآتية:

(i) المجسم الزائدي ذو الطية الواحدة $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(ii) المجسم الزائدي الدوراني ذو الطيتين $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

(iii) المجسم المكافئ الدوراني $z^2=x^2+y^2$

(v) الكاتينويد (ناتج عن دوران منحنى السلسلة $y=\cosh x$ حول محور y).

(vi) سطح قارب النجاة torus

(vii) الكرة الكاذبة pseudo sphere

(**إرشاد:** في كل من السطوح الدورانية السابقة أوجد التمثيل البارامتري المناسب)

(١٠) بين أنه عند نقطة الأصل $(0,0,0)$ لسطح السرج $z = axy$ يكون الانحناء الجاوسي سالب ويساوي $-a^2$ وأن الانحناء المتوسط يساوي صفر.

(١١) بين أن سطح قارب النجاة الدوراني ينقسم إلى ثلاث أجزاء أحدهما مكون من نقاط ناقصية والثاني مكون من نقاط مكافئة والثالث مكون من نقاط زائدية.

(**إرشاد:** الإجابة توجد في مثال (٤.١١)).

(١٢) الأسطوانة الدائرية القائمة يمكن اعتبارها سطح دوراني أو سطح مسطر وضح ذلك.

(**إرشاد:** ارجع إلى تعريف السطح المسطر وكذلك السطح الدوراني).

(١٣) المخروط الدائري القائم يمكن اعتباره سطح مسطر أو سطح دوراني وضح ذلك.

(١٤) بين أن أي سطح دوراني يمكن تمثيله بارامترياً بحيث تكون صيغته التربيعية الأولى على الصورة

$$\mathrm{I}=(du^1)^2+g_{22}(u^1)(du^2)^2$$

(**إرشاد:** ارجع إلى التمثيلات البارامترية الخاصة للسطوح الدورانية).

(١٥) أوجد طول قوس المنحنى $u^1 = u^2$ الواقع على السطح الذي له

$$I = (du^1)^2 + \sinh^2 u^1 (du^2)^2$$

(**إرشاد:** ارجع إلى تعريف المسافة القوسية على السطح في الباب الثامن).

(١٦) أوجد التمثيل البارامتري المنتظم للسطوح الدورانية الآتية:

(i) $x^2 + y^2 = \cosh z$ (ii) $x^2 + z^2 = \cos x \, , 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(iii) $x^2 + y^2 = e^z$ (iv) $x^2 + z^2 = \sinh y \, , y > 0$

(١٧) للسطوح التي وردت في تمرين (١٦) أوجد كل من الانحناء الجاوسي والمتوسط والخطوط التقاربية وخطوط الانحناء.

(١٨) بين أن السطح الدوراني الوحيد الذي له الانحناء الجاوسي ثابت والانحناء المتوسط ثابت هو سطح الكرة.

(١٩) بين أن المستوى سطح يحقق أن $H = 0$، $K = 0$.

الباب الثالث عشر

النظرية الأساسية للسطوح

Fundamental Theory of Surfaces

في هذا الباب نعرض مفهوم الرصد المحلي لحركة ما على السطح من خلال راصد متحرك على السطح بالنسبة للإطار الثابت في الفراغ وهذا يعتبر تعميم لإطار فرينيه بالنسبة للمنحنيات. وفيه نقدم المعادلات الأساسية والتي تدعى معادلات جاوس - فينجارتن وما يتعلق بها من صيغ الارتباط وكيفية الاشتقاق للحقول المتجهة على السطح. وفي النهاية نقدم النظرية الأساسية للسطوح والتي تناظر النظرية الأساسية للمنحنيات في الباب السادس.

(١.١٣) المعادلات الأساسية على السطح:

نفرض أن لدينا سطح منتظم $M :X =X (u^{\alpha})$ في الفراغ الاقليدي ثلاثي البعد حيث $E^3=\mathbb{R}^3$ و $X =X (x^i)$ $(u^{\alpha})\in D\subset\mathbb{R}^2$ هي الإحداثيات بالنسبة للإطار $\{e_i\}$ للفراغ E^3 والإحداثيات المحلية على السطح بالنسبة لراصد متحرك على السطح على الترتيب.

كما في نظرية المنحنيات حيث أوجدنا صيغ لمعادلات تغير المماس والأعمدة على المنحنى عند أي نقطة عليه. نحاول الآن إيجاد صيغ مناسبة لتغير حقول المماسات X_{α} وحقل العمودي N على السطح M.

بما أن X_{α} ، N مستقلة خطياً وN متجه وحدة عمودي على X_{α} أي عمودي على المستوى المماس T_pM المولد بهذه المتجهات وعليه فإن فراغ كل الحقول المتجهة للفراغ E^3 والمقيدة على السطح (حقول متجهة نقط تأثيرها على السطح) يولد بحقول المتجهات X_{α},N . إذاً أي حقل متجه معرف على امتداد السطح هو تركيبة خطية من هذه المتجهات.

إذا كان X_α هو حقل المماس للخط البارامتري $u^\beta = \text{const.}$ ، $\alpha \neq \beta$

فإن مشتقة X_α بالنسبة للإحداثيات المحلية u^β يرمز له بالرمز $X_{\alpha\beta}$ حيث

$X_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial^2 X}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$ فمثلاً (أنظر الباب التاسع):

$$X_{11} = \frac{\partial^2 X}{\partial (u^1)^2}, X_{12} = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial u^2}$$

$$X_{22} = \frac{\partial^2 X}{\partial (u^2)^2} \;, X_{21} = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2 \partial u^1}$$

وحيث أن الدوال X، X_α متصلة ومعرفة وقابلة للاشتقاق، فإنه طبقاً **لنظرية ينج** (تفاضل وتكامل ٢) يكون الاشتقاق المختلط إبدالي أي أن

$$X_{\alpha\beta} = X_{\beta\alpha} \qquad (13.1)$$

المشتقات $X_{\alpha\beta}$ هي حقول متجه على امتداد السطح M وبالتالي فهي تركيبة خطية من X_γ ، N على الصورة

$$X_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma + L_{\alpha\beta} N \qquad (13.2)$$

حيث

$$< X_{\alpha\beta}, N > = L_{\alpha\beta} \qquad (13.3)$$

$$< X_{\alpha\beta}, X_\nu > = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \cdot g_{\gamma\nu} \qquad (13.4)$$

كما رأينا سابقاً (في الباب التاسع) أن $L_{\alpha\beta}$ هي الكميات الأساسية الثانية على السطح وهي المسئولة عن تحديد شكل السطح أي انحناءاته. الكميات $L_{\alpha\beta}$ هي مسقط المشتقة $X_{\alpha\beta}$ في اتجاه N أي هي مركبة $X_{\alpha\beta}$ في اتجاه العمودي على السطح (المركبة العمودية) بينما الكميات $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ تعرف على أنها مسقط $X_{\alpha\beta}$ على متجه الوحدة T_γ في اتجاه متجه المماس X_γ في المستوى المماس (المركبة المماسية). وإذا كانت الخطوط البارامترية متعامدة بمعنى أن $g_{12} = 0$ فإن المساقط للمشتقات $X_{\alpha\beta}$ يكون لها **تأويل هندسي** كالآتي:

$$P_{T_\gamma} X_{\alpha\beta} = < X_{\alpha\beta}, \frac{X_\gamma}{\sqrt{g_{\gamma\gamma}}} > = \frac{1}{\sqrt{g_{\gamma\gamma}}} < X_{\alpha\beta}, X_\gamma >$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g_{\gamma\gamma}}} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} g_{\gamma\gamma} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \sqrt{g_{\gamma\gamma}} \qquad (13.5)$$

حيث $\frac{X_\gamma}{\sqrt{g_{\gamma\gamma}}} = T_\gamma$ حقل متجه الوحدة في اتجاه المماس لخط γ البارامتري فمثلاً

$$P_{T_1} X_{11} = < X_{11}, \frac{X_1}{\sqrt{g_{11}}} > = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} < X_{11}, X_1 > = \Gamma^{1}_{11} \sqrt{g_{11}}$$

بالمثل

$$P_{T_2} X_{22} = < X_{22}, \frac{X_1}{\sqrt{g_{11}}} > = \Gamma^{1}_{22} \sqrt{g_{11}}$$

وكذلك

$$P_{T_1} X_{12} = < x_{12}, \frac{X_1}{\sqrt{g_{11}}} > = \Gamma^{1}_{21} \sqrt{g_{11}}$$

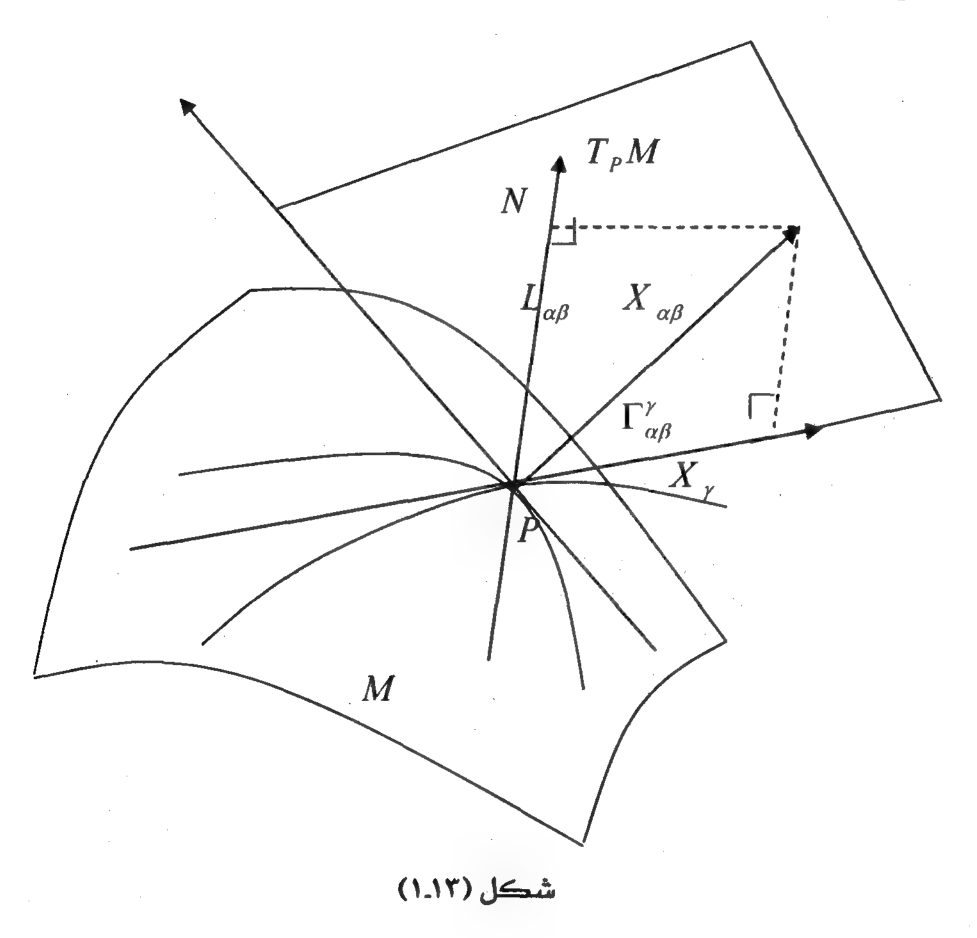
وعليه يمكن كتابة الشكل العام لصيغ الارتباط $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ (رموز كريستوفل) على الصورة (في حالة الشبكة البارامترية المتعامدة):

$$P_{T_\gamma} X_{\alpha\beta} = < X_{\alpha\beta}, \frac{X_\gamma}{\sqrt{g_{\gamma\gamma}}} > = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \sqrt{g_{\gamma\gamma}} \qquad (13.6)$$

حيث $\sqrt{g_{\gamma\gamma}}$ طول متجه المماس X_γ لخط u^γ البارامتري، $\gamma = 1,2$ ، T_γ متجه الوحدة في اتجاه المماس X_γ حيث الخطوط البارامترية متعامدة.

الكميات $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ تسمى صيغ الارتباط connection form وتعني مدى ارتباط حقل المتجه $X_{\alpha\beta}$ مع المستوى المماس T_pM بينما $L_{\alpha\beta}$ تعني صيغ الانحناء (الكميات

الأساسية الثانية) وتعني مدى ارتباط $X_{\alpha\beta}$ بالعمودي على السطح، وكذلك الانحناء العمودي k_n. وإذا اتفقنا على أن المشتقة الأولى X_α تعني السرعة فإن $X_{\alpha\beta}$ تعني التسارع وعليه فإن $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ تعني مركبة التسارع في اتجاه المستوى المماس (مستوى السرعات) بينما $L_{\alpha\beta}$ تعني مركبة التسارع في اتجاه العمودي N على السطح كما هو موضح في شكل (١.١٣).



شكل (١.١٣)

من تفاضل وتكامل (٤) رأينا أن صيغ الارتباط $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ ترتبط بصيغ الارتباط $\Gamma_{\alpha\beta.\gamma}$ من خلال العلاقة

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = g^{\gamma\nu}\,\Gamma_{\alpha\beta.\nu} \qquad (13.7)$$

حيث $g^{\gamma\nu}$ معكوس الممتد المتري $g_{\gamma\nu}$ على السطح M ، $g_{\gamma\nu} = \langle X_\gamma, X_\nu \rangle$.
صيغ الارتباط $\Gamma_{\alpha\beta,\nu}$ تعرف من العلاقة

$$\Gamma_{\alpha\beta,\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\nu}\right) \qquad (13.8)$$

وتسمى رموز كريستوفل من النوع الأول بينما صيغ الارتباط $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ تسمى رموز كريستوفل من النوع الثاني. وباستخدام تعريف $g_{\alpha\beta}$ حيث

$$g_{\alpha\beta} = \langle X_\alpha, X_\beta \rangle \qquad (13.9)$$

وبتفاضل الطرفين بالنسبة إلى u^γ نحصل على

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} = \langle X_{\alpha\gamma}, X_\beta \rangle + \langle X_\alpha, X_{\beta\gamma} \rangle \qquad (13.10)$$

وبالتعويض من المعادلات (13.2)، (13.9) نحصل على

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} = \Gamma^\nu_{\alpha\gamma} g_{\nu\beta} + \Gamma^\nu_{\beta\gamma} g_{\alpha\nu} \qquad (13.11)$$

وبتكرار نفس الخطوات على

$$g_{\beta\gamma} = \langle X_\beta, X_\gamma \rangle,\ g_{\gamma\alpha} = \langle X_\gamma, X_\alpha \rangle$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى u^α ، u^β على الترتيب والتعويض من (13.2)، (13.9) نحصل على:

$$\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} = \Gamma^\nu_{\beta\alpha} g_{\gamma\nu} + \Gamma^\nu_{\gamma\alpha} g_{\beta\nu}, \qquad (13.12)$$

$$\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta} = \Gamma^\nu_{\gamma\beta} g_{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} g_{\gamma\nu} \qquad (13.13)$$

بجمع (13.12)، (13.13) وطرح (13.11) نحصل على:

$$2g_{\gamma\nu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}=(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^{\beta}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}) \qquad (13.14)$$

بضرب الطرفين في الممتد المتري $g^{\gamma\mu}$ (معكوس $g_{\gamma\nu}$) نحصل على

$$2g^{\gamma\mu}g_{\gamma\nu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}=g^{\gamma\mu}(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^{\beta}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}})$$

$$\therefore\ 2\delta^{\mu}_{\nu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}=g^{\gamma\mu}(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^{\beta}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}})$$

هذا المقدار ليس له قيمة إلا في حالة $\nu=\mu$

$$\therefore\ \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\gamma\nu}(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^{\alpha}}+\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^{\beta}}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}) \qquad (13.15)$$

ملاحظة (١.١٣):

من $X_{\alpha\beta}=X_{\beta\alpha}$ نجد أن $\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}=\Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}$ أي أنها متماثلة في الأدلة السفلية.

بالنسبة لحقل متجه الوحدة العمودي N يتحقق

$$<N,N>=1,<N,N_{\alpha}>=0,<N,X_{\alpha}>=0 \qquad (13.16)$$

من هذه العلاقات يتضح أن حقل المتجه $N_{\alpha}=\frac{\partial N}{\partial u^{\alpha}}$ ليس له أي مركبة في اتجاه العمودي N بل هو واقع في المستوى المماس T_pM حيث أنه يعرف مؤثر الشكل أو راسم فينجارتن (أنظر الباب العاشر).

$$\therefore\ N_{\alpha}=a^{\beta}_{\alpha}X_{\beta} \qquad (13.17)$$

وباستخدام العلاقة (10.14) في الباب العاشر حيث

$$<N_{\alpha},X_{\gamma}>=-L_{\alpha\gamma} \qquad (13.18)$$

نجد أن

$$<a^{\beta}_{\alpha}X_{\beta},X_{\gamma}>=a^{\beta}_{\alpha}<X_{\beta},X_{\gamma}>\ =a^{\beta}_{\alpha}g_{\beta\gamma}$$

$$\therefore L_{\alpha\gamma} = -a_{\alpha}^{\beta}\, g_{\beta\gamma} \qquad (13.19)$$

ولإيجاد عناصر المصفوفة (a_{α}^{β}) نضرب الطرفين في معكوس المصفوفة $(g_{\beta\gamma})$ أو بالضرب في الممتد $g^{\gamma\nu}$ وعمل اختزال (تفاضل وتكامل (٤)).

$$\therefore L_{\alpha\gamma}\, g^{\gamma\nu} = -a_{\alpha}^{\beta}\, g_{\beta\gamma}\, g^{\gamma\nu} = -a_{\alpha}^{\beta}\, \delta_{\beta}^{\nu}$$

وهذا المقدار ليس له قيمة إلا عندما $\nu = \beta$. إذاً

$L_{\alpha\gamma}\, g^{\gamma\nu} = -a_{\alpha}^{\nu}$ أو ما يكافئ

$$a_{\alpha}^{\beta} = -L_{\alpha\gamma}\, g^{\gamma\beta} \qquad (13.20)$$

وبأسلوب الاختزال (الانكماش في الممتدات) نجد أن

$$a_{\alpha}^{\beta} = -L_{\alpha\gamma}\, g^{\gamma\beta} = -L_{\alpha}^{\beta} \qquad (13.21)$$

وبالتعويض في (13.17) نجد أن

$$N_{\alpha} = -L_{\alpha}^{\beta} X_{\beta}\ ,\ L_{\alpha}^{\beta} = L_{\alpha\gamma}\, g^{\gamma\beta} \qquad (13.22)$$

ملاحظة (٢،١٣):

الضرب في $g^{\alpha\beta}$ لمعادلة ممتدية .Tensor eq وعمل اختزال يرفع دليل سفلي والضرب في $g_{\alpha\beta}$ وعمل اختزال يخفض دليل علوي.

وبالتالي نكون قد توصلنا إلى أنه بالنسبة للإطار $\{X_1, X_2, N\}$ على السطح المنتظم M فإن المعادلات الأساسية (نعني المشتقات الجزئية لحقول متجهات الإطار بالنسبة للإحداثيات المحلية (u^1, u^2) تعطى على الصورة

$$X_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} X_{\gamma} + L_{\alpha\beta} N \qquad (13.23)$$

$$N_{\alpha} = -L_{\alpha}^{\gamma} X_{\gamma} \qquad (12.24)$$

المعادلة الأولى هي عبارة عن ثلاث معادلات تفاضلية جزئية اتجاهية تربط المشتقات $X_{\alpha\beta}$ ، X_{γ} ، N وتسمى معادلات جاوس، والمعادلة الثانية هي عبارة عن

معادلتين تفاضليتين جزئيتين تربط X_γ ، N_α وتسمى معادلات فينجارتن. والمعادلات (13.23)، (13.24) تسمى معادلات جاوس **- فينجارتن** على السطح المنتظم Gauss – Weingarten equations أو G-W equations.

معادلات جاوس فينجارتن والتحويلات الخطية:

باستخدام المصفوفات يمكن كتابة معادلات جاوس **فينجارتن** على الصورة

$$\frac{\partial F}{\partial u^1}=A\,F\ ,\ \frac{\partial F}{\partial u^2}=B\,F \qquad (13.25)$$

حيث

$$F=\begin{pmatrix}X_1 & X_2 & N\end{pmatrix}^t,$$

$$A=\left(\begin{array}{c:c}\Gamma^\gamma_{\alpha 1} & L_{\alpha 1}\\ \hdashline -L^\gamma_1 & O\end{array}\right), \qquad (13.26)$$

$$B=\left(\begin{array}{c:c}\Gamma^\gamma_{\alpha 2} & L_{\alpha 2}\\ \hdashline -L^\gamma_2 & O\end{array}\right), \qquad (13.27)$$

واضح أن A، B مصفوفات ذات أبعاد 3×3 ولكنها كتبت بأسلوب المصفوفات المجزئة أي عناصرها مصفوفات تعطى من

$$\left(\Gamma^\gamma_{\alpha 2}\right)=\begin{pmatrix}\Gamma^1_{12} & \Gamma^2_{12}\\ \Gamma^1_{22} & \Gamma^2_{22}\end{pmatrix}, \qquad (13.28)$$

$$\left(L_{\alpha 2}\right)=\begin{pmatrix}L_{12} & L_{22}\end{pmatrix}^t\ ,\left(\Gamma^\gamma_2\right)=\begin{pmatrix}L^1_2 & L^2_2\end{pmatrix}, \qquad (13.29)$$

$$\left(\Gamma^\gamma_{\alpha 1}\right)=\begin{pmatrix}\Gamma^1_{11} & \Gamma^2_{11}\\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^2_{21}\end{pmatrix}, \qquad (13.30)$$

$$\left(L_{\alpha 1}\right)=\begin{pmatrix}L_{11} & L_{21}\end{pmatrix}^t, \qquad (13.31)$$

$$\left(L_1^\gamma\right)=\left(L_1^1 \quad L_1^2\right),$$

حيث

$$\frac{\partial}{\partial u^1}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & L_{11} \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{21}^2 & L_{21} \\ -L_1^1 & L_1^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ N \end{bmatrix}, \qquad (13.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^2}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & L_{12} \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & L_{22} \\ -L_2^1 & L_2^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ N \end{bmatrix}, \qquad (13.33)$$

أو بشكل مختصر

$$\frac{\partial}{\partial u^\beta}F=\begin{bmatrix} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma & L_{\alpha\beta} \\ -L_\beta^\gamma & 0 \end{bmatrix}F \qquad (13.34)$$

حيث $\alpha,\beta,\gamma=1,2$. المصفوفات $A,\ B$ تسمى مصفوفات جاوس فينجارتن (دوال مصفوفية) وهي معرفة عند كل نقطة من نقاط السطح M أي أن

$$X(u^1,u^2)\in M \to A=A(u^\alpha)\ \ ,B=B(u^\alpha)\in GL(3,\mathbb{R})$$
$$\forall (u^1,u^2)\in D\subset\mathbb{R}^2$$

حيث $GL(3,\mathbb{R})$ زمرة كل التحويلات المعرفة بالمصفوفات $A,\ B$ على السطح وحيث أن المصفوفات $A,\ B$ تعتمد على بارامترات السطح u^1,u^2 فإن هذه الزمر تسمى زمر بارامترية ذات بارامترين 2-parametric group . هذه الزمرة لها كل خواص زمر التحويلات بالإضافة إلى خصائص قابلية التفاضل والاتصال الموروثة من مفاهيم السطح المنتظم. هذه الزمر تسمى زمر لي البارامترية المعرفة على السطح المنتظم parametric Lee group . هذه الزمر عرفت من خلال نظام المعادلات التفاضلية الجزئية (13.23)، (13.24) المعرف على السطح المنتظم. وبالتالي يمكن القول أن زمر لي

البارامترية هي تزاوج غير طبيعي بين الجبر والهندسة والمعادلات التفاضلية والفيزياء. هذا التزاوج أدى إلى نتائج غاية في الأهمية سوف يلمسها الطالب في دراسته المستقبلية.

مثال (١٠.١٣):

أوجد معادلات جاوس فينجارتن على المستوى.

الحل:

المستوى في الفراغ الثلاثي يعرف من خلال التمثيل الاتجاهي

$$X(u^1,u^2)=(a_1u^1+a_2u^2+a_3, b_1u^1+b_2u^2+b_3, c_1u^1+c_2u^2+c_3)$$

أي أنه معرف من خلال دالة اتجاهية كل مركبة من مركباتها دالة خطية في u^1 ، u^2 . المشتقات الجزئية للدالة $X=X(u^1,u^2)$ تعطى من

$$X_1=(a_1,b_1,c_1)\ ,\ X_2=(a_2,b_2,c_3)\ ,\ X_{\alpha\beta}=0\ ,\ \forall\ \alpha,\beta$$

إذاً الكميات المترية على المستوى تعطى من

$$g_{11}=a_1^2+b_1^2+c_1^2=\text{const.}\ ,$$

$$g_{22}=a_2^2+b_2^2+c_2^2=\text{const.}\ ,$$

$$g_{12}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=\text{const.}$$

بما أن $g_{\alpha\beta}=\text{const.}$ إذاً $\Gamma_{\alpha\beta.\gamma}=0$ وبالتالي فإن $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}=0$ (من التعريف).

وكذلك فإن

$$L_{\alpha}^{\beta}=g^{\beta\gamma}L_{\alpha\beta}=g^{\beta\gamma}<X_{\alpha\gamma},N>=0\ \ (X_{\alpha\gamma}=0\ ,\ \forall\alpha,\gamma\ )$$

إذاً معادلات جاوس ـ فينجارتن على المستوى هي

$$X_{\alpha\beta}=0\ ,\ N_{\alpha}=0\ \ ,\ \forall\alpha,\beta \qquad (10.35)$$

وبالتالي فإن مصفوفات لي البارامترية على المستوى هي مصفوفات صفرية. أي

$$A=0\ ,\ B=0 \qquad (10.36)$$

مثال (٢.١٣):

أوجد المعادلات الأساسية على سطح الأسطوانة العامة ومن ثم أوجد مصفوفات لي البارامترية.

الحل:

الأسطوانة العامة هي أسطوانة مقامة على منحنى مستوٍ $y=f(x), z=0$

إذاً تمثيلها الاتجاهي يعطى من

$$X(u^1,u^2)=(u^1,f(u^1),u^2)$$

حيث $u^1 \in I \subset \mathbb{R}$ ، $u^2 \in \mathbb{R}$ ، f دالة قابلة للتفاضل كما نريد (دالة منتظمة). إذاً المشتقات التفاضلية الجزئية هي

$$X_1=(1,f',0)\,,\,X_2=(0,0,1)\,,$$

$$X_{11}=(0,f'',0)\,,X_{22}=(0,0,0)\,,X_{12}=(0,0,0)$$

إذاً الكميات الأساسية الأولى هي

$$g_{11}=1+f'^2\,,\,g_{22}=1,g_{12}=0,g=1+f'^2\,,$$

$$g^{11}=\frac{1}{1+f'^2}\,,g^{12}=0,g^{22}=1\,. \qquad (13.37)$$

حقل وحدة المتجهات في اتجاه العمودي على سطح الأسطوانة هو

$$N=\frac{X_1\wedge X_2}{\sqrt{g}}=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}(f',-1,0),$$ (حقل في u^1 فقط)

وبالتالي فإن الكميات الأساسية الثانية هي

$$L_{11}=\langle X_{11},N\rangle=\frac{-f''}{\sqrt{1+f'^2}}\,,L_{12}=0,L_{22}=0 \qquad (13.38)$$

ومن تعريف الكميات $L_\alpha^\beta=g^{\beta\gamma}L_{\alpha\gamma}$ نجد أن

$$L_1^1 = g^{1\gamma} L_{1\gamma} = g^{11} L_{11} + g^{12} L_{12}$$

وبالتعويض عن L_{12} ، L_{11} ، g^{11} ، g^{12} نجد أن

$$L_1^1 = -\frac{f''}{(1+f'^2)} = -k_c \qquad (13.39)$$

حيث k_c انحناء منحنىٰ قاعدة الأسطوانة الذي تمثيله البارامتري

$$r(u^1) = (u^1, f(u^1), 0)$$

بالمثل يمكن حساب الكميات الأساسية الثانية L_α^β كالآتي:

$$L_1^2 = g^{2\gamma} L_{1\gamma} \quad = g^{21} L_{11} + g^{22} L_{12} = 0,$$

$$L_2^1 = g^{1\gamma} L_{2\gamma} \quad = g^{11} L_{21} + g^{12} L_{22} = 0,$$

$$L_2^2 = g^{2\gamma} L_{2\gamma} \quad = g^{21} L_{21} + g^{22} L_{22},$$

$$= 0 - \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}}$$

$$\therefore\ L_2^2 = -\frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}} = -\frac{f''(1+f'^2)}{(1+f'^2)^{3/2}}$$

$$= -k_c\, g_{11} \qquad (13.40)$$

حيث g_{11} تمثل هنا دالة القياس على منحنى القاعدة للأسطوانة وتعطىٰ من

$$\frac{ds}{du^1} = \sqrt{g_{11}} = \left|\frac{dX}{du^1}\right| = \langle X_1, X_1 \rangle^{\frac{1}{2}} = 1 + f'^2$$

حيث s بارامتر طول القوس على امتداد منحنى القاعدة.

صيغ الارتباط $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ تعطى من (أنظر التعريف):

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = g^{\gamma\nu} \Gamma_{\alpha\beta.\nu} = \frac{1}{2} g^{\gamma\nu} \left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\nu}\right)$$

فمثلاً

$$\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2}g^{12}(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}+\frac{\partial g_{21}}{\partial u^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1})$$

من تعريف $g_{\alpha\beta}$ نجد أن g_{11} دالة في u^1 فقط و $g^{12}=g_{12}=0$ ، $g_{22}=1$ إذاً

$$\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2}g^{11}(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1})+\frac{1}{2}g^{12}(---)$$

$$=\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}+\text{zero}=\frac{f'f''}{1+f'^2}$$

بالمثل نجد أن $\Gamma^2_{11}=0$

وكذلك يمكن الحصول على

$$\Gamma^1_{12}=\frac{1}{2}g^{12}(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^1}+\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1})$$

$$=\frac{1}{2}g^{11}(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1})$$

$$+\frac{1}{2}g^{12}(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}+\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1})$$

$$\therefore\ \Gamma^1_{12}=0\ ,\ \Gamma^1_{21}=0$$ (من تعريف $g_{\alpha\beta}$)

وبالمثل نجد أن

$$\Gamma^1_{22}=\frac{1}{2}g^{12}(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2}+\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1})$$

$$=\frac{1}{2}g^{11}(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2}+\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1})$$

$$+\frac{1}{2}g^{12}(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}-\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1})$$

$$=\text{zero}+\text{zero},$$

$$\Gamma_{22}^{2}=\frac{1}{2}g^{2\nu}(\frac{\partial g_{2\nu}}{\partial u^{2}}+\frac{\partial g_{\nu 2}}{\partial u^{2}}-\frac{\partial g_{22}}{\partial u^{2}}) = \text{zero} \ ,$$

$$\Gamma_{12}^{2}=\frac{1}{2}g^{2\nu}(\frac{\partial g_{1\nu}}{\partial u^{2}}+\frac{\partial g_{\nu 2}}{\partial u^{1}}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u^{2}})$$

$$=\frac{1}{2}g^{21}(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^{2}}+\frac{\partial g_{12}}{\partial u^{1}}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u^{2}})$$

$$+\frac{1}{2}g^{22}(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^{2}}+\frac{\partial g_{22}}{\partial u^{1}}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u^{2}})$$

$$= \text{zero} + \text{zero},$$

بالمثل يكون لدينا $\Gamma_{21}^{2}=0$

إذاً معادلات جاوس تأخذ الصورة

$$X_{11}=\Gamma_{11}^{\gamma}X_{\gamma}+L_{11}N$$

$$=\Gamma_{11}^{1}X_{1}+\Gamma_{11}^{2}X_{2}+L_{11}N$$

$$=(\frac{f'f''}{1+f'^{2}})X_{1}-\frac{f''}{\sqrt{1+f'^{2}}}N \qquad (\text{من قيم } \Gamma_{11}^{1},\Gamma_{11}^{2})$$

$$\therefore X_{11}=\frac{f''}{\sqrt{1+f'^{2}}}(\frac{f'}{\sqrt{1+f'^{2}}}X_{1}-N)$$

بالمثل نجد أن

$$X_{12}=X_{21}=0 \ , \quad X_{22}=0 \ .$$

ومعادلات فينجارتن تأخذ الصوزة

$$N_{\alpha}=-L_{\alpha}^{\beta}X_{\beta}=-L_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta}X_{\beta} \qquad (\text{صيغة جمعية على } \beta)$$

$$\therefore N_{\alpha}=-L_{\alpha\gamma}g^{\gamma 1}X_{1}-L_{\alpha\gamma}g^{\gamma 2}X_{2} \qquad (\text{صيغة جمعية على } \gamma)$$

$$=-(L_{\alpha 1}g^{11}+L_{\alpha 2}g^{21})X_{1}-(L_{\alpha 1}g^{12}+L_{\alpha 2}g^{22})X_{2}$$

وبوضع $\alpha=1,2$ يكون لدينا

$$N_1 = -(L_{11}g^{11} + L_{12}g^{21})X_1 - (L_{11}g^{12} + L_{12}g^{22})X_2, (\alpha = 1)$$

وبالتعويض عن $g^{\alpha\beta}$ ، $L_{\alpha\beta}$ نحصل على

$$N_1 = -L_{11}g^{11}X_1$$

ومن (13.37) نجد أن

$$N_1 = \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}} \cdot \frac{1}{1+f'^2} X_1 = k_c X_1$$

$$\therefore N_1 = k_c X_1 \qquad (13.41)$$

بالمثل وبوضع $\alpha = 2$ نجد أن $N_2 = 0$ (لأن حقل العمودي على الأسطوانة N دالة في u^1 فقط)

إذاً معادلات فينجارتن على سطح الأسطوانة هي (أنظر مؤثر الشكل في الباب العاشر):

$$N_1 = k_c X_1, \; N_2 = 0 \qquad (13.42)$$

ملاحظة (٣.١٣):

من العلاقات (13.42) يتضح أن الانحناء في اتجاه المماسات لمنحنيات القاعدة (الدليل) هو انحناء منحنى القاعدة بينما الانحناء في اتجاه رواسم الأسطوانة منعدم.

تفسير هندسي لمعادلات جاوس:

معادلات جاوس (13.23) يمكن كتابتها على الصورة

$$\nabla_\beta X_\alpha = X_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma = L_{\alpha\beta} N \qquad (13.43)$$

$$= X_{\alpha\beta} \text{ - Tangential Comp -}$$

إذاً $\nabla_\beta X_\alpha$ هي المسقط العمودي لحقل المتجه $X_{\alpha\beta}$ على المستوى المماس $T_P M$ وتساوي $L_{\alpha\beta}N$.

حيث ∇_β يعني المشتقة موافقة التغير covariant derivative في اتجاه X_β

وتعرف لأي متجه A_i موافق التغير covariant vector على الصورة

$$\nabla_j A_i = A_{i.j} - \Gamma_{ij}^k A_k = \frac{\partial A_i}{\partial u^j} - \Gamma_{ij}^k A_k \qquad (13.44)$$

وفي حالة $X_\alpha = A_\alpha$ متجه مماس (اتجاه في المستوى المماس) فإن

$$A_{\alpha.\beta} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial u^\beta} = \frac{\partial}{\partial u^\beta} X_\alpha = \frac{\partial^2 X}{\partial u^\beta \partial u^\beta} = X_{\alpha\beta}$$

(٢.١٣) إطار عياري متعامد على السطح المنتظم:

Orthonormal Frame Field on a Regular Surface:

في المنحنيات (الباب الرابع) رأينا أنه على امتداد المنحنى المنتظم في الفراغ $E^3 = \mathbb{R}^3$ يوجد ثلاثي متحرك (T, n, b) وهو إطار فرينيه وأوجدنا صيغ فرينيه التي تعطي معدل تغير الإطار. ولكن هنا تعاملنا مع الإطار $\{X_1, X_2, N\}$ على امتداد السطح المنتظم ولكنه ليس عياري متعامد وأوجدنا له صيغ الارتباط وصيغ الانحناء من خلال معادلات G-W التي تناظر صيغ فرينيه لمنحنى الفراغ.

السؤال الذي يطرح نفسه الآن هل على امتداد نقاط السطح المنتظم $X = X(u^\alpha)$ يمكن بناء إطار عياري متعامد متحرك يصلح للدراسة المحلية على السطح أي بالنسبة لمراقب observer على السطح منسوب إلى الإطار الثابت $\{e_i\}$ (إطار الفراغ الإقليدي الحاوي للسطح).

الإجابة نعم وذلك بتكوين أساس عياري متعامد من المجموعة المستقلة خطياً $\{X_1, X_2, N\}$ والتي تولد فراغ حقول المتجهات المعرفة على السطح M وذلك باستخدام طريقة جرام شميدت Gram-Schmidt (جبر خطي) كالتالي:

نفرض أن

$$E_1 = \frac{X_1}{\sqrt{g_{11}}}, \qquad \text{(متجه وحدة)} \qquad (13.45)$$

$$\tilde{X}_2 = X_2 - \langle X_2, E_1 \rangle E_1,$$

$$E_2 = \frac{\tilde{X}_2}{\|\tilde{X}_2\|}$$ (متجه وحدة)

ومن خواص الضرب الداخلي نجد أن

$$\|\tilde{X}_2\|^2 = <\tilde{X}_2, \tilde{X}_2> = <X_2, X_2> + <X_2, E_1>^2 - 2<X_2, E_1>^2$$

$$= <X_2, X_2> - <X_2, E_1>^2$$

$$= g_{22} - <X_2, \frac{X_1}{\sqrt{g_{11}}}>^2$$

$$= g_{22} - \frac{1}{g_{11}} <X_2, X_1>^2$$

ومن تعريف الكميات المترية $g_{\alpha\beta}$ نحصل على:

$$\|\tilde{X}_2\|^2 = g_{22} - \frac{g_{12}^2}{g_{11}} = \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{g_{11}}$$

$$\therefore \|\tilde{X}_2\|^2 = \frac{g}{g_{11}} \Rightarrow \|\tilde{X}_2\| = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}}}$$

$$\therefore E_2 = \sqrt{g_{11}} \frac{(X_2 - <X_2, E_1> E_1)}{\sqrt{g}}$$

$$= \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} (X_2 - <X_2, \frac{X_1}{\sqrt{g_{11}}}> \frac{X_1}{\sqrt{g_{11}}})$$

$$= \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}} (X_2 - \frac{g_{12}X_1}{g_{11}})$$ (من تعريف g_{12})

$$\therefore E_2 = \frac{1}{\sqrt{g}\sqrt{g_{11}}} (g_{11}X_2 - g_{12}X_1), \quad (13.46)$$

إذاً الإطار العياري المتعامد المتحرك orthonormal frame field على امتداد السطح يصبح هو

$$\{E_i\}\ ,\ i=1,2,3$$

حيث $E_\alpha\ ,\alpha=1,2$ متجهات وحدة متعامدة تولد المستوى المماس T_pM ومتعامدة على حقل متجه الوحدة العمودي N على السطح M بحيث

$$E_1=\frac{X_1}{\sqrt{g_{11}}}\ ,\ E_2=\frac{1}{\sqrt{g}\ \sqrt{g_{11}}}(g_{11}X_2-g_{12}X_1),E_3=N \quad (13.47)$$

مثال (٣.١٣):

أوجد حقل إطار عياري متعامد على سطح الأسطوانة.

الحل:

من مثال (٢.١٣) نجد أن

$$g_{11}=1+f'^2\ ,\ g_{22}=1,g_{12}=0$$

وباستخدام (13.47) نحصل على

$$E_1=\frac{X_1}{\sqrt{1+f'^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}(1,f',0),$$

$$E_2=(0,0,1),\quad E_3=N=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}(-f',1,0)$$

واضح أن $<E_i,E_j>=\delta_{ij}$ ويحقق

$$\begin{bmatrix}E_1\\E_2\\E_3\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\begin{bmatrix}1 & f' & 0\\0 & 0 & \sqrt{1+f'^2}\\-f' & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{bmatrix}$$

مثال (٤.١٣):

كون إطار عياري متعامد على سطح الكرة.

الحل:

من مثال (١٢.٧) نجد أن (أنظر الباب السابع والثامن):

$$g_{11}=a^2 \ , g_{22}=a^2\sin^2\theta \ , g_{12}=0$$

أي أن الخطوط البارامترية متعامدة، إذاً وبالتعويض في (13.47) نحصل على

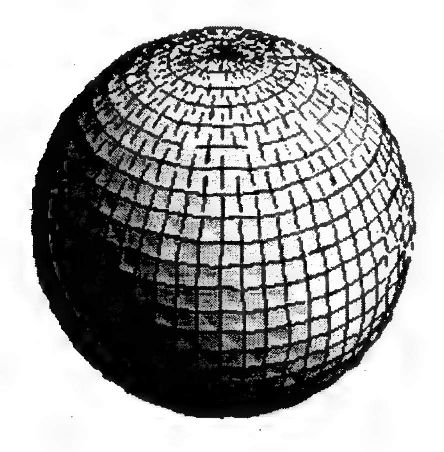
$$E_1=\frac{X_1}{\sqrt{g_{11}}}=(\cos\theta\cos\phi,\cos\theta\sin\phi,\sin\theta),$$

$$E_2=\frac{X_2}{\sqrt{g_{22}}}=(-\sin\phi.\cos\phi,0),$$

$$E_3=N=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)=\frac{1}{a}X(\theta,\phi),$$

حيث (θ,ϕ) هي الإحداثيات المحلية لأي نقطة على سطح الكرة حيث الرقعة الإحداثية تعطى من (التمثيل الجيوجرافي) كما في شكل (٢.١٣)

$$X(\theta,\phi)=a(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)$$



شكل (٢.١٣): سطح الكرة

(٣.١٣) الشروط التكاملية Integrable Conditions

نعني بالشروط التكاملية هي الشروط التي تجعل لنظام المعادلات التفاضلية الجزئية G-W حل موجود ووحيد وهذا يتطلب أن الاشتقاق الجزئي المختلط للدوال $X_{\alpha\beta}$ ، N_{α} يحقق خاصية الإبدال. أي أن

$$X_{\alpha\beta\gamma}=X_{\alpha\gamma\beta},X_{\alpha\beta\gamma}=X_{\beta\alpha\gamma},N_{\alpha\beta}=N_{\beta\alpha} \qquad (13.48)$$

على غرار ما هو معروف بالنسبة للدوال الحقيقية في أكثر من متغير (نظرية ينج في تفاضل وتكامل (٣)).

المشتقات المختلطة (13.48) يمكن كتابتها في شكل أكثر وضوحاً كالآتي:

$$X_{112}=X_{121},X_{221}=X_{212},N_{12}=N_{21} \qquad (13.49)$$

وباشتقاق معادلات جاوس (13.2) نحصل على

$$X_{112}=\Gamma^1_{11.2}X_1+\Gamma^1_{11}X_{12}+\Gamma^2_{11.2}X_2+$$
$$+\Gamma^2_{11}X_{22}+L_{11.2}N+L_{11}N_2,$$

$$X_{121}=\Gamma^1_{12.1}X_1+\Gamma^1_{12}X_{11}+\Gamma^2_{12.1}X_2+$$
$$+\Gamma^2_{12}X_{21}+L_{12.2}N+L_{12}N_1$$

حيث $\frac{\partial}{\partial u^{\mu}}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}=\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta.\mu}$.

ومن المساواة $X_{112}=X_{121}$ يكون لدينا

$$\begin{aligned}&\mu_1X_1+\mu_2X_{11}+\mu_3X_{12}+\mu_4X_{22}+\mu_5X_2\\&+\mu_6N+\mu_7N_1+\mu_8N_2=0\end{aligned} \qquad (13.50)$$

حيث $\mu_1,\mu_2,...,\mu_8$ دوال في رموز كريستوفل، $L_{\alpha\beta}$ ومشتقاتها.

وبالتعويض عن $X_{\alpha\beta}$ ، N_{α} من معادلات جاوس (13.2) نحصل على

$$A_1X_1+B_1X_2+C_1N=0 \qquad (13.51)$$

بالمثل فإن مساواة المشتقات المختلطة الأخرى تعطى الآتي:

$$A_2X_1+B_2X_2+C_2N=0 \qquad (13.52)$$

$$A_3X_1+B_3X_2+C_3N=0 \qquad (13.53)$$

وبما أن X_1, X_2, N حقول متجه مستقلة خطياً فإن المعاملات

$$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$$

يجب أن تساوي صفراً. دعنا نقوم بحساب

$$A_1=B_1=C_1=0$$

أي أن

$$\Gamma^1_{11.2}X_1+\Gamma^1_{11}X_{12}+\Gamma^2_{11.2}X_2+\Gamma^2_{11}X_{22}+L_{11.2}N+L_{11}N_2=$$
$$\Gamma^1_{12.1}X_1+\Gamma^1_{12}X_{11}+\Gamma^2_{12.1}X_2+\Gamma^2_{12}X_{21}+L_{12.1}N+L_{12}N_1 \quad (13.54)$$

وبالتعويض عن $X_{\alpha\beta}$ ، N_α من معادلات جاوس (13.2) نحصل على

$$\Gamma^1_{11.2}X_1+\Gamma^1_{11}(\Gamma^\alpha_{12}X_\alpha+L_{12}N)+\Gamma^2_{11.2}X_2+\Gamma^2_{11}(\Gamma^\alpha_{22}X_\alpha+L_{22}N$$
$$+L_{11.2}N+L_{11}(-L^\alpha_2X_\alpha)=\Gamma^1_{12.1}X_1+\Gamma^1_{12}(\Gamma^\alpha_{11}X_\alpha+L_{11}N)+\Gamma^2_{12.1}X_2+$$
$$+\Gamma^2_{12}(\Gamma^\alpha_{12}X_\alpha+L_{12}N)+L_{12.1}N+L_{12}(-L^\alpha_1X_\alpha) \quad (13.55)$$

بمساواة معاملات X_1 على الطرفين في (13.55) نحصل على

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12}+\Gamma^1_{11.2}+\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22}-L_{11}L^1_2=\Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11}+\Gamma^1_{12.1}+\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{21}-L_{12}L^1_1$$

وبترتيب الحدود يكون لدينا

$$\Gamma^1_{11.2}-\Gamma^1_{12.1}-\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{21}+\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22}=L_{11}L^1_2-L_{12}L^1_1$$

وباستخدام العلاقات $L^\beta_\alpha=g^{\beta\gamma}L_{\gamma\alpha}$ نحصل على

$$\Gamma^1_{11.2}-\Gamma^1_{12.1}+\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22}-\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{21}=-g_{12}K \qquad (13.56)$$

وبمساواة معامل X_2 على الطرفين في (13.55) نحصل على

$$\Gamma^2_{12.1}-\Gamma^2_{11.2}+\Gamma^2_{22}\Gamma^2_{11}+\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}-\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}=L_{12}L^2_1-L_{11}L^2_2$$

$$=-L_{12}L_{12}g^{12}+L_{11}L_{22}g^{22}$$

$$=-\frac{g_{11}}{g}(L_{11}L_{22}-L^2_{12})=-g_{11}\frac{L}{g}=-g_{11}K \qquad (13.57)$$

أو ما يكافئ

$$\Gamma^2_{12.1}-\Gamma^2_{11.2}+\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}+\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12}-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}-\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}=-g_{11}K \quad (13.58)$$

العلاقات (13.56)، (13.58) تسمى صيغ جاوس لحساب الانحناء الجاوسي باستخدام الصيغة الأساسية الأولى $\mathrm{I}=g_{\alpha\beta}du^{\alpha}$.

وبمساواة معاملات N على طرفي العلاقة (13.55) نحصل على

$$L_{11.2}-L_{12.1}=L_{11}\Gamma^1_{12}+L_{12}(\Gamma^2_{12}-\Gamma^1_{11})-g\,L_{22}\Gamma^2_{11} \quad (13.59)$$

العلاقات $A_2=B_2=0$ تعطي صيغ جاوس أيضاً بينما $C_2=0$ تعطي

$$L_{12.2}-L_{22.1}=L_{22}\Gamma^1_{22}+L_{12}(\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{12})-L_{22}\Gamma^2_{12} \quad (13.60)$$

العلاقات (13.59) ، (13.60) تسمى معادلات كوداسي . منيردا Mainardi-Codazzi بينما المعادلات (13.56)، (13.58) تسمى صيغ جاوس وبالتالي نكون قد توصلنا إلى ثلاث معادلات مستقلة من مساواة المشتقات المختلطة وهي صيغة جاوس ومعادلتي كوداسي ـ منيردا.

ملاحظة (٤.١٣):

من صيغ جاوس يتضح معنى أن الانحناء الجاوسي صيغة ذاتية intrinsic property للسطح.

مما سبق التوصل إليه نكون قد توصلنا إلى نظرية جاوس التي تنص على:

نظرية (١٣.١) (Theorem Egregium of Gauss):

الانحناء الجاوسي للسطح يمكن التعبير عنه بدلالة الكميات الأساسية الأولى $g_{\alpha\beta}$ ومشتقاتها $g_{\alpha\beta:\gamma}$ فقط.

البرهان:

من الصيغ (13.56)، (13.58) وتعريف صيغ الارتباط $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ وإجراء الاختصارات المناسبة نحصل على الصيغ الآتية:

الانحناء الجاوسي K (نظرية جاوس) يعطى من خلال $g_{\alpha\beta}$ على الصورة

$$K=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\Gamma^2_{11}\right)-\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\Gamma^2_{12}\right)\right) \qquad (13.61)$$

حيث $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ هي صيغ الارتباط المناظرة للصيغة الأساسية الأولى على السطح.

أو ما يكافئ

$$K=\frac{1}{g^2}\left(Det\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{12:2}-\frac{1}{2}g_{22:1} \\ g_{12} & g_{22} & \frac{1}{2}g_{22:2} \\ \frac{1}{2}g_{11:1} & a & b \end{bmatrix} - Det\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \frac{1}{2}g_{11:2} \\ g_{12} & g_{22} & \frac{1}{2}g_{22:1} \\ \frac{1}{2}g_{11:2} & \frac{1}{2}g_{22:2} & 0 \end{bmatrix}\right) \qquad (13.62)$$

حيث الدوال a, b تعطى من

$$a \equiv g_{12;1} - \frac{1}{2} g_{11;2} \text{ , } b \equiv g_{12;12} - \frac{1}{2} g_{11;22} - \frac{1}{2} g_{22;11} \text{،}$$

$$Det(g_{\alpha\beta}) = g \text{ ,} \alpha = \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} \text{ ، } \alpha\beta = \frac{\partial^2}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta}} \text{ , } \alpha, \beta = 1,2$$

الصيغ (13.61)، (13.62) تعطي الانحناء الجاوسي بطريقة غير مباشرة وطريقة مباشرة عن طريق $g_{\alpha\beta}$ ومشتقاتها على الترتيب.

بما أن السطوح متساوية القياس isometric لها الصيغ التربيعية الأولى متساوية. وبالتالي يمكن صياغة النظرية التالية:

نظرية (٢.١٣):

السطوح متساوية القياس يكون لها نفس الانحناء الجاوسي عند النقط المتناظرة.

بما أن السطوح القابلة للانبساط (المفرودة) متساوية القياس محلياً مع المستوى وبالتالي يكون لدينا:

نظرية (٣.١٣):

الانحناء الجاوسي للسطوح القابلة للانبساط يساوي الصفر.

نعطي الآن نظرية توضح أنه يمكن إيجاد سطح وحيد إذا كان هناك صيغتين تربيعيتين أولى وثانية معلومتين كالآتي:

نظرية (٤.١٣): (نظرية جاوس بونية Gauss-Bonnet Theorem):

لتكن $I = g_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta}$ ، $II = L_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta}$ صيغتين تربيعيتين بحيث الأولى محددة تحديداً موجباً (موجبة بالتحديد) positive definite. ولتكن الدوال $g_{\alpha\beta}$ ، $L_{\alpha\beta}$ تحقق شروط جاوس . كوداسي منيردا. إذاً يوجد سطح وحيد $X : U \longrightarrow X(U), U \subset \mathbb{R}^2$ فيما عدا وضعه في الفراغ وتكون الصيغ II, I هي الصيغ التربيعية الأولى والثانية على الترتيب.

ملاحظة (٥.١٣):

هذه النظرية تعطي شرط وجود الحل لنظام من المعادلات التفاضلية الجزئية عددها $18 = 3 \times 6$ حيث معادلات جاوس فينجارتن عددها 6 وكل معادلة تنتج 3 معادلات من المتساويات ويلزم شروط ابتدائية.

ملاحظة (٦.١٣):

النظرية السابقة تسمى النظرية الأساسية للسطوح والتي تناظر النظرية الأساسية في المنحنيات.

ملاحظة (٧.١٣):

نعني أن السطح يتحدد تحديد تام فيما عدا موضعه في الفراغ أنه إذا وجد تمثيل بارامتري أخر للسطح وليكن $Y :U \longrightarrow Y(U)$ ويحقق نفس شروط النظرية فإنه يوجد انتقال T وتحويل خطي عمودي (دوران) R بحيث $Y = T \circ R \circ X$ ونعني هنا الحركة المتماسكة (دوران + انتقال).

تمارين (١٣)

(١) أثبت أنه إذا كان العنصر الخطي للسطح يعطى من

$$I = ds^2 = \lambda((du^1)^2 + (du^2)^2), \lambda = \lambda(u^1, u^2)$$

فإن الانحناء الجاوسي للسطح هو $K = -\frac{1}{2\lambda}\Delta \ln \lambda$ حيث Δ مؤثر لابلاس

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial(u^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(u^2)^2}$$

(**إرشاد:** بوضع $g_{12} = 0, g_{11} = g_{22} = \lambda$ في صيغة جاوس التي تعطي الانحناء الجاوسي نحصل على المطلوب).

(٢) اثبت أن السطح الذي عنصره الخطي

$$I = ds^2 = \frac{1}{(u^1)^2 + (u^2)^2 + 1}((du^1)^2 + (du^2))$$

يكون له انحناء جاوسي ثابت.

(**إرشاد:** في التمرين السابق ضع $\lambda = \frac{1}{(u^1)^2 + (u^2)^2 + 1}$)

(٣) إذا كانت الشبكة الإحداثية (البارامترية) على السطح شبكة تقاربية $(L_{11} = L_{22} = 0)$ أوجد معادلات كوداسي منيردا في هذه الحالة.
(**إرشاد:** استخدم المعادلات (13.59)، (13.60))

(٤) أوجد معادلات كوداسي ـ منيردا على سطح مغطى بشبكة بارامترية مكونة من خطوط الانحناء (غطاء أساسي).
(**إرشاد:** ضع $g_{12} = L_{12} = 0$ في معادلات كوداسي ـ منيردا).

(٥) استخدم صيغة جاوس لحساب الانحناء الجاوسي للسطح الذي صيغته التربيعية الأولى هي $I = ds^2 = (du^1)^2 + e^{2u^1}(du^2)^2$

(٦) أوجد الانحناء الجاوسي لسطح صيغته التربيعية

$$I = ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2$$

(**إرشاد:** ضع $g_{12} = 0$ في صيغة جاوس واحسب صيغ الارتباط $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ ومشتقاتها)

(٧) بين أن الانحناء الجاوسي لكل من الاسطوانة والمخروط منعدم لجميع النقاط.
(**إرشاد:** استخدم نظرية جاوس وتعريف السطوح المفرودة).

(٨) بين الانحناء الجاوسي لسطح الكرة ثابت وذلك باستخدام صيغة جاوس.

(٩) أوجد معادلات جاوس ـ فينجارتن على السطوح الآتية:

(i) سطح الكرة | (ii) سطح السرج
(iii) السطح الدوراني | (iv) السطح المسطر
(v) سطح الهليكويد | (vi) سطح الكاتينويد

(١٠) أوجد إطار عياري متعامد على كل من السطوح الآتية:

(i) سطح الاسطوانة | (ii) سطح الكرة
(iii) سطح السرج | (iv) سطح المماسي (المسطر).
(v) سطح الهليكويد | (vi) سطح الكاتينويد

(١١) وضح المعنى الهندسي لمعادلات جاوس ـ فينجارتن.

(١٢) وضح معادلات جاوس ـ فينجارتن من خلال التحويلات الخطية.

(١٣) ماذا نعني بالزمر البارامترية وزمر لي البارامترية على السطح المنتظم.

(١٤) ماذا نعني بالإطار المتحرك على امتداد سطح في الفراغ.

(١٥) اشتق صيغ رودريجز من معادلات فينجارتن.

(إرشاد: ارجع إلى شروط الحصول على صيغ رودريجز في الباب العاشر).

(١٦) باستخدام معادلات فينجارتن أثبت أن $N_1 \wedge N_2 = \sqrt{g}\, K\, N$

(١٧) أوجد معادلات جاوس. فينجارتن على سطح مغطى بغطاء مونج

$$X(u^1,u^2) = (u^1,u^2,f(u^1,u^2))$$

(١٨) بين أنه على السطح $X(u^1,u^2) = (u^1,u^2,f(u^1,u^2))$ يوجد إطار متعامد على السطح إذا كانت $\frac{\partial f}{\partial u^1} = 0$ أو $\frac{\partial f}{\partial u^2} = 0$.

(إرشاد: شرط تعامد الخطوط البارامترية هو $g_{12} = 0$).

(١٩) إذا كان لدينا سطح منتظم $X = X(u^\alpha)$، أعط تأويل هندسي للمشتقات $X_{\alpha\beta}$ والكميات $L_{\alpha\beta}$، $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$.

الباب الرابع عشر

الانحناء الجيوديسي والخطوط الجيوديسية
Geodesic Curvature and Geodesic Lines

رأينا في الباب الرابع أن منحنى الفراغ له انحناء وليّ يحددان شكله وإطار محلي متحرك مع المنحنى يسمى إطار فرينيه. ولكن إذا كان المنحنى C واقع على سطح منتظم M رأينا في الباب التاسع أنه يوجد انحناء k للمنحنى وإنحناء عمودي k_n وهو مركبة متجه الانحناء k في اتجاه العمودي N على السطح. ماذا عن المركبة الأخرى للانحناء أي المركبة في اتجاه المستوى العمودي على N وهو طبعاً المستوى المماس T_pM . ولذلك هنا في هذا الباب نركز على أنواع الانحناءات عند نقطة ما على منحنى واقع على سطح منتظم M. بعض من هذه الانحناءات تعرضنا له في الأبواب السابقة مثل الانحناء العمودي والانحناءات الأساسية ولكن هنا نركز على الانحناء الآخر الذي هو مركبة متجه الانحناء في المستوى المماس T_pM والذي يسمى الانحناء الجيوديسي. كذلك كانت الانحناءات الأساسية ترتبط مع منحنيات تسمى خطوط الانحناء أو الاتجاهات الأساسية (الانحنائية). بطريقة مماثلة توجد منحنيات واقعة على السطح ترتبط بالانحناء الجيوديسي والتي نعرفها في هذا الباب والتي تسمى الخطوط الجيوديسية أو خطوط اقصر بعد وهي تعميم للخط المستقيم في الفراغ الإقليدي.

(١.١٤) الانحناء الجيوديسي: Geodesic Curvature

نفرض أن C منحنى واقع على السطح المنتظم $M:X=X(u^\alpha)$ وممثل تمثيل بارامتري طبيعي أي $u^\alpha=u^\alpha(s)$ حيث s بارامتر طول القوس وبالتالي فإن معادلته الاتجاهية تكون على الصورة

$$C : X = X(u^\alpha(s)) = (x^i(u^\alpha(s))) = X(s) \qquad (14.1)$$

المشتقة الثانية للدالة $X(s)$ بالنسبة إلى s هي

$$\ddot{X} = \frac{d^2 X}{ds^2} = k\, n \;, . = \frac{d}{ds} \qquad (14.2)$$

حيث n العمود الأساسي للمنحنى عند p، k انحناء المنحنى C عند p، حيث المتجه $\ddot{X}(s)$ يعني حقل متجه الانحناء $\underline{k}$ للمنحنى ومعرف على امتداد نقاط السطح M والمقيدة على المنحنى C ، إذاً يمكن كتابته في صورة مجموع جزئين إحداهما مماسي والآخر في اتجاه العمودي على السطح وليكن

$$\underline{k} = \ddot{X} = \underline{k}_n + \underline{k}_g \qquad \text{or}$$

$$k\, n = \frac{d^2 X}{ds^2} = k_n N + k_g n_g \qquad (14.3)$$

حيث N العمودي على السطح M عند النقطة p، $k_g n_g$ هي مركبة مماسية عمودية على المنحنى C أي أن $k_g n_g$ واقعة في المستوى المماسي T_pM أي أن $n_g \in T_pM$ متجه وحدة عمودي على N وعمودي على المماس للمنحنى عند p.
المركبة k_n سبق وأن عرفناها وهي الانحناء العمودي وله علاقة بالصيغة الأساسية الثانية II على السطح M.

تعريف (١.١٤):

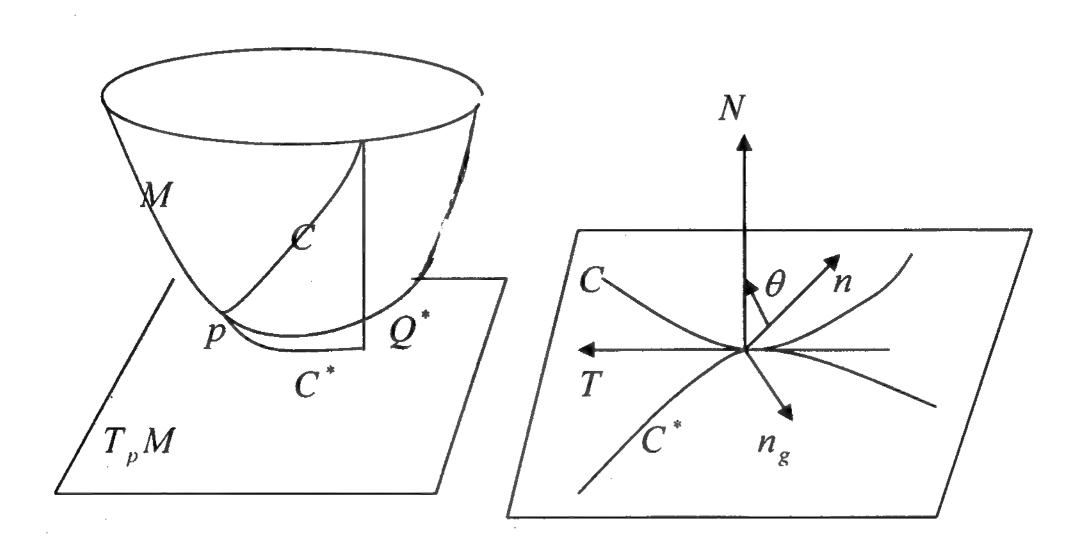
المركبة k_g تسمى الانحناء الجيوديسي للمنحنى C على السطح عند نقطة p وهي انحناء مسقط المنحنى C على المستوى المماسي T_pM (شكل (١.١٤)).
أي أنه إذا كان C^* هو مسقط المنحنى C على المستوى المماس T_pM وكان k انحناء المنحنى C فإن k_g هو انحناء المسقط C^* ، k_n هو الانحناء العمودي للمنحنى C في اتجاه N بحيث يتحقق (14.3).
وبالتالي يمكن صياغة النظرية الآتية:

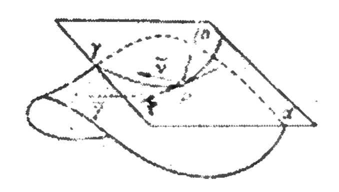
نظرية (١.١٤):

الانحناء الجيوديسي $\underline{k}_g$ للمنحنى C عند نقطة p هو المسقط الاتجاهي لمتجه الانحناء $\underline{k}$ للمنحنى C عند p على المستوى المماس T_pM عند نقطة p.

ملاحظة (٢.١٤):

الانحناء الجيوديسي Geodesic Curvature يرتبط بالصيغة الأساسية الأولى I على السطح ولكن حسابها ليس بالأمر السهل حيث أننا نستخدم رموز كريستوفل والمعادلات الأساسية على السطح.





شكل (١.١٤)

(٢،١٤) الإطارات المصاحبة لمنحنى واقع على السطح:

Moving Frame Along a Curve on a Surface:

في الباب الرابع رأينا أنه بالنسبة لمنحنى فراغ منتظم وممثل بدلالة بارمتر طول القوس أمكن تكوين إطار فرينيه له $\{T, n, b\}$. الآن إذا كان المنحنى

$$C: v \longrightarrow X(u^1(v), u^2(v)) \qquad (14.4)$$

واقع على السطح $M: X = X(u^1, u^2)$ ونفترض أن C ممثل بدلالة بارامتر طول القوس أي أن (من الباب السابع)

$$|\frac{dX}{dv}|^2 = (\frac{ds}{dv})^2 = g_{\alpha\beta} u'^{\alpha} u'^{\beta} \qquad (14.5)$$

$$\therefore \frac{dX}{ds} = X_1 \dot{u}^1 + X_2 \dot{u}^2 = X_{\alpha} \dot{u}^{\alpha} \qquad (14.6)$$

$$\frac{d^2X}{ds^2} = k\, n\, ,\, . = \frac{d}{ds} \qquad (14.7)$$

بما أن $\frac{dX}{ds}$ متجه وحدة وهو مماس للمنحنى إذاً فهو حقل متجه وحدة وليكن T حيث

$$T = X_1 \dot{u}^1 + X_2 \dot{u}^2 \qquad (14.8)$$

وهو في الحقيقة مماس للمنحنى وكذلك للسطح ولكن n هو العمود الأساسي للمنحنى. إذاً ليس من الضروري أن يكون عمودي على المستوى المماس T_pM عند p على المنحنى $C: X = X(u^{\alpha}(v))$.

إذاً لدراسة سلوك الانحناء (أي كيف يتغير) عندما المنحنى C يغير سلوكه حول النقطة p فإن إطار فرينيه $\{T, n, b\}$ المصاحب للمنحنى C يكون غير مناسب لأن كل من n, b يتغير مع C بالإضافة إلى أن n يكون غير معرف عندما $k = 0$.

في مثل هذه الحالة يكون من المناسب تكوين إطار مصاحب للمنحنى ومرتبط مع العمودي N على السطح M عند النقطة p، هذا الإطار هو $\{T, n_g, N\}$ حيث

$$N=\frac{X_1\wedge X_2}{\sqrt{g}},T=X_1\dot{u}^1+X_2\dot{u}^2,n_g=N\times T \quad (14.9)$$

والمتجه n_g يسمى **متجه الجيوديسي العمودي** Geodesic Normal Vector.

ملاحظة (٣.١٤):

الثلاثي العياري المتعامد $\{T,n_g,N\}$ يحقق $[T,n_g,N]=1$

ملاحظة (٤.١٤):

n_g هو متجه وحدة عمودي على المنحنى وواقع في المستوى T_pM عند p.

إذاً باستخدام الإطار $\{T,n_g,N\}$ يمكن كتابة

$$kn=k_nN+k_gn_g \quad (14.10)$$

حيث k_nN المسقط العمودي للمتجه kn على اتجاه العمودي N. المركبة k_gn_g هي المسقط العمودي لحقل المتجه kn (حقل الانحناء للمنحنى) على المستوى المماس T_pM عند $p\in M$.

الآن اتجاه المماس لمنحنى واقع على السطح يعطى من (من الباب الثامن)

$$\frac{dX}{ds}=X_\alpha\dot{u}^\alpha \;,\dot{}=\frac{d}{ds} \quad (14.11)$$

$$\therefore \frac{d^2X}{ds^2}=X_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta+X_\alpha\ddot{u}^\alpha \quad (14.12)$$

وباستخدام معادلات جاوس ـ فينجارتن (13.23)، (13.24) نجد أن

$$kn=\frac{d^2X}{ds^2}=(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}X_\gamma+L_{\alpha\beta}N)\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta+X_\gamma\ddot{u}^\gamma$$

$$=(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta+\ddot{u}^\gamma)X_\gamma+L_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta N$$

$$\therefore kn=(\ddot{u}^\gamma+\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta)X_\gamma+L_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha du^\beta}{(ds)^2}N$$

$$\therefore kn = k_g n_g + \frac{L_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}{\mathrm{I}} N \qquad (14.13)$$

أو ما يكافئ (من تعريف k_n في الباب التاسع)

$$\frac{d^2X}{ds^2} = kn = k_g n_g + k_n N \qquad (14.14)$$

حيث

$$k_g n_g = (\ddot{u}^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta) X_\gamma \qquad (14.15)$$

وبما أن $n_g = N \wedge T$ وبضرب طرفي العلاقة (14.15) ضرباً قياسياً في n_g واستخدام خواص المحددات نحصل على

$$\begin{aligned}
k_g &= (\ddot{u}^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta) < X_\gamma, n_g > \\
&= (\ddot{u}^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta)[X_\gamma, N, T] \\
&= (\ddot{u}^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta)[X_\gamma, N, X_\alpha \dot{u}^\alpha] \\
&= (\ddot{u}^1 + \Gamma^1_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta)[X_1, N, X_1 \dot{u}^1 + X_2 \dot{u}^2] \\
&\quad + (\ddot{u}^2 + \Gamma^2_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta)[X_2, N, X_1 \dot{u}^1 + X_2 \dot{u}^2] \\
&= (\ddot{u}^1 + \Gamma^1_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta)[X_1, N, X_2 \dot{u}^2] \\
&\quad + (\ddot{u}^2 + \Gamma^2_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta)[X_2, N, X_1 \dot{u}^1] \\
&= -(\ddot{u}^1 + \Gamma^1_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta)[X_1, X_2, N]\dot{u}^2 \\
&\quad + (\ddot{u}^2 + \Gamma^2_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta)[X_1, X_2, N]\dot{u}^1
\end{aligned}$$

وبما أن

$$[X_1, X_2, N] = < X_1 \wedge X_2), N > = \sqrt{g} < N, N > = \sqrt{g}$$

$$\therefore k_g = \sqrt{g}\{(\ddot{u}^2 + \Gamma^2_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta)\dot{u}^1 - (\ddot{u}^1 + \Gamma^1_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta)\dot{u}^2\} \quad (14.16)$$

ملاحظة (٥،١٤):

الانحناء الجيوديسي على امتداد منحنى على سطح هو خاصية ذاتية (داخلية) للسطح لأن الصيغة (14.16) تعتمد فقط على الكميات المترية $g_{\alpha\beta}$.

من العلاقة (14.14) يمكن الحصول على صورة أخرى للانحناء الجيوديسي k_g وذلك بضرب طرفيها في $n_g = N \times T$ والتي تعطى من خلال حاصل الضرب الثلاثي القياسي حيث

$$k_g = [\frac{d^2X}{ds^2}, N, \frac{dX}{ds}] \qquad (14.17)$$

أو ($\underline{k} = \frac{d^2X}{ds^2}$)

$$k_g = [T(s), \underline{k}(s), N(s)]$$

هذه العلاقة سهلة في التعامل والحساب حيث أنه إذا أعطينا معادلة السطح $X = X(u^1, u^2)$ والدوال $u^1 = u^1(s)$ ، $u^2 = u^2(s)$ التي تعرف المنحنى الواقع على السطح تقوم بحساب $\frac{d^2X}{ds^2}$, $\frac{dX}{ds}$ وكذلك العمودي على السطح على امتداد نقاط المنحنى C ويعطى من

$$N(s) = \frac{X_1(s) \wedge X_2(s)}{\sqrt{g(s)}}$$

وبالتعويض في الصيغة (14.17) وحساب حاصل الضرب الثلاثي القياسي أي بإيجاد قيمة المحدد الثلاثي.

نفرض أن المنحنى C الواقع على السطح M معطى من خلال الدوال

$$u^1 = u^1(v), u^2 = u^2(v)$$

حيث v بارامتر عام أي ليس بارامتر طول القوس s. في هذه الحالة يكون ($\frac{d\bar{s}}{dv} \neq 0$)

$\frac{dv}{ds}\neq 0$, $\frac{dX}{ds}=\frac{dX}{dv}\frac{dv}{ds}$ وبالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى s

$$\therefore \frac{d^2X}{ds^2}=\frac{d^2X}{dv^2}.(\frac{dv}{ds})^2+\frac{dX}{dv}.\frac{d^2v}{ds^2}$$

وبالتعويض في (14.17) واستخدام خواص المحددات نحصل على

$$k_g=[\frac{d^2X}{dv^2},N(v),\frac{dX}{dv}](\frac{dv}{ds})^3$$

$$=\frac{[\frac{d^2X}{dv^2},N(v),\frac{dX}{dv}]}{(\frac{ds}{dv})^3}$$

$$=\frac{[\frac{d^2X}{dv^2},N(v),\frac{dX}{du}]}{|\frac{ds}{dv}|^3}\ ,\ |X'(v)|=\frac{ds}{dv}$$

$$\therefore k_g=\frac{[X''(v),N(v),X'(v)]}{|X'(v)|^3},\ '=\frac{d}{dv}\quad (14.18)$$

ملاحظة (٦،١٤):

الصيغة (14.18) تعتبر غاية في الأهمية لأنها أكثر عملية من الصيغة (14.17) حيث أنها تتعامل مع بارامتر عام وليس بارامتر طول القوس ولا تحتاج إلى التحويل بدلالة بارامتر طول القوس.

مثال (١،١٤):

أوجد الانحناء الجيوديسي لمنحنى الحلزون الدائري $u^1=u^2=v$ الواقع على سطح الأسطوانة الدائرية القائمة.

$$X(u^1,u^2)=(\cos u^1,\sin u^1,u^2)\qquad (14.19)$$

الحل:

بوضع $u^1=u^2=v$ في (14.19) فإننا نحصل على

$$X(v)=(\cos v,\sin v,v) \qquad (14.20)$$

وهي معادلة الحلزون الدائري الواقع على أسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها الوحدة. وبحساب المشتقة الأولى والثانية من معادلة منحنى الحلزون نجد أن

$$\frac{dX}{dv}=(-\sin v,\cos v,1),\ \left|\frac{dX}{dv}\right|=\sqrt{2},$$
$$\frac{d^2X}{dv^2}=(-\cos v,-\sin v,0). \qquad (14.21)$$

الكميات الأساسية الأولى على سطح الأسطوانة الدائرية القائمة هي:

$$g_{11}=1, g_{22}=1, g_{12}=0, g=1 \qquad \text{(من الباب السابق)}$$

وكذلك فإن متجه الوحدة العمودي N يعطى من

$$N=\frac{X_1\wedge X_2}{\sqrt{g}}=X_1\wedge X_2=(\cos u^1,\sin u^1,0)$$

العمودي N على امتداد المنحنى $(u^1=u^2=v)$ يكون

$$N(v)=(\cos v,\sin v,0)$$

وبالتعويض في الصيغة (14.18) نحصل على الانحناء الجيوديسي k_g على الصورة

$$k_g=\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\begin{bmatrix}-\cos v & -\sin v & 0\\ \cos v & \sin v & 0\\ -\sin v & \cos v & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{2})^3}(-\cos v\sin v+\sin v\cos v)=\text{ zero}$$

مثال (٢.١٤):

أوجد الانحناء الجيوديسي للمنحنى $u^1=v, u^2=v^2$ على المستوى

$$X(u^1,u^2)=(2u^1+u^2,u^1-u^2,u^1+2u^2)$$

الحل:

بالنسبة لسطح المستوى تكون المماسات X_α هي

$$X_1=(2,1,1)\ ,\ X_2=(1,-1,2)$$

ومنها نقوم بحساب $g_{\alpha\beta}$ حيث

$$g_{11}=6, g_{22}=6, g_{12}=3, g=27$$

وحقل العمودي N يعطى من

$$N=\frac{X_1\wedge X_2}{\sqrt{g}}=\frac{1}{\sqrt{27}}(3,-3,-3)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$$

واضح أن الحقل N ثابت لأنه العمودي على مستوى.

المنحنى المعطى هو $X=X(v)$ نحصل على معادلته الاتجاهية من معادلة المستوى (وذلك بوضع $u^2=v^2$ ، $u^1=v$) على الصورة

$$X(v)=(2v+v^2, v-v^2, v+2v^2)$$

$$\therefore \frac{dX}{dv}=(2+2v, 1-2v, 1+4v)\ ,\quad \frac{d^2X}{dv^2}=(2,-2,4)\ ,$$

$$\left|\frac{dX}{dv}\right|^2=4(1+v)^2+(1-2v)^2+(1+4v)^2$$

$$=6+12v+24v^2$$

وبالتعويض في العلاقة (14.18) نحصل على

$$k_g=\frac{1}{(6+12v+24v^2)^{3/2}}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 2+2v & 1-2v & 1+4v \end{vmatrix}$$

$$\therefore k_g(v)=\frac{18}{\sqrt{3}(6+12v+24v^2)^{3/2}}\quad , v\in\mathbb{R}$$

فمثلاً عند $v=0$ يكون $\quad k_g(0)=\sqrt{2}$

تعريف (٢.١٤):

حقل الإطار $\{T, n_g, N\}$ المعرف على امتداد منحنى $C : X = X(u^\alpha(s))$
واقع على سطح منتظم $M : X = X(u^\alpha)$ يسمى إطار داربوا Darboux frame.
إطار داربوا يحقق بعض الخواص منها

$$\frac{dT}{ds} = kn = k_g n_g + k_n N \qquad (14.22)$$

$$<n, N> = \cos\theta, k\cos\theta = k_n \qquad (14.23)$$

$$<n_g, n> \sin\theta = <N, b>, k_g = k\sin\theta$$

حيث b العمود الثانوي على المنحنى C. ومن هذه العلاقة (بالتربيع والجمع) نحصل على

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2 \qquad (14.24)$$

(٣.١٤) صيغ داربوا التفاضلية: Darboux Differential Formula

بنفس الطريقة التي اتبعناها في استنتاج الصيغ التفاضلية لإطار فرينيه في الباب الرابع تقوم الآن بالتوصل إلى صيغ تفاضلية مشابهة لصيغ فرينية ولذلك نرمز لحقل المتجه $(T, n_g, N)'$ بالرمز D ليصبح $D' = (T, n_g, N)$ وبما أن $<T, n_g> = 0$ وبالتفاضل بالنسبة إلى s نحصل على

$$<\dot{T}, n_g> + <T, \dot{n}_g> = 0$$

وحيث أن $\dot{n}_g$ حقل متجه على امتداد المنحنى C فإنه يمكن كتابته على الصورة

$$\dot{n}_g = a_1(s)T + a_2(s)n_g + a_3(s)N$$

$$\therefore <k_g n_g + k_N N, n_g> + <T, a_1 T, a_2 n_g + a_3 N> = 0$$

وباستخدام خاصية العيارية المتعامدة لعناصر إطار داربوا نحصل على $k_g + a_1 = 0$

$$\therefore a_1(s) = -k_g \qquad (14.25)$$

بالمثل بمفاضلة العلاقة $<T,N>=0$ بالنسبة إلى s مع فرض أن

$$\dot{N}=b_1(s)T+b_2(s)n_g+b_3(s)N$$

فإننا نحصل على $k_n+b_3=0$

$$\therefore\ b_3(s)=-k_n \qquad (14.26)$$

وبتفاضل العلاقة $<N,n_g>$ بالنسبة إلى s نحصل على

$$<\dot{N},n_g>+<N,\dot{n}_g>=0$$

$$\therefore <b_1T+b_2n_g+b_3N,n_g>+<N,a_1T+a_2n_g+a_3N>=0$$

$$\therefore b_2(s)+a_3(s)=0 \qquad (14.27)$$

وباستخدام العلاقات $<N,N>=1,<n_g,n_g>=1$ وبالتفاضل بالنسبة إلى s نحصل على $b_1=0$, $a_1=0$ لأن $\dot{N}$ عمودي على N، $\dot{n}_g$ عمودي على n_g (حقول متجهات وحدة) وبالتالي من (14.22)، (14.25)، (14.26)، (14.27) نكون قد توصلنا إلى الصيغ التفاضلية الآتية:

$$\begin{aligned}\dot{T}&=k_g(s)n_g+k_n(s)N\\ \dot{n}_g&=-k_g(s)T+a_3(s)N \qquad (14.28)\\ \dot{N}&=-a_3(s)n_g-k_n(s)N\end{aligned}$$

تعريف (٣.١٤):

الدالة $a_3(s)$ المعرفة في الصيغ التفاضلية (14.28) تسمى **اللّيّ الجيوديسي** Geodesic Torsion ونرمز لها بالرمز τ_g والدالة $k_g(s)$ تسمى الانحناء الجيوديسي للمنحنى C الواقع على السطح M.

الصيغ التفاضلية (14.28) يمكن كتابتها في الشكل المصفوفي

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix}T\\ n_g\\ N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & k_g & k_n\\ -k_g & 0 & \tau_g\\ -k_n & -\tau_g & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T\\ n_g\\ N\end{bmatrix} \qquad (14.29)$$

هذه الصيغ مشابهة لصيغ فرينية لمنحنى فراغ حيث منحنى الفراغ كان يتحدد من خلال الانحناء k ، والليَّ τ بينما لمنحنى واقع على سطح فإنه يتحدد من خلال ثلاث لامتغيرات invariant هما k_g ، τ_g ، k_n وهذا معناه أن شكل السطح يؤثر في شكل المنحنى C الواقع عليه من خلال تغير العمودي N على السطح على امتداد المنحنى C.

من المعادلة المصفوفية (14.29) يتضح أن **معدل تغير إطار داربو** يعطى من خلال مصفوفة مربعة 3×3 وعناصرها دوال في بارامتر طول القوس وبالتالي فهي تعتبر مولد متناهي الصغر infinitesimal generator لكل الحركات على امتداد المنحنى C الواقع على السطح M عند أي نقطة عليه لها البارامتر s. وهذا يقودنا إلى تعريف الراسم (التطبيق) التالي:

$$\forall\, s \in \mathrm{I}\,, X(s) \in C \longrightarrow D \in So(1,3)$$

حيث $So(1,3)$ ترمز لزمرة التحويلات الخطية المتعامدة والمعرفة من خلال مصفوفة داربوا D والتي معدل تغيرها يعطى من المصفوفة

$$(\frac{d}{ds}D).D^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \qquad (14.30)$$

واضح أنها مصفوفة عكسية (مختلفة) التماثل ناتجة من مشتقة مصفوفة دالية في s وعمودية. ونوضح ذلك في الحالة العامة، أي لأي مصفوفة عمودية يتحقق

$$D(s)D^{-1}(s) = D(s).D'(s) = \mathrm{I} \qquad (14.31)$$

وبتفاضل الطرفين بالنسبة إلى s نحصل على

$$\frac{d}{ds}D.D' + D.\frac{d}{ds}D' = 0$$

$$\therefore (\frac{dD}{ds}).D' = -D(\frac{dD'}{ds}) = -D(\frac{dD}{ds})' \qquad (14.32)$$

واضح أن المصفوفة $\frac{dD}{ds}.D'$ عكسية التماثل.

تعريف (٤.١٤):

زمرة التحويلات المتعامدة $So(1,3)$ المعرفة على المنحنى C الواقع على السطح M تعتمد على بارامتر واحد هو بارامتر طول القوس. إذاً هي زمرة بارامترية أحادية البارامتر one-parametric group وتسمى زمرة داربوا Darboux Group.

في نهاية هذا الجزء نكون قد توصلنا إلى بناء أربع إطارات متحركة على السطح المنتظم $M : X = X(u^{\alpha})$ وهي

(i) **إطار جاوس - فينجارتن** $\{X_1, X_2, N\}$

ومعادلات الحركة له تعطى من معادلات جاوس - فينجارتن في الباب الثالث عشر.

(ii) **إطار جاوس - فينجارتن العياري المتعامد** $\{E_1, E_2, E_3\}$

حيث $E_1 = \frac{X_1}{\sqrt{g_{11}}}, E_2 = \frac{1}{\sqrt{g}\sqrt{g_{11}}}(g_{11}X_2 - g_{12}X_1), E_3 = N$

ومعادلات الحركة له يمكن استنتاجها من معادلات جاوس - فينجارتن.

(iii) **إطار فرينية** $\{T, n, b\}$ على امتداد منحنى فراغ واقع على السطح M

حيث معادلات الحركة تعطى من خلال صيغ فرينية المعروفة في الباب الرابع.

(iv) **إطار داربو** $D = \{T, n_g, N\}$ على امتداد منحنى فراغ C واقع على السطح M ومعادلات الحركة له تعطى من خلال صيغ داربو التفاضلية (14.29).

مثال (٣.١٤):

بين أن الانحناء الجيوديسي للخط المستقيم على السطح يساوي صفر.

الحل:

باستخدام المعادلة

$$k^2 = k_n^2 + k_g^2$$

حيث $k = 0$ للخط المستقيم ومنها نحصل على $k_N = 0$ ، $k_g = 0$.

مثال (٤.١٤):

استخدم صيغ داربوا التفاضلية لحساب اللّيّ الجيوديسي τ_g.

الحل:

المعادلة الثالثة في (14.29) لها الصورة

$$\frac{dN}{ds}=-k_n T-\tau_g n_g$$

بضرب طرفي المعادلة اتجاهياً في T من اليسار نحصل على ($T\wedge T=0$)

$$T\wedge\frac{dN}{ds}=-\tau_g T\wedge n_g$$

وبضرب طرفي هذه العلاقة في N قياسياً من اليمين نحصل على:

$$<T\wedge\frac{dN}{ds},N>=-\tau_g<T\wedge n_g,N>$$

ومن تعريف n_g في (14.9) واستخدام المتطابقة (في الباب الثاني) الآتية:

$$A\wedge B\wedge C=<A,C>B-<A,B>C$$

نحصل على ($[T,n_g,N]=1$)

$$\tau_g=-[T,\frac{dN}{ds},N] \qquad (14.33)$$

حيث [, ,] تعني حاصل الضرب الثلاثي القياسي. وهي الصيغة الصريحة لحساب اللّيّ الجيوديسي. بينما الانحناء الجيوديسي k_g يعطى من (14.18).

باستخدام العلاقات (14.22)، (14.23) وتفاضل العلاقة

$$<n,N>=\cos\theta$$

بالنسبة إلى s نحصل على

$$<\dot{n},N>+<n,\dot{N}>=-\sin\theta\frac{d\theta}{ds}$$

واستخدام صيغ فرينية بالنسبة إلى $\dot{n}$ وصيغ داربو بالنسبة إلى $\dot{N}$ نحصل على

$$\tau < b, N > + < n, -\tau_g n_g > = -\sin\theta \frac{d\theta}{ds},$$

وبما أن
$$< b, N > = < n, n_g > = \sin\theta$$

(b العمود الثاني على المنحنى)
$$\therefore\ \tau \sin\theta - \tau_g \sin\theta = -\sin\theta \frac{d\theta}{ds}$$

$$\therefore \frac{d\theta}{ds} = \tau_g - \tau \qquad (14.34)$$

أهمية هذه العلاقة تتضح من أنها تربط اللّيّ للمنحنى واللّيّ الجيوديسي τ_g ومعدل تغير الزاوية بين العمودي على السطح والعمود الأساسي على المنحنى.

ملاحظة (٧.١٤):

إذا كان اللّيّ الجيوديسي $\tau_g = 0$ فإن المنحنى خط انحنائي حيث يكون في هذه الحالة $\frac{dN}{ds}$ ، T مرتبطين خطياً (من تعريف صيغة رودريجز لخطوط الانحناء واستخدام (14.33)).

ملاحظة (٨.١٤):

إذا كانت $\theta = \text{const.}$ فإن $\tau = \tau_g$ لأن $\frac{d\theta}{ds} = 0$.

(٤.١٤) المنحنيات الجيوديسية (الجيوديسيات) Geodesics

توجد على السطح M منحنيات تعطي أقصر مسافة بين أي نقطتين عليه وهي تعميم لمفهوم أقصر مسافة بين نقطتين (الخط المستقيم) في الفراغ الإقليدي. إذاً الجملة الشائعة وهي الخط المستقيم أقصر مسافة بين نقطتين تكون خاطئة في بعض الأحيان وصحيحة في البعض الآخر. الخلاصة أن الجملة غير صحيحة بالمرة ولكن الأصح أن نقول أن أقصر مسافة بين نقطتين هي خط جيوديسي أي منحنى له أقصر طول من بين

سائر المنحنيات التي تصل بين نقطتين على السطح. ونوضح ذلك من خلال التعريف التالي:

تعريف (٥.١٤):

الخط الجيوديسي أو المنحنى الجيوديسي أو الجيوديسي Geodesic على السطح هو أقصر مسار (منحنى) يصل بين نقطتين على السطح.

تعريف (٦.١٤):

يقال أن المنحنى $I \subset \mathbb{R} \longrightarrow C \subset M$ الواقع على السطح M أنه خط جيوديسي إذا كان انحنائه الجيوديسي منعدم لجميع نقاطه أي $k_g = 0 \ , \ \forall s \in I$

ومن الخصائص الكثيرة التي تتمتع بها الخطوط الجيوديسية ما يلي:

نظرية (٢.١٤):

حقل متجه الانحناء ($\underline{k} = k\ n$) عند أي نقطة على منحنى جيوديسي يكون على امتداد حقل العمودي N على السطح عند تلك النقطة.

البرهان:

إذا كان $C : X = X(u^\alpha(s))$ منحنى واقع على السطح $M : X = X(u^\alpha)$ وممثل بدلالة بارامتر طول القوس s فإن

$$\ddot{X} = \frac{d^2X}{ds^2} = k\ n$$

هو حقل متجه الانحناء والذي يوازي العمود الأساسي n للمنحنى. ومن الصيغة (14.17) التي تعطي الانحناء الجيوديسي نجد أنه على امتداد الخط الجيوديسي ($k_g = 0$) يجب أن يتحقق

$$[\frac{d^2X}{ds^2}, N(s), \frac{dX}{ds}] = 0 \qquad (14.35)$$

وهذا معناه أن حقل المماس $\frac{dX}{ds}$ عمودي على حقل المتجه $\ell(s)$ حيث

$$\ell(s)=\frac{d^2X}{ds^2}\wedge N(s) \qquad (14.36)$$

أي أن ℓ في اتجاه العمودي على السطح وعليه يجب أن يكون $\frac{d^2X}{ds^2}$ مرتبط خطياً أو في اتجاه العمودي N على السطح. وبذلك نكون قد توصلنا إلى برهان النظرية.

نظرية (٣.١٤):

إذا تماسا سطحان على امتداد منحنى وكان هذا المنحنى خط جيوديسي على أحدهما فإنه يكون جيوديسي على الآخر.

الآن نحاول اشتقاق المعادلات التفاضلية التي تحدد الخط الجيوديسي على السطح.

المنحنى الجيوديسي (من التعريف) يتحدد من $k_g = 0$ والتي تكافئ حلول معادلتين تفاضليتين في آن واحد وهذا يتضح من وضع $k_g = 0$ في (14.16) لنحصل على:

$$(\ddot{u}^1+\Gamma^1_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta)\dot{u}^2=0 \ , \ (\ddot{u}^2+\Gamma^2_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta)\dot{u}^1=0$$

وحيث أن $\dot{u}^1 \neq 0$ ، $\dot{u}^2 \neq 0$ وبالتالي يكون لدينا

$$\ddot{u}^1+\Gamma^1_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta=0 \, , \ddot{u}^2+\Gamma^2_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta=0 \qquad (14.37)$$

أو ما يكافئ (بالتفصيل)

$$\begin{aligned}\ddot{u}^1+\Gamma^1_{11}(\dot{u}^1)^2+\Gamma^1_{22}(\dot{u}^2)^2+2\Gamma^1_{12}\dot{u}^1\dot{u}^2=0\\ \ddot{u}^2+\Gamma^2_{11}(\dot{u}^1)^2+\Gamma^2_{22}(\dot{u}^2)^2+2\Gamma^2_{12}\dot{u}^1\dot{u}^2=0\end{aligned} \qquad (14.38)$$

أو في شكل مختصر

$$\ddot{u}^\gamma+\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta=0 \ , \ \gamma=1,2$$

أو ما يكافئ

$$\frac{d^2u^\gamma}{ds^2}+\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\gamma}{ds}=0 \, , \gamma=1,2 \qquad (14.39)$$

وعليه نكون قد توصلنا إلى ما يأتي:

نظرية (٤،١٤):

الخطوط الجيوديسية على السطح المنتظم $X = X(u^{\alpha})$ تتحدد من حلول نظام المعادلات التفاضلية الآني (14.39).

مثال (٤،١٤):

أثبت أن الخطوط الجيوديسية في المستوى هي الخطوط المستقيمة.

الحل:

على المستوى كما رأينا سابقاً فإن رموز كريستوفل $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$ تطابقياً أي عند جميع نقاط المستوى وبالتالي فإن المعادلات التفاضلية (14.39) تؤول إلى

$$\frac{d^2u^{\gamma}}{ds^2} = 0 \ , \ \gamma = 1,2$$

وبالتكامل مرتين بالنسبة إلى s نحصل على:

$$u^{\gamma} = a^{\gamma}s + b^{\gamma} \ , \ \gamma = 1,2$$

بمعنى

$$u^1 = a^1s + b^1 \ , \ u^2 = a^2s + b^2$$

وبالتعويض في معادلة المستوى

$$X(u^1,u^2) = (a_1u^1 + a_2u^2 + a_3, b_1u^1 + b_2u^2 + b_3, c_1u^1 + c_2u^2 + c_3) \qquad (14.40)$$

نحصل على

$$X(s) = X(a^1s + b^1, a^2s + b^2) = (\ell_1(s), \ell_2(s), \ell_3(s))$$

حيث $\ell_1(s)$ ، $\ell_2(s)$ ، $\ell_3(s)$ دوال خطية في s . إذاً $X(s)$ تمثل خط مستقيم واقع على المستوى (14.40).

(٥.١٤) حساب التغاير والجيوديسيات:

Geodesics and Variational Problem:

نعطي الآن طريقة للحصول على الخطوط الجيوديسية وفيها نتعامل مع الكميات الأساسية الأولى مباشرة وليست رموز كريستوفل. ذكرنا في مقدمة هذا الجزء أن الخط الجيوديسي هو أقصر مسار من بين جميع المسارات التي تصل بين نقطتين على السطح وبذلك يظهر مفهوم التطرف extremes لدالية الطول arc length functional أي المطلوب حساب المنحنيات التي لها أقصر طول من بين سائر المنحنيات التي أطوالها تتحدد من دالية الطول (حساب التغاير) الآتية:

$$L = \int ds = \int \sqrt{g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}$$

والتي يمكن كتابتها على أي من الصور الآتية:

$$L = \int \sqrt{g_{11} + 2g_{12}u'^2 + g_{22}(u'^2)^2}\, du^1 ,\ ' = \frac{d}{du^1} \qquad (14.41)$$

$$L = \int \sqrt{g_{11}(u'^1)^2 + 2g_{12}u'^1 + g_{22}}\, du^2 ,\ ' = \frac{d}{du^2} \qquad (14.42)$$

إذاً الدالية L المعرفة في (14.41) دالة في u^2 ، u'^2 والدالية L المعرفة في (14.42) دالة في u^1 ، u'^1 لأننا في الحالة الأولى نكامل بالنسبة إلى u^1 وفي الحالة الثانية نكامل بالنسبة إلى u^2 على الترتيب.

وباستخدام معادلة **أويلر - لاجرانج** التفاضلية (مقرر حساب التغايرات أو الميكانيكا التحليلية) والتي تعطي الشرط الضروري لوجود نقاط تطرف (نقاط حرجة أو اتزان) للتكامل الدالي (14.41) والتي تعطي من هذه المعادلة:

$$\frac{\partial L}{\partial u^2} - \frac{d}{du^1}\frac{\partial L}{\partial u'^2} = 0 \qquad (14.43)$$

من (14.41) يكون لدينا ما يلي:

$$\frac{\partial L}{\partial u^2}=\frac{1}{2}(g_{11}+2g_{12}u'^2+g_{22}(u'^2)^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}+\frac{2\partial g_{12}u'^2}{\partial u^2}+\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}(u'^2)^2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial u'^2}=\frac{1}{2}(g_{11}+2g_{12}u'^2+g_{22}(u'^2)^2)^{-\frac{1}{2}}(2g_{12}+2g_{22}u'^2)$$

وبالتعويض في (14.43) نحصل على

$$\frac{g_{11.2}+2g_{12.2}u'^2+g_{22.2}(u'^2)^2}{2\sqrt{g_{11}+2g_{12}u'^2+g_{22}(u'^2)^2}}$$
$$-\frac{d}{du^1}\left(\frac{g_{12}+g_{22}u'^2}{\sqrt{g_{11}+2g_{12}u'^2+g_{22}(u'^2)^2}}\right)=0,\ \frac{\partial}{\partial u^2}=,2 \qquad (14.44)$$

حل مثل هذه المعادلة التفاضلية في الحالة العامة له صعوبات كثيرة وتوجد طرق كثيرة لإيجاد هذا الحل مثل الحلول العددية أو بأسلوب برامج الحزم الجاهزة على الحاسوب ولكن هنا نتعرض للحل في بعض الحالات الخاصة كالآتي:

(i) إذا كانت $g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}(u^1)$ دوال صريحة في u^1 فقط.

في هذه الحالة المعادلة (14.44) تصبح على الصورة

$$\frac{d}{du^1}\frac{g_{12}+g_{22}u'^2}{\sqrt{g_{11}+2g_{12}u'^2+g_{22}(u'^2)^2}}=0$$

وبالتكامل بالنسبة إلى u^1 نجد أن

$$\therefore\ \frac{g_{12}+g_{22}u'^2}{\sqrt{g_{11}+2g_{12}u'^2+g_{22}(u'^2)^2}}=c_1\ \text{(const.)} \qquad (14.45)$$

بالتربيع وترتيب الحدود نحصل على معادلة من الدرجة الثانية في u'^2 على الصورة

$$(u'^2)^2 g_{22}(g_{22}-c_1^2)+2u'^2 g_{12}(g_{22}-c_1^2)+g_{12}^2-c_1^2 g_{11}=0$$

$$\therefore u'^2=\frac{1}{2g_{22}(g_{22}-c_1^2)}(2g_{12}(c_1^2-g_{22})\pm\sqrt{m}) \quad (14.46)$$

حيث $m=4g_{12}^2(g_{22}-c_1^2)^2-4g_{22}(g_{22}-c_1^2)(g_{12}^2-g_{11}c_1^2)$

وبالتكامل للطرفين نحصل على $u^2=u^2(u^1)$ (معادلة منحنى على السطح).

ونعتبر **الحالة الخاصة** الآتية:

(ii) الدوال $g_{\alpha\alpha}=g_{\alpha\alpha}(u^1)$ دوال صريحة في u^1 فقط بالإضافة إلى أن الخطوط البارامترية على السطح متعامدة($g_{12}=0$) وفي هذه الحالة المعادلة التفاضلية (14.46) تؤول إلى

$$u'^2=\pm\frac{\sqrt{4g_{22}(g_{22}-c_1^2)g_{11}c_1^2}}{2g_{22}(g_{22}-c_1^2)}$$

$$=\pm c_1\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}(g_{22}-c_1^2)}}$$

$$\therefore u^2=\pm c_1\int\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}(g_{22}-c_1^2)}}\,du^1 \quad (14.47)$$

بالمثل نعتبر **الحالة الخاصة** الآتية:

(iii) الدوال $g_{\alpha\alpha}=g_{\alpha\alpha}(u^2)$ دوال صريحة في u^2 فقط بالإضافة إلى $g_{12}=0$. وباستخدام (14.41) وبنفس الطريقة التي اتبعناها في الحالة (ii) نحصل على

$$u^1=\pm c_1\int\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}(g_{11}-c_1^2)}}\,du^2 \quad (14.48)$$

مثال (١٤.٥):

أوجد الخطوط الجيوديسية على السطح الدوراني

$$X(u^1,u^2)(u^1,f(u^1)\cos u^2,f(u^1)\sin u^2),f>0$$

حيث محور الدوران منطبق على محور x^1 ومنحنى الشكل $x^2=f(x^1)$ واقع في المستوى x^1x^2.

الحل:

توصلنا في الباب الثاني عشر إلى أن الكميات الأساسية الأولى للسطح الدوراني تعطى من $g_{11}=1+(f'(u^1))^2\ ,g_{12}=0,g_{22}=f^2(u^1),'=\frac{d}{du^1}$

واضح أن كل من g_{11},g_{22} دوال صريحة في البارامتر u^1 فقط و $g_{12}=0$ (الخطوط البارامترية متعامدة). بالتعويض في العلاقة (14.47) نحصل على

$$u^2=c_1\int\frac{\sqrt{1+f'^2}}{f(u^1)\sqrt{f^2(u^1)-c_1^2}}du^1 \qquad (14.49)$$

حيث $f^2(u^1)>c_1^2$.

مثال (١٤.٦):

أوجد الخطوط الجيوديسية على سطح الاسطوانة الدائرية القائمة.

الحل:

الاسطوانة الدائرية القائمة هي سطح دوراني ناتج عن دوران الخط المستقيم $x^2=b$ (حيث b ثابت) حول محور x^1. وحيث أن $x^2=b$ أي أن $f(u^1)=b=\text{const.}$ وباستخدام المثال السابق والتعويض عن $f=b$ ، $f'=0$ نحصل على

$$u^2=c_1\int\frac{du^1}{b\sqrt{b^2-c_1^2}},b^2>c_1^2$$

$$u^2 = \frac{c_1}{b\sqrt{b^2 - c_1^2}} \int du^1$$

$$\therefore u^2 = c_2 u^1 + c_3 \qquad (14.50)$$

حيث c_3 ثابت، $\frac{c_1}{b\sqrt{b^2 - c_1^2}} = c_2$

والمعادلة (14.50) تعطي العلاقة بين بارامترات الاسطوانة وهي علاقة خطية وبالتالي فإن الخطوط الجيوديسية على سطح الاسطوانة الدائرية القائمة هي حلزون دائري.

ملاحظة (٩.١٤):

المعادلات (14.46)، (14.47)، (14.48)، (14.49) التي تعطي الخطوط الجيوديسية أكثر عملية من المعادلات (14.39).

ملاحظة (١٠.١٤):

إذا أخذنا الثابت $c_2 = 0$ فإن $u^2 = c_3$ وبالتعويض في معادلة الاسطوانة

$$X(u^1, u^2) = (u^1, b\cos u^2, b\sin u^2)$$

نحصل على خط مستقيم هو مولد الاسطوانة ويعطى من

$$X(u^1) = (u^1, b\cos c_3, b\sin c_3)$$

مثال (٧.١٤):

أوجد الخطوط الجيوديسية على المجسم الكروي المفلطح oblate spheroid الممثل من خلال الدالة الاتجاهية

$$X(u^1, u^2) = (a\sin u^2 \cos u^1, a\sin u^2 \sin u^1, c\cos u^2)$$

الحل:

نقوم بحساب المشتقات التفاضلية الجزئية X_α ومنها نحصل على الكميات الأساسية الأولى $g_{\alpha\beta}$ على الصورة

$$g_{11}=a^2\sin^2u^2, g_{12}=0, g_{22}=a^2(1-e^2\sin^2u^2)$$

حيث $e^2=\dfrac{a^2-c^2}{a^2}=1-(\dfrac{c}{a})^2$

بما أن g_{11} ، g_{22} دوال في u^2 فقط، $g_{12}=0$ فيمكننا استخدام المعادلة (14.48) التي تعطي الخطوط الجيوديسية على الصورة

$$u^1=c_1\int\sqrt{\frac{a^2(1-e^2\sin^2u^2)}{a^2\sin^2u^2(a^2\sin^2u^2-c_1^2)}}$$

$$=\int\sqrt{\frac{1-e^2\sin^2u^2}{(\frac{a}{c_1})^2\sin^2u^2-1}}\frac{du^2}{\sin u^2}$$

$$\therefore u^1=\int\sqrt{\frac{1-e^2\sin^2u^2}{d^2\sin^2u^2-1}}\frac{du^2}{\sin u^2}, d=\frac{a}{c_1} \quad (14.51)$$

هذا التكامل يكن تحويله إلى صور التكاملات الناقصية من النوع الأول والثالث المعروفة أو إيجاد الحل بسهولة باستخدام برامج الحزم الجاهزة في الحاسوب مثل Mathematic.

مثال (٨.١٤):

أوجد الخطوط الجيوديسية على سطح الكرة.

الحل:

نفرض أن لدينا كرة نصف قطرها a ومركزها نقطة الأصل مثلاً ونستخدم التمثيل الجيوجرافي وعلاقته بالإحداثيات الكارتيزية حيث أن أي نقطة $X(u^1,u^2)$ على سطح هذه الكرة يعطى بالتمثيل البرامتري الاتجاهي

$$X(u^1,u^2)=(a\cos u^1\sin u^2, a\sin u^1\sin u^2, a\cos u^2) \quad (14.52)$$

في الباب الثامن حصلنا على الكميات الأساسية الأولى $g_{\alpha\beta}$ ولها الصورة:

$$g_{11}=a^2\sin^2u^2\ ,\ g_{12}=0, g_{22}=a^2$$

وحيث أن $g_{12}=0$ ، $g_{22}=a^2=\text{const.}$ ، g_{11} دالة في u^2 فقط فإن الخطوط الجيوديسية تعطى من (14.48) على الصورة:

$$u^1=c_1\int\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}(g_{11}-c_1^2)}}du^2$$

$$=c_1\int\frac{1}{\sqrt{\sin^2u^2(a^2\sin^2u^2-c_1^2)}}du^2$$

$$=\int\frac{du^2}{\sin u^2\sqrt{c^2\sin^2u^2-1}}\ ,c=\frac{a}{c_1}$$

وباستخدام طرق التكامل المعروفة (تكامل بالتعويض) أو من برامج الحزم الجاهزة في الحاسوب نحصل على

$$u^1=-\tan^{-1}(\frac{\cos u^2}{b})+c_2\ ,b=\sqrt{c^2-1}$$

هذه العلاقة (استخدم العلاقات بين الدوال المثلثية والمثلثية العكسية) يمكن كتابتها على الصورة

$$u^1=-\sin^{-1}(\frac{\text{cotan}u^2}{\text{b}})+c_2 \qquad (14.53)$$

$$\therefore\ \sin^{-1}(\frac{\cot u^2}{b})=c_2-u^1\quad \text{or}\quad \cot u^2=b\sin(c_2-u^1)$$

$$\therefore\frac{\cos u^2}{\sin u^2}=b\,(\sin c_2\cos u^1-\cos c_2\sin u^1)$$

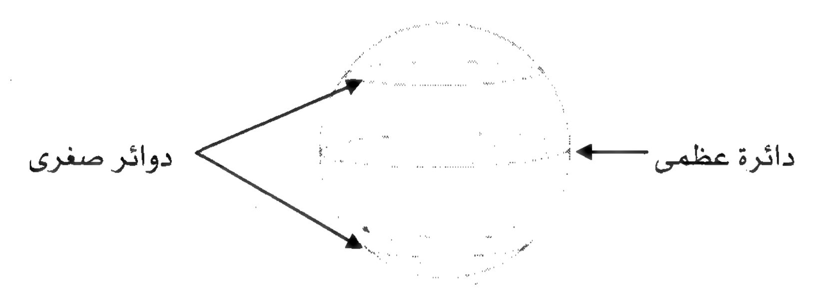
$$\therefore\cos u^2=b(\sin c_2\sin u^2\cos u^1-\cos c_2\sin u^2\sin u^1)$$

وباستخدام هذه العلاقة والعلاقة بين الإحداثيات الجيوجرافية (u^1,u^2) والإحداثيات الكارتيزية (x,y,z) من خلال التمثيل الجيوجرافي (14.52) نحصل على

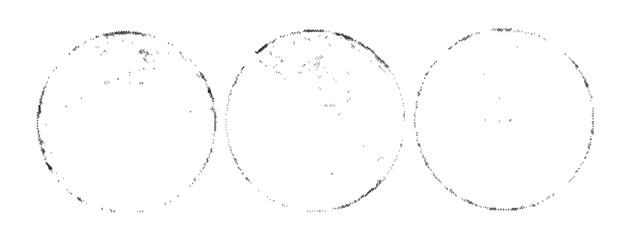
$$\frac{z}{a}=b\sin c_2.\frac{x}{a}-b\cos c_2.\frac{y}{a} \quad \text{or}$$

$$x\sin c_2-y\cos c_2-\frac{z}{b}=0 \qquad (14.54)$$

وهي معادلة مستوى يمر بمركز الكرة (نقطة الأصل) فهو يقطعها في دائرة عظمى إذاً الخطوط الجيوديسية على سطح الكرة هي دوائر عظمى Great Circles كما هو موضح في شكل (٢.١٤)، (٣.١٤).



شكل (٢.١٤)



شكل (٣.١٤)

مثال (٩.١٤):

أوجد طول خط جيوديسي على امتداد دائرة عظمى لكرة نصف قطرها a ويصل بين النقطتين $P_1(u_1^1,u_1^2)\ ,P_2(u_2^1,u_2^2)$

الحل:

طول الخط الجيوديسي من دائرة عظمى هو طول قوس من دائرة عظمى يصل بين النقطتين P_1, P_2 أي هو طول قوس من قطاع دائري زاويته α حيث

$$\cos\alpha = \frac{< R_1, R_2 >}{\|R_1\|\|R_2\|} \qquad (*)$$

حيث R_1, R_2 هي متجهات الموضع للنقاط P_1, P_2 على سطح الكرة وتعطى من

$$R_\alpha = (a\cos u_\alpha^1 \sin u_\alpha^2, a\sin u_\alpha^1 \sin u_\alpha^2, \cos u_\alpha^2), \alpha = 1,2$$

بما أن $\|R_1\| = \|R_2\| = a$ والتعويض في (*) أعلاه نحصل على

$$\cos\alpha = \sin u_1^2 \sin u_2^2 (\sin u_1^1 \sin u_2^1 + \cos u_1^1 \cos u_2^1) + \cos u_1^2 \cos u_2^2$$

$$\therefore \cos\alpha = \sin u_1^2 \sin u_2^2 \cos(u_1^1 - u_2^1) + \cos u_1^2 \cos u_2^2 = \gamma \qquad (**)$$

وطول قوس بين النقطتين P_1, P_2 من دائرة عظمى هو طول قوس من قطاع دائري ويعطى من $\ell = a\alpha$ وبالتعويض عن $\alpha = \cos^{-1}(\gamma)$ من (**) نحصل على

$$\therefore \ell = a\cos^{-1}(\sin u_1^2 \sin u_2^2 \cos(u_1^1 - u_2^1) + \cos u_1^2 \cos u_2^2) \quad (14.55)$$

مثال (١٤.١٠):

أوجد طول محيط الدائرة العظمى على سطح الكرة.

الحل:

من المثال السابق نجد أن الدائرة العظمى الكاملة نحصل عليها عندما تنطبق النقطتين P_1, P_2 أي عندما $(u_1^1, u_1^2) = (u_2^1, u_2^2)$ وبالتعويض عن $u_1^1 = u_2^1$ نجد أن

$$\ell = a\cos^{-1}(\sin u_1^2 \sin u_2^2 + \cos u_1^2 \cos u_2^2)$$

$$= a\cos^{-1}\cos(u_1^2 - u_2^2)$$

وكذلك عندما $u_1^2 = u_2^2$

$$\therefore \ell = a\cos^{-1}\cos 0 = a\cos^{-1} 1 = 2\pi a$$

لاحظ أن $\cos^{-1}1$ تساوي 0 أو 2π والقيمة الأولى لا تعطي طول ولذلك فهي مرفوضة.

نظرية (٢،١٤):

الانحناء الجيوديسي k_g على امتداد الخطوط البارامترية على السطح المنتظم M يرمز له بالرمز $k_g^{\alpha}, \alpha = 1,2$ حيث

$$k_g^1 = \sqrt{g}\,(g_{11})^{-\frac{3}{2}}\Gamma_{11}^2 \qquad (14.56)$$

$$k_g^2 = -\sqrt{g}\,(g_{22})^{-\frac{3}{2}}\Gamma_{22}^1 \qquad (14.57)$$

البرهان:

على خط u^1 البارامتري يكون $u^2 = \text{const.}$ وبالتالي $\dot{u}^2 = 0$ ، $\ddot{u}^2 = 0$ وبالتعويض في (14.16) نحصل على

$$k_g^1 = \sqrt{g}\,\Gamma_{\alpha\beta}^2\dot{u}^{\alpha}\dot{u}^{\beta}\dot{u}^1 \quad , \quad \cdot = \frac{d}{ds}$$

$$= \sqrt{g}\,\Gamma_{11}^2\dot{u}^1\dot{u}^1\dot{u}^1 + 2\sqrt{g}\,\Gamma_{12}^2\dot{u}^1\dot{u}^2\dot{u}^1 + \sqrt{g}\,\Gamma_{22}^2\dot{u}^2\dot{u}^2\dot{u}^1$$

$$\therefore k_g^1 = \sqrt{g}\,\Gamma_{11}^2(\dot{u}^1)^3 = \frac{\sqrt{g}\,\Gamma_{11}^2}{(\frac{ds_1}{du^1})^3} \qquad (14.58)$$

وحيث أن $ds^2 = g_{\alpha\beta}du^{\alpha}du^{\beta}$ فإنه على خط u^1 البارامتري يكون $u^2 = \text{const.}$ أي $du^2 = 0$ وبالتالي يكون لدينا $ds_1^2 = g_{11}(du^1)^2$

$$\therefore \frac{ds_1}{du^1} = \sqrt{g_{11}} \qquad (14.59)$$

حيث s_1 بارامتر المسافة القوسية على امتداد خط u^1 البارامتري وبالتعويض في العلاقة (14.58) نحصل على

$$K_g^1 = \frac{\sqrt{g}\,\Gamma_{11}^2}{(g_{11})^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{g}\,(g_{11})^{-\frac{3}{2}}\Gamma_{11}^2$$

بالمثل فإن k_g^2 لخط u^2 البارامتري يعطى من

$$K_g^2 = \frac{-\sqrt{g}\,\Gamma_{22}^1}{(\frac{ds_2}{du^2})^3} = -\sqrt{g}\,(g_{22})^{-\frac{3}{2}}\Gamma_{22}^1 \;,\; \frac{ds_2}{du^2} = \sqrt{g_{22}}$$

مثال (١١.١٤):

أوجد المعادلة التفاضلية التي يحققها السطح كي يكون خط u^1 البارامتري خط جيوديسي.

الحل:

الانحناء الجيوديسي k_g^1 لخط u^1 البارامتري يعطى من (14.56) وكي يكون هذا الخط جيوديسي يجب أن يحقق $k_g^1 = 0$

$$\therefore \sqrt{g}\,(g_{11})^{-\frac{3}{2}}\Gamma_{11}^2 = 0 \;,\; g \neq 0 \;, g_{11} \neq 0$$

$$\therefore \Gamma_{11}^2 = 0 \qquad (14.60)$$

ومن تعريف $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ نحصل على

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{2\gamma}(\frac{\partial g_{1\gamma}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{\gamma 1}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^{\gamma}})$$

$$= \frac{1}{2} g^{21}(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1})$$

$$+ \frac{1}{2} g^{22}(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}) = 0$$

ومن تعريف $g^{\alpha\beta}$ نجد أن (من الباب الثامن والتاسع)

$$g^{21} = \frac{-g_{12}}{g} \;,\; g^{22} = \frac{g_{11}}{g}$$

$$\therefore -\frac{g_{12}}{g}(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}) + \frac{g_{11}}{g}(2\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}) = 0 \quad \text{or}$$

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}(-g_{12} + 2g_{11}) - g_{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = 0 \qquad (14.61)$$

وهذا هو الشرط المطلوب.

وإذا كانت $g_{12} = 0$ فإن

$$g_{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = 0 \,,\, g_{11} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = 0$$

$$\therefore\ g_{11} = g_{11}(u^1) \qquad (14.62)$$

وبالتالي يمكن صياغة النظرية التالية:

نظرية (٣،١٤):

خط u^1 البارامتري على سطح منتظم مغطى بشبكة بارامترية متعامدة يكون خط جيوديسي إذا كان $g_{11} = g_{11}(u^1)$ دالة في u^1 فقط.

مثل ما سبق يمكن إعطاء النظرية التالية:

نظرية (٤،١٤):

خط u^2 البارامتري على سطح منتظم مغطى بشبكة بارامترية متعامدة يكون خط جيوديسي إذا كان $g_{22} = g_{22}(u^2)$ دالة في u^2 فقط.

ملاحظة (١١،١٤):

خط u^2 البارامتري يكون خط جيوديسي إذا تحقق $\Gamma^1_{22} = 0$

ملاحظة (١٢،١٤):

الطرق المستخدمة في برهان نظرية (١٤-٣)، (١٤-٤) مختلفة عن الطرق المستخدمة في الحالات الخاصة مثل السطح الكروي المفلطح والسطح الدوراني.

ناقشنا سابقاً في (14.44) متى يكون المنحنى

$$X = X\,(u^1, u^2(u^1)) \qquad (14.63)$$

منحنى جيوديسي واقع على السطح $X = X\,(u^1, u^2)$ حيث $g_{12} = 0$ وذلك باستخدام معادلة أويلر - لاجرانج - وهنا نتعرض له بأسلوب المعادلة التفاضلية الصريحة للجيوديسيات (14.39).

في حالة التمثيل البارامتري (14.63) نحصل على $g_{\alpha\beta}$ على امتداد المنحنى وتعطى من

$$g_{11} = g_{11}(u^1),\, g_{22} = g_{22}(u^1), g_{12} = 0$$

وبالتعويض في نظام المعادلات التفاضلية (14.39) أو (14.38) نجد أن المعادلة الأولى من معادلات الجيوديسيات تنعدم والمعادلة الثانية تصبح على الصورة

$$\frac{d^2u^2}{ds^2} + \frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds} = 0 \qquad (*)$$

حيث في هذه الحالة يكون

$$\Gamma^2_{11} = 0\,, \Gamma^2_{22} = 0,\; \Gamma^2_{12} = \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}/(2g_{22})$$

المعادلة (*) تكافئ

$$g_{22}\frac{d^2u^2}{ds^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds} = 0 \qquad (14.64)$$

هذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{d}{ds}(g_{22}\frac{du^2}{ds}) = \frac{d}{du^1}(g_{22}\frac{du^2}{ds})\frac{du^1}{ds}$$

$$= g_{22}\frac{d}{du^1}(\frac{du^2}{ds})\frac{du^1}{ds} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds}$$

$$= g_{22}\frac{d^2u^2}{ds^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds}$$

ومن (14.64) نجد أن

$$\frac{d}{ds}(g_{22}\frac{du^2}{ds}) = 0$$

$$\therefore\; g_{22}\frac{du^2}{ds} = c = \text{ const.} \qquad (14.65)$$

وبما أن s بارامتر طول القوس، إذاً $|\frac{dX}{ds}|=1$ أو ما يكافئ

$$g_{11}(\frac{du^1}{ds})^2+g_{22}(\frac{du^2}{ds})^2=1\ ,\ g_{12}=0 \qquad (*)$$

وبالتعويض من (14.65) في (*) نحصل على

$$g_{11}(\frac{du^1}{ds})^2+\frac{c^2}{g_{22}}=1$$

$$\therefore \frac{du^1}{ds}=\pm\frac{\sqrt{g_{22}-c^2}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} \qquad (14.66)$$

وحيث أن

$$\frac{du^2}{du^1}=\frac{du^2}{ds}/\frac{du^1}{ds}\ ,\ \frac{du^2}{ds}=\frac{c}{g_{22}} \qquad \text{((14.65) من)}$$

وباستخدام (14.66) نحصل على

$$\frac{du^2}{du^1}=\pm c\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{22}-c^2}}$$

أو

$$\therefore u^2=\pm c\int\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}(g_{22}-c^2)}}du^1 \qquad (14.67)$$

وهذا ما توصلنا إليه عن طريق **معادلة أويلر ـ لاجرانج** في (14.47)، (14.48).

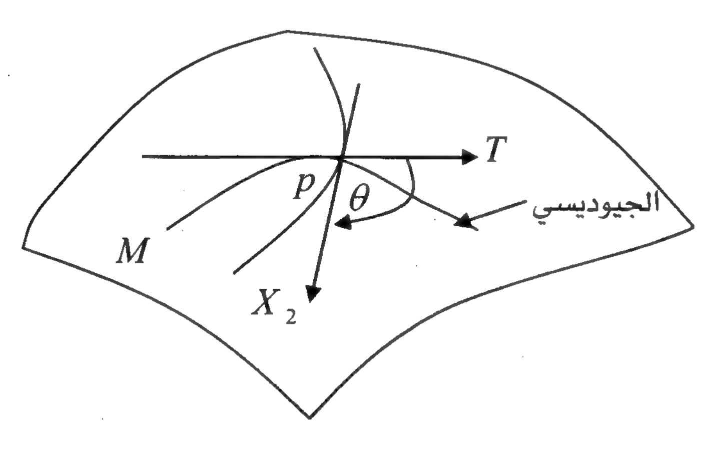
مثال (١٢.١٤):

أثبت أن $\sqrt{g_{22}}\cos\theta=\text{const.}$ على سطح منتظم $M:X=X(u^1,u^2)$ يحقق $g_{11}=g_{11}(u^1)\ ,\ g_{22}=g_{22}(u^1)\ ,g_{12}=0$

حيث θ هي الزاوية بين الخط الجيوديسي (ممثل تمثيل طبيعي) وخط u^2 البـارامتري عند نقطة ما p على السطح M.

الحل:

نعين الزاوية θ بين خـط u^2 البارامتري والخـط الجيوديسي عند $p \in M$ أي الزاوية بين خط المماس X_2 لخط u^2 البارامتري والمماس T للخط الجيوديسي كما هو موضح في شكل (٤.١٤).



شكل (٤.١٤)

ومن تعريف الزاوية بين متجهين نجد أن

$$\cos\theta = \frac{\langle T, X_2 \rangle}{\|T\| \|X_2\|} = \frac{\langle T, X_2 \rangle}{\sqrt{g_{22}}}, \|T\| = 1 \quad (14.68)$$

وبما أن المماس T متجه وحدة إذاً يكتب على الصورة

$$T = X_1 \frac{du^1}{ds} + X_2 \frac{du^2}{ds}$$

وبالتعويض في (14.68) نحصل على

$$\cos\theta \sqrt{g_{22}} = \langle T, X_2 \rangle$$

$$= \langle X_1 \frac{du^1}{ds} + X_2 \frac{du^2}{ds}, X_2 \rangle$$

$$\cos\theta\sqrt{g_{22}} = \frac{du^1}{ds} < X_1, X_2 > + \frac{du^2}{ds} < X_2, X_2 >$$

$$= \frac{du^1}{ds} g_{12} + \frac{du^2}{ds} g_{22}$$

وحيث أن $g_{12} = 0$ على السطح المعطى

$$\therefore \cos\theta\sqrt{g_{22}} = \frac{du^2}{ds} g_{22}$$

ومن العلاقة (14.65) نجد أن

$$\cos\theta\sqrt{g_{22}} = \text{const.} \qquad (14.69)$$

وهو المطلوب.

تعريف (٧.١٤):

يقال أن التمثيل البارامتري $X = X(u^\alpha)$ نصف جيوديسي semigeodesic على السطح المنتظم إذا كان متعامداً ($g_{12} = 0$) وإحدى عائلتي الخطوط البارامترية هي منحنيات جيوديسية.

فمثلاً إذا كانت العائلة البارامترية $u^2 =$ const. هي منحنيات جيوديسية $(g_{11} = g_{11}(u^1))$ وبالتعويض في معادلات الخطوط الجيوديسية يمكن أن نصل بسهولة إلى (باستخدام تحويل مناسب للبارامترات).

$$ds^2 = (d\bar{u}^1)^2 + g_{22}(du^2)^2, \; d\bar{u}^1 = \sqrt{g_{11}(u^1)}du^1$$

تعريف (٨.١٤):

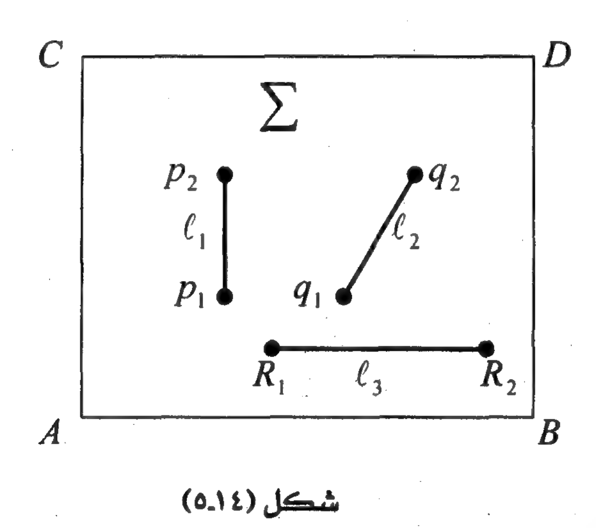
الرقعة الإحداثية المتعامدة (الخطوط البارامترية تتقاطع على التعامد) على السطح التي تحقق أن أحد عائلتي الخطوط البارامترية هي خطوط جيوديسية تسمى مجموعة إحداثيات جيوديسية A set of geodesic coordinates (semi-geodesic patch)

مثال (١٣.١٤):

استخدم تعريف السطوح المفرودة في إثبات أن الحلزون الدائري $r = (a\cos u, a\sin u, bu)$ هو خط جيوديسي على الأسطوانة.

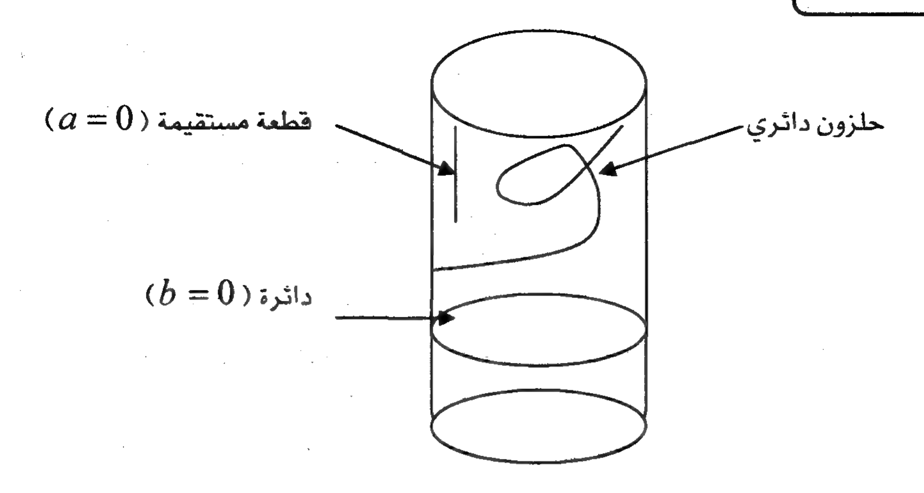
الحل:

السطح المفرود (يمكن فردة أو قابل للفرد ليصبح مستوى) هو سطح متقايس isometric مع المستوى وهذا معناه أن المسافة بين نقطتين على السطح المفرود هي نفسها المسافة بين صورهم على المستوى. ونبين ذلك بطريقة عملية كالتالي:
نأخذ قطعة ورق مستطيلة الشكل ونحدد مجموعة من النقاط عليها كما هو موضح في شكل (٥.١٤).



شكل (٥.١٤)

ونكون الأسطوانة الناتجة من قطعة الورق عن طريق طيها لتصبح أسطوانة دائرية قائمة قاعدتها AB وارتفاعها AC. في هذه الحالة نجد أن القطعة المستقيمة ℓ_3 على المستوى $\sum$ أصبحت دائرة على الأسطوانة توازي قاعدتها والقطعة ℓ_1 ظلت كما هي (لاتغيرية) في اتجاه مولدات الأسطوانة بينما القطعة المائلة ℓ_2 أصبحت في شكل حلزون دائري على الأسطوانة كما هو مبين في شكل (٦.١٤).



شكل (٦.١٤)

القطعة المستقيمة $(a = 0)$ والدائرة $(b = 0)$ حالات خاصة من الحلزون الدائري

$$r = (a\cos u, a\sin u, bu)$$

تعريف (٩.١٤):

يقال أن الراسم $f : M \longrightarrow \bar{M}$ بين سطحين منتظمين أنه راسم جيوديسي Geodesic mapping إذا كان ينقل الخطوط الجيوديسية على السطح M إلى الخطوط الجيوديسية على السطح $\bar{M}$.

تمارين (١٤)

(١) أوجد الانحناء الجيوديسي للخطوط البارامترية على سطح الأسطوانة وكذلك على سطح المخروط الدائري $x^2+y^2-z^2=0$.

(٢) أوجد الانحناء الجيوديسي للخطوط البارامترية على السطح المسطر. وبين أن أي خط مستقيم واقع على السطح هو خط جيوديسي.

(٣) أوجد الانحناء الجيوديسي للخطوط البارامترية على السطح الدوراني.

(٤) أوجد الخطوط الجيوديسية على سطح المخروط الدائري $x^2+y^2=z^2$.

(٥) أوجد الانحناء الجيوديسي للمنحنى $u^1=u^2$ على سطح الهليكويد

$$X(u^1,u^2)=(u^1\cos u^2,u^1\sin u^2,u^2)$$

(٦) استخدم صيغة جاوس لحساب الانحناء الجاوسي على سطح مغطى برقعة إحداثية متعامدة نصف جيوديسية.

(٧) أثبت أن الخطوط الجيوديسية على السطح المسطر هي رواسمه.

(٨) بين أن الخطوط الجيوديسية على السطح الذي له $I=ds^2=(u^2)^2(du^1)^2+(du^2)^2$ هي قطاعات مكافئة على المستوى u^1u^2 .

(**إرشاد:** ضع $g_{22}=1$ ، $g_{11}=(u^2)^2$ ، $g_{12}=0$ في معادلة الجيوديسيات).

(٩) أثبت أنه إذا كان الخط الجيوديسي هو خط تقاربي فإنه يكون خط مستقيم.

(**إرشاد:** استخدم تعريف الخط التقاربي وكذلك تعريف الجيوديسيات).

(١٠) أثبت أنه إذا كان الخط الجيوديسي هو خط انحنائي فإنه يكون منحنى مستوياً (واقع في مستوى).

(إرشاد: استخدم معادلات الجيوديسيات، وخطوط الانحناء معاً أو $\frac{dN}{ds} \wedge \frac{dX}{ds} = 0$).

(١١) أوجد معادلة الخطوط الجيوديسية على السطح الذي عنصره الخطي هو

$$ds^2 = I = (du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2$$

(إرشاد: ضع $g_{11} = 1, g_{12} = 0$ في حساب $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ وعوض بعد ذلك في معادلات الخطوط الجيوديسية)

(١٢) أثبت أنه إذا كان الخط الجيوديسي على السطح المنتظم هو خط تقاربي فإنه يكون خط مستقيم.

(إرشاد: استخدم العلاقة $k^2 = k_n^2 + k_g^2$)

(١٣) أثبت أنه إذا كان الخط الجيوديسي هو خط انحنائي فإنه يكون منحنى مستوياً.

(إرشاد: من الصيغ التي تعطي k_g ، τ_g وتعرف الخط الجيوديسي والانحنائي).

(١٤) أوجد معادلة الخطوط الجيوديسية للسطوح التي عنصرها الخطي هو

$$I = ds^2 = (U^1(u^1) + U^2(u^2))((du^1)^2 + (du^2)^2)$$

(إرشاد: $g_{12} = 0, g_{11} = g_{22} = U^1(u^1) + U^2(u^2)$ ومثل هذه السطوح تسمى **سطوح ليوفيل** Liouville).

(١٥) بين أنه يوجد راسم جيوديسي بين سطوح الانحناء الجاوسي الثابت إلى المستوى.

(١٦) بين أنه يوجد تناظر بين خطوط الانحناء على سطح منتظم M والخطوط الجيوديسية على سطحي مراكز الانحناء للسطح M (**السطوح البؤرية**) Focal surfaces.

(**إرشاد:** نعتبر سطح منتظم $M : X = X(u^1, u^2)$ ونكون

$$F_1 : R_1 = X + \frac{1}{k_1} N \,, F_2 = X + \frac{1}{k_2} N.$$

حيث N العمودي على السطح M، k_1, k_2 هما الانحناءات الأساسية على السطح M. أوجد $g^1_{\alpha\beta}$، $g^2_{\alpha\beta}$ الكميات الأساسية الأولى على السطوح البؤرية F_1، F_2 واكتب المعادلة التفاضلية للخطوط الجيوديسية نجد أنها منطبقة على الخطوط الانحنائية على السطح M).

(١٧) بين أن الخط الجيوديسي على السطح يتحدد تحديد تام إذا تحقق أي من الخواص الآتية:

(i) العمودي على السطح ينطبق على العمود الأساسي.

(ii) العمودي على السطح يقع في المستوى اللاصق.

(iii) الانحناء الجيوديسي ينعدم.

(iv) $k = |k_n|$ عند أي نقطة.

(v) المستوى المقوم ينطبق على المستوى المماس للسطح عند أي نقطة على المنحنى

(**إرشاد:** ارجع إلى تعريف الخطوط الجيوديسية واستخدم إطار داربو والعلاقة بين الانحناءات).

(١٨) المنحنى على السطح يكون خط جيوديسي إذا تحقق أي من الخواص السابقة في تمرين (١٧)

(**إرشاد:** هذا التمرين هو صياغة أخرى للتمرين (١٧)).

(١٩) أوجد الخطوط الجيوديسية على السطوح المفرودة.

(**إرشاد:** استخدم نظرية جاوس والتساوي القياسي).

(٢٠) أوجد الصيغة الأساسية الأولى على السطوح البؤرية F_1, F_2 للسطح المنتظم M.

(٢١) أوجد كل من الانحناء الجاوسي والمتوسط للسطوح البؤرية.

الباب الخامس عشر

مدخل إلى عديد الطيات التفاضلي

Differentiable Manifold Approach

في هذا الباب نقدم خواطر سريعة حول عديد الطيات التفاضلي دون الخوض في تفاصيل جزئياتها وكذلك ربطها بالنماذج المختلفة التي قدمناها في الأبواب السابقة. وكذلك قمنا بتصنيف عديد الطيات التفاضلي طبقاً لنوع البناء الإضافي المعرف عليها مع التركيز على كيفية عمل الخرائط والرقع الإحداثية. وهذا الباب يعتبر تعميم لما قدمناه في الأبواب السابقة وبالتالي يعتبر بداية لموضوع متقدم في الهندسة التفاضلية.

(١.١٥) مقدمة :

إذا أردنا التحرك داخل نموذج (مجموعة من العناصر أو النقاط) من النماذج التي درسناها نحتاج إلى علم الهندسة التفاضلية وبالأخص الهندسة التفاضلية في الفراغات الريمانية. فالهندسة التفاضلية هي علم يهتم بدراسة الخواص الهندسية اللاتغيرية لمجموعة تفاضلية دراسة موسعة ومحلية global and local studying بينما التوبولوجي التفاضلي يهتم بدراسة الخواص التوبولوجية اللاتغيرية لهذه المجموعة invariant topological properties

هذه المجموعة التي تدور حولها الدراسات في كلا العلمين هي **عديد الطيات** ذو البعد n، والذي يعرف على أنه فضاء توبولوجي M بحيث يوجد لكل نقطة عليه جوار $U \subset M$ متشاكل homeomorphic مع فضاء إقليدي بعده n. هذا التشاكل يسمى **خريطة** لأنه يصور ذلك الجوار من عديد الطيات على فضاء مستو، كما في الخرائط على الأرض.

وبأسلوب بسيط (هو عام ودقيق في مضمونة) يمكن القول أن عديد الطيات هو مجموعة من العناصر ترمز لأي شيء من مكونات الكون الذي نعيش فيه مرتبطة معاً من خلال مفهوم موسع للمجموعة، أي معرف عليها توبولوجي له مواصفات خاصة

ومعرف حول كل نقطة تشاكل إلى منطقة من فراغ إقليدي مألوف لدينا ، أي أن كل نقطة أصبح لها إحداثيات بهذا التشاكل. والحركة في هذه المجموعة أو الترابط بين عناصرها محكوم بالمشتقات التفاضلية والعمليات الجبرية.

ومن هنا يتضح مفهوم عديد الطيات الذي يبدو غامضاً لغير المتخصصين بأنه مجموعة معرف عليها بناء جبري - بناء هندسي - بناء توبولوجي - بناء تفاضلي. وهذا يؤدي إلى أهمية أن الهندسة أصبحت ليس بالمفهوم التقليدي ولكنها عملية هندسة المعلومات المعطاة داخل مجموعة ما أي تصبغ بصبغة الهندسة كي يمكن استخلاص النتائج والمعلومات وتأويلها هندسياً ، ومثال على ذلك دراسة النقاط الشاذة singular points للدالة من وجهة نظر هندسية يتيح لنا دراسة هندسة الكوارث أو الفجائيات catastrophe theory والتنبؤ بها.

وفي كلا العلمين (الهندسة التفاضلية والتوبولوجي التفاضلي) تنصب معظم الدراسات على عديدات الطيات التفاضلية ، ولكن التوبولوجي يدرس التراكيب التوبولوجية عليه فهو هندسة بدون قياس أي يهتم بالدراسة الكلية لعديد الطيات. بينما الهندسة التفاضلية تدرس التراكيب الهندسية أي تهتم بالدراسة الكلية والمحلية لعديد الطيات.

وعن طريق الهندسة التفاضلية أمكن تعميم كثير من المفاهيم والأفكار الرياضية المعروفة من خلال معلومات بديهية أي داخل الفراغ الإقليدي وذلك باستخدام أسلوب المسلمات الذي هو أساس الهندسة منذ البداية.

فقد أمكن مثلاً بواسطة مفاهيم الهندسة التفاضلية تعميم حقل الأعداد الحقيقية إلى الفضاء الاتجاهي vector spaces وكذلك خواص المسافة المعروفة إلى الفضاء المتري metric space وغير ذلك من الأمثلة ... كما هو موضح من خلال المخطط :

طريقة المسلمات :

أحد الطرق المستخدمة لتعميم مفهوم رياضي

بناء أو تركيب بسيط

بناء أو تركيب معقد

مجموعة من الأشياء (مجموعات أو دوال)، مثلاً متجهات، النقل المتوازي، اللابلاسي Laplacian

?

التعاريف لن تعمم بطريقة مباشرة وواضحة (التعاريف قد تعتمد على نظام الإحداثيات)

في البداية قد تكون هذه المعلومات غريبة إلى حد بعيد وغير بديهية

الخصائص التي تعرف المفهوم البسيط

مسلمات

أي شيء object يحقق هذه الخصائص (التي تحقق هذه المسلمات) تعتبر تعميم للمفهوم

(٢.١٥) الابنية الإضافية على عديد الطيات:

Additional Structures on a Manifold:

بعد أن قدمنا نبذة مختصرة عن عديد الطيات في شكله العام، نقدم الآن تعريف عديد الطيات تبعاً لنوع البناء المعرف عليها بأسلوب أشمل وأعم أي يشمل الاتصال والتفاضل في الأبعاد العليا وأن كل هذا يتطلب معرفة جيدة بالتوبولوجي وعلاقته بالهندسة (دون الخوض في التفاصيل الدقيقة للتحليل الرياضي).

تعريف (١.١٥):

يعرف عديد الطيات Manifold على أنه فراغ رياضي مجرد Abstract فيه كل نقطة لها منطقة جوار مباشر تكون صورة (تشابه) resembles لفراغ إقليدي.

ملاحظة (١.١٥):

التعريف السابق محلي local ولكن في البناء الموسع Global structure قد يكون التعريف أكثر تعقيداً.

ملاحظة (٢.١٥):

في دراسة عديد الطيات تكون فكرة البعد dimension مهمة فمثلاً الخطوط المستقيمة بعدها واحد والمستويات بعدها 2.

مثال (١.١٥):

في حالة عديد الطيات أحادي البعد تكون كل نقطة لها منطقة جوار مباشر تبدو كما لو كانت (تشبه) looks like قطعة مستقيمة والمثال على ذلك الخط المستقيم والدائرة والمنحنى وزوج الدوائر.

مثال (٢.١٥):

في حالة عديد الطيات ثنائي البعد كل نقطة لها منطقة جوار مباشر تشابه قرص disk ومن أمثلة ذلك المستوى وسطح الكرة والأسطوانة.

غالباً ما تعرف أبنية أو تراكيب structure إضافية على عديد الطيات للحصول على حالات خاصة ونوضح ذلك من خلال مجموعة التعاريف الآتية التي هي بسيطة في صياغتها ولكن عميقة في مضمونها Roughly speaking.

تعريف (٢.١٥):

عديد الطيات التفاضلي differentiable هو عديد طيات يسمح بإجراء حساب التفاضل والتكامل عليه.

تعريف (٣.١٥):

عديد الطيات الريماني Riemannian هو عديد طيات يسمح بتعريف المسافة والزاوية.

تعريف (٤.١٥):

عديد الطيات التماسكي symplectic والذي يمثل فراغ الطور phase في الميكانيكا الكلاسيكية أو فراغ الشكل configuration في حركة الأجسام المتماسكة.

تعريف (٥.١٥):

عديد الطيات الريماني الكاذب pseudo-Riemannian رباعي البعد والذي يعتبر نموذج لفراغ الزمان والمكان في نظرية النسبية العامة space time general relativity.

(٣.١٥) مفاهيم أولية Elementary Concepts

قبل إعطاء التعريف الرياضي الدقيق والفني Technical Mathematical Definition لعديد الطيات يجب معرفة الرياضيات التي تقف خلف عديد الطيات (متطلب سابق Prerequisite) في حساب التفاضل والتكامل والتوبولوجي والرواسم بين الفراغات.

تعريف (٦.١٥):

يقال أن الدالة f بين فراغين توبولوجيين X,Y، تشاكل homeomorphism إذا كانت f تناظر أحادي وكل من f ,f^{-1} دوال متصلة. إذا وجد تشاكل بين X,Y يقال أن X تشاكل Y homeomorphic.

مثال (٣.١٥):

قرص الوحدة ومربع الوحدة في $\mathbb{R}^2$ متشاكلان.

مثال (٤.١٥):

الفترة المفتوحة $(-1,1)\subset\mathbb{R}$ تشاكل خط الأعداد كله $\mathbb{R}$.

ملاحظة (٣.١٥):

شرط أن f^{-1} متصلة هو شرط أساسي ونوضح ذلك من خلال المثال:

مثال (٥.١٥):

الدالة

$$f:[0,2\pi)\subset\mathbb{R}\longrightarrow S^1\subset\mathbb{R}^2\ ,\ \ f(\phi)=(\cos\phi,\sin\phi)$$

تناظر أحادي ومتصلة ولكن ليست تشاكل لأن f^{-1} غير متصل حيث $S^1\subset\mathbb{R}^2$ دائرة الوحدة.

ملاحظة (٤.١٥):

التشاكل يعني

Homeomorphism = hormeos + morphe

تشاكل = identical + shape

أي تطابق الأشكال (تفسير المعنى بكلمات أصلها أغريقي).

ملاحظة (٥.١٥):

التشاكل في مجال التوبولوجي الرياضي يعني تماثل isomorphism بين الفراغات التوبولوجية يحافظ على الخصائص التوبولوجية. بمعنى أنها homeomophic تعني نفس الشيء.

ملاحظة (٦.١٥):

تقريباً يمكن القول roughly speaking أن الفراغ التوبولوجي هو شيء هندسي object والتشاكل homeomorphism هو شد stretching وثني bending متصل لهذا الشيء إلى شكل جديد ولهذا فإن المربع والدائرة متشاكلان.

مما سبق يمكن إعطاء التعريف الآتي:

تعريف (٧.١٥):

التوبولوجي هو دراسة خواص الأشياء التي لا تتغير invariant تحت تأثير التشاكل.

تعريف (٨.١٥):

يقال أن الراسم أو دالة التناظر الأحادي $f:M \longrightarrow N$ بين عديدات الطيات M, N تشاكل تفاضلي diffeomorphism إذا كان كل من f, f^{-1} تفاضلي أي أن التشاكل التفاضلي = تشاكل + تفاضل. وفي هذه الحالة يكتب $M \simeq N$ أي أن M، N متشاكلان تفاضلياً diffeomorphic.

مثال (٦.١٥):

الراسم التفاضلي $f:U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ يكون تشاكل تفاضلي إذا كان

(i) تناظر أحادي (تقابل) bijection

(ii) المشتقة Df (مصفوفة جاكوب) قابلة للعكس والتي تعني أن محدد جاكوب مختلف عن الصفر (أنظر الباب الثاني).

ملاحظة (٧.١٥):

إذا كان $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow R^m$ فإن الشرط (ii) في المثال السابق لا يصلح لأن Df مصفوفة ليست مربعة في هذه الحالة وبالتالي غير قابلة للعكس وهذه الحالة موضوع دراسة متقدمة.

مثال (٧.١٥):

دالة التناظر الأحادي التفاضلية ليست من الضروري أن تكون تشاكل تفاضلي فمثلاً $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x)=x^3$ ليست تشاكل تفاضلي لأن $f'(x)=3x$ تساوي صفر عند $x=0$ (المشتقة هنا تعني مصفوفة جاكوب 1×1).

(٤.١٥) التعريف الرياضي لعديد الطيات:

Mathematical Definition of a Manifold

عديد الطيات ذو البعد n (n-manifold) هو فراغ توبولوجي من نوع هاوسدورف Housdorff (T_2-space) ويحقق مسلمة العدية الثانية second

countable بحيث كل نقطة فيه لها منطقة جوار مباشر متشاكل مع كرة مفتوحة B^n (n-ball) من الفراغ الإقليدي $\mathbb{R}^n$ حيث

$$B^n\{(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+x_2^2+...+x_n^2<1\}$$

ملاحظة (٨.١٥):

شرط العدية الثاني 2^{nd} countable لا يتحقق في بعض الفراغات مثل الخط المستقيم الكامل وشرط (T_2-space) لا يتحقق في بعض الفراغات مثل $R\times\{a\}$, $R\times\{b\}$ أي تطابق الخطوط المستقيمة عند أي نقطة فيما عدا نقطة الأصل.

ملاحظة (٩.١٥):

كل عديدات الطيات هي عديدات طيات توبولوجية بحيث عند كل نقطة عليها (locally) يوجد توبولوجي لفراغ إقليدي.

(٥.١٥) الخرائط والرقع الإحداثية Coordinate Patch and Charts

كلنا يعلم أن الملاحة على سطح الكرة الأرضية تستخدم خرائط مستوية flat maps or charts وتجمع في ما يسمى أطلس Atlas. بالمثل فإن عديد الطيات التفاضلي يمكن وصفه من خلال خرائط رياضية والتي تسمى خرائط إحداثية Coordinate Charts وتجمع في أطلس رياضي Mathematical Atlas.

في الحالة العامة لا يمكن وصف عديد الطيات من خلال خريطة واحدة بسبب أن البناء الكلي Global لعديد الطيات يختلف عن البناء البسيط للخريطة المستوية والمثال على ذلك لا توجد خريطة واحدة تغطي سطح الكرة الأرضية بالكامل.

عندما يغطى عديد الطيات بعديد من الخرائط المتقاطعة overlapping فإن مناطق التقاطع تعطي معلومات أساسية لفهم البناء الكلي. فمثلاً الاتحاد السوفيتي سابقاً يوجد في منطقة تقاطع خريطة آسيا مع خريطة أوروبا.

تعريف (١٠.١٥):

الخريطة الإحداثية coordinate map or chart لعديد الطيات هي راسم قابل للعكس بين مجموعة جزئية من عديد الطيات إلى فراغ بسيط simple space بحيث كل من الراسم ومعكوسه يحافظ على بناء عديد الطيات.

مثال (٨.١٥):

في حالة عديد الطيات التفاضلي فإن الفراغ البسيط هو الفراغ الإقليدي $\mathbb{R}^n$ والبناء هو البناء التفاضلي differentiable structure. هذا البناء يحفظ invariant من خلال التشاكلات (الرواسم القابلة للعكس والممثلة في كلا الاتجاهين).

تعريف (١١.١٥):

في حالة عديد الطيات التفاضلي فإن مجموعة الخرائط تسمى أطلس Atlas يسمح لنا بعمل حساب التفاضل على عديد الطيات.

مثال (٩.١٥):

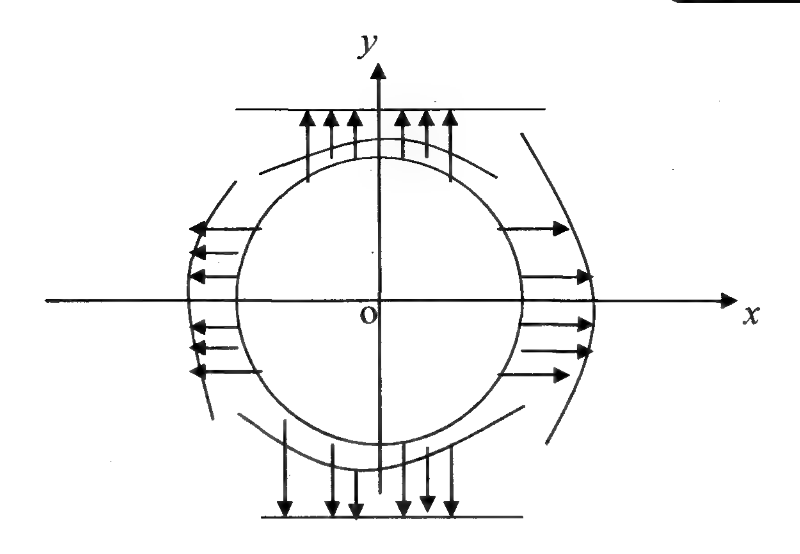
الإحداثيات القطبية تكون خريطة للمستوى $\mathbb{R}^2$ محذوف منه محور x (الخط القطبي) ونقطة الأصل (القطب).

مثال (١٠.١٥):

نعتبر أبسط مثال لعديد طيات توبولوجي خلاف الخط المستقيم وهو الدائرة. بالنسبة لهذه الدائرة أوجد الخرائط المناسبة والأطلس.

الحل:

نعتبر النصف العلوي من الدائرة $x^2+y^2=a^2$ حيث $y>0$. أي نقطة في نصف الدائرة العلوي Top semi circle يمكن وصفها من خلال الإحداثي x. ولهذا بالإسقاط على محور x يمكن الحصول على راسم f_T متصل بين نصف الدائرة والفترة المفتوحة $(-1,1)$. حيث $f_T(x,y)=x$ هذه الدالة تسمى خريطة كما هو موضح في شكل (١.١٥).



شكل (١.١٥)

بالمثل توجد خرائط للنصف السفلي (bottom) f_B والنصف الأيسر (left) f_L والنصف الأيمن (right) f_R من الدائرة. كل هذه الخرائط تغطي كل الدائرة والخرائط الأربع $\{f_T, f_B, f_L, f_R\}$ تكون أطلس للدائرة.

الخريطة اليمنى f_R والخريطة العليا f_T تتقطع في الربع الموجب من المستوى ($x > 0, y > 0$) وكل من الخرائط f_T، f_R يرسم منطقة التقاطع (في تناظر أحادي) على الفترة $I(0, 1)$. إذاً يمكن تكوين دالة T من الفترة I إلى نفسها بحيث معكوس الخريطة العليا f_T^{-1} يأخذ $a \in I$ إلى الدائرة ثم الخريطة اليمنى f_R تأخذ الصورة إلى الفترة نفسها أي أن

$$T(a) = (f_R \circ f_T^{-1}) = f_R(a, \sqrt{1-a^2}) = \sqrt{1-a^2} \in I, a \in (0,1)$$

مثل هذه الدالة T تسمى راسم ناقل Transition.

الأطلس $\{f_T, f_B, f_R, f_L\}$ يبين أن الدائرة عديد طيات ولكن ليست هو الأطلس الوحيد.

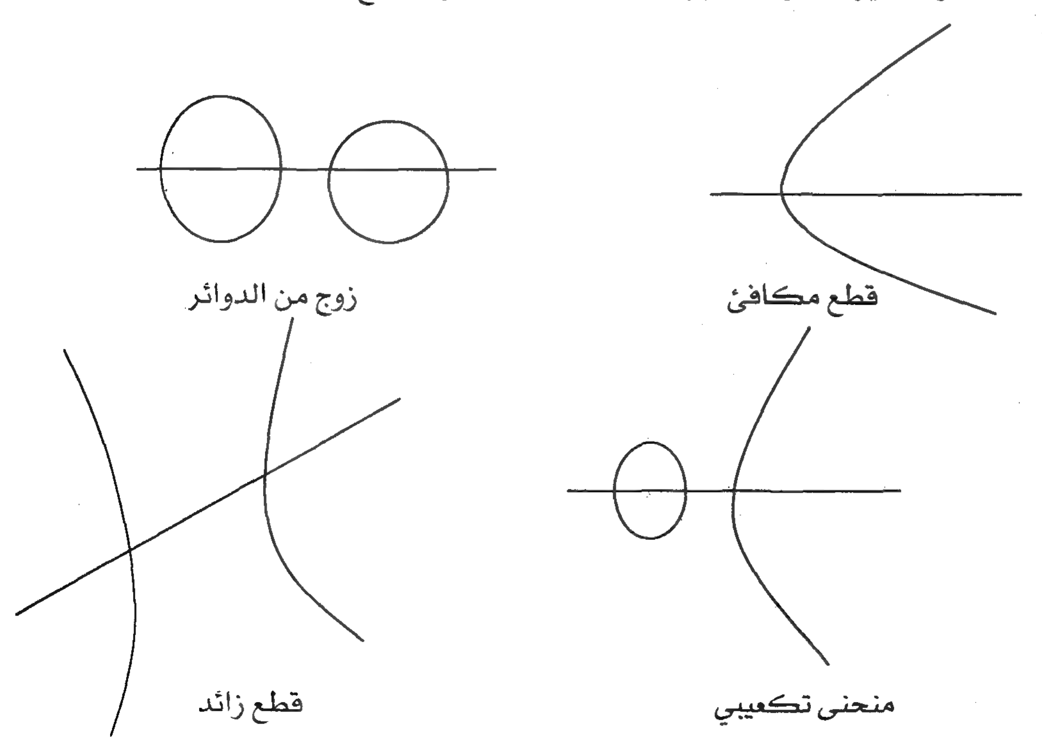
ملاحظة (١٠.١٥):

عديد الطيات ليس بالضرورة أن يكون مترابط connected (كله قطعة واحدة) مثل زوج منفصل من الدوائر وليس بالضرورة أن يكون مغلق مثل القطعة المستقيمة line segment بدون أطرافها وليس من الضرورة أن يكون محدود finite وبالتالي فإن القطع المكافئ عديد طيات.

باستخدام هذه الملاحظات نعطي المثال الآتي:

مثال (١١.١٥):

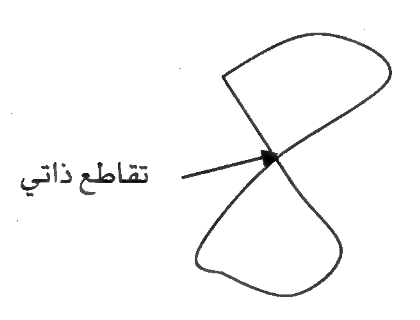
كل من منحنى القطع الزائد (قطعتين مفتوحتين وغير محدودتين) والمحل الهندسي للنقاط التي تقع على المنحنى التكعيبي $y^2 - x^3 + x = 0$ (قطعة مغلقة وقطعة مفتوحة غير محدودة) يعتبر عديد طيات كما هو موضح في شكل (٢.١٥).



شكل (٢.١٥)

مثال (١٢.١٥):

الدائرتين المتقاطعتين مثل شكل 8 (تقاطع ذاتي) ليست عديد طيات لأنه لا يمكن تكوين خريطة مرضية (مناسبة) حول نقطة التقاطع لأن المماس (قابلية التفاضل) غير معرفة عند هذه النقطة كما هو موضح في شكل (٣.١٥).



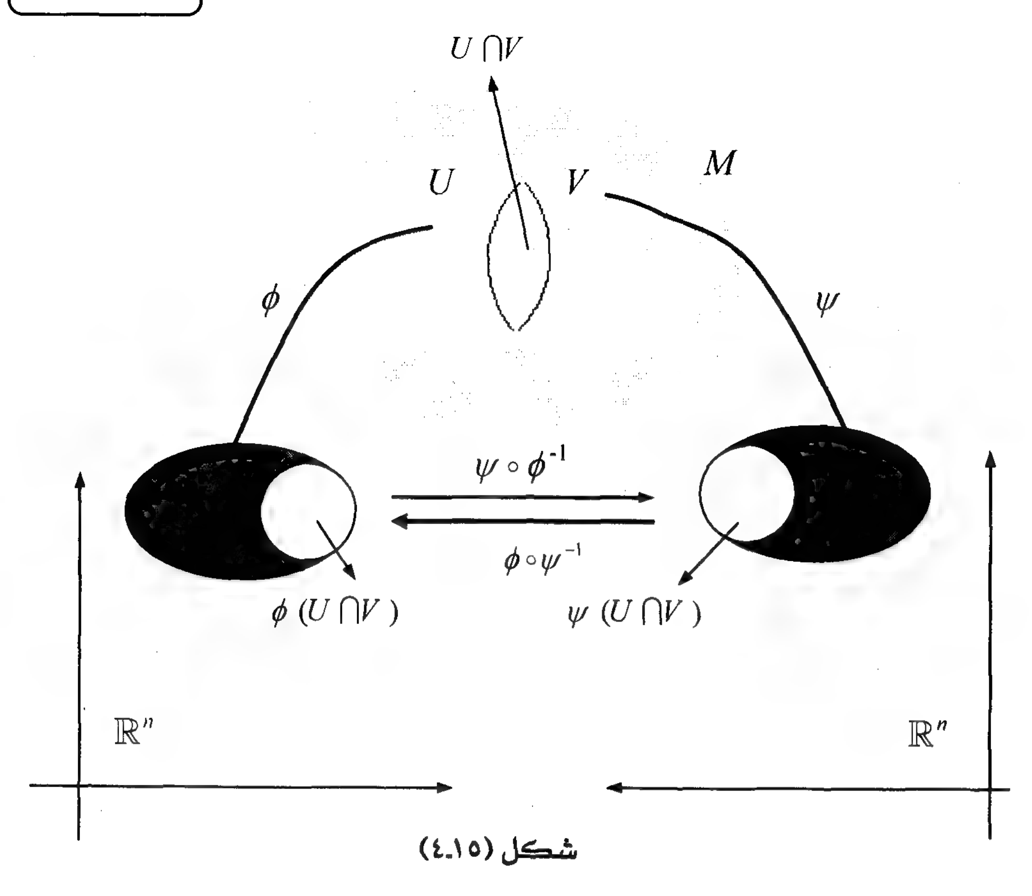
شكل (٣.١٥)

ملاحظة (١١.١٥):

في الغالب عديد الطيات يتطلب أكثر من خريطة والأطلس ليس وحيد لأن عديد الطيات يمكن أن يغطى بطرق عديدة باستخدام تراكيب أو ارتباطات مختلفة من الخرائط.

تعريف (١٢.١٥):

إذا أعطينا خريطتين متقاطعتين overlapping فإن الراسم الناقل transition function أو تغير الإحداثيات change of coordinates يعرف على أنه راسم من الكرة المفتوحة من $\mathbb{R}^n$ إلى عديد الطيات ثم يعود مرة أخرى إلى كرة مفتوحة أخرى من $\mathbb{R}^n$ أو نفسها كما في شكل (٤.١٥).



شكل (٤.١٥)

التعريف (١٢.١٥) يمكن توضيحه بالمثال التالي:

مثال (١٣.١٥):

الدائرة في مثال (١٠.١٥).

في الحالة العامة أي بناء structure على عديد الطيات يعتمد على الأطلس، ولكن أحياناً توجد أطالس مختلفة تؤدي إلى نفس البناء مثل هذه الأطالس يقال أنها متوافقة أو منسجمة compatible. أي أن كل تغير للإحداثيات يكون متوافق مع هذا البناء وبالتالي هذا البناء ينقل إلى عديد الطيات والمثال على ذلك:

مثال (١٤.١٥):

المنحنى المنتظم وتغير البارامترات في الباب الثالث.

مثال (١٥.١٥):

إذا كان كل تغير للإحداثيات لأطلس على عديد طيات تفاضلي يحافظ على البناء التفاضلي العادي للفراغ $\mathbb{R}^n$ (بمعنى أنه تشاكل تفاضلي) فإن البناء التفاضلي ينقل إلى عديد الطيات ويصبح عديد طيات تفاضلي.

بنفس الطريقة التي اتبعناها في توضيح أن الدائرة عديد طيات أحادي البعد نعطي المثال التالي:

مثال (١٦.١٥):

الكرة S^n في $\mathbb{R}^{n+1}$ عديد طيات بعده n .

الحل:

دون خسارة في التعميم نأخذ $n = 2$ أي كرة الوحدة

$$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2=1\}\subset\mathbb{R}^3$$

بما أن الكرة ثنائية البعد إذاً كل خريطة ترسم جزء من الكرة إلى منطقة مفتوحة من المستوى $\mathbb{R}^2$.

نعتبر نصف الكرة الشمالي حيث $z=\sqrt{1-x^2-y^2}, z>0$ ونأخذ الدالة

$$f(x,y,z)=(x,y)$$

والتي ترسم نصف الكرة الشمالي إلى قرص الوحدة المفتوح $x^2+y^2<1$ عن طريق إسقاط نصف الكرة على المستوى xy. بالمثل توجد خريطة لنصف الكرة الجنوبي حيث $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}, z<0$. وكذلك الخرائط التي ترسم المنطقة $x>0$، $x<0$ إلى قرص الوحدة المفتوح $x=\pm\sqrt{1-y^2-z^2}, z^2+y^2<1$ على المستوى zy. والخرائط التي ترسم المنطقة $y>0$، $y<0$ $y=\pm\sqrt{1-x^2-z^2}$ إلى قرص الوحدة المفتوح $x^2+z^2<1$ على المستوى xz. وبالتالي يوجد أطلس مكون من 6 خرائط يغطي الكرة بأكملها (أنظر الباب السابع شكل (٨.٧)).

ملاحظة (١٢.١٥):

صورياً formally أي شيء object يمكن تخطيطه charted هو عديد طيات.

(٦.١٥) تصنيف عديدات الطيات التفاضلي:

Classes of Differentiable Manifolds :

١. **عديد الطيات التفاضلي** والذي يشبه محلياً فراغ إقليدي وعليه كل نقطة لها منطقة جوار مباشر ترسم إلى الفراغ الإقليدي $\mathbb{R}^n$ بواسطة تشاكل. كل هذه التشاكلات تعرف الخرائط لعديد الطيات. كل الخرائط المحلية على عديد الطيات تكون متوافقة (منسجمة) compatible بالمفهوم الذي عرفناه سابقاً. على عديد الطيات التفاضلي يمكن تعريف الاتجاهات والفراغات المماسية والدوال التفاضلية (حساب التفاضل على عديد الطيات). كل نقطة في عديد الطيات ذو البعد n لها فراغ مماسي. هذا الفراغ هو فراغ إقليدي بعده n يتكون من كل المماسات للمنحنيات التي تمر خلال هذه النقطة. **والمثال** على ذلك الدائرة حيث رواسم تغير الإحداثيات تفاضلية.

٢. يوجد نوعين من **عديد الطيات التفاضلي** وهما **عديد الطيات الأملس** smooth حيث تغير الإحداثيات أو رواسم النواقل ملساء أي قابلة للتفاضل عدد لانهائي من المرات infinitely differentiable . وعديد **الطيات التحليلي** وهو عبارة عن عديد طيات أملس بالإضافة إلى ذلك تكون رواسم النواقل transitions تحليلية (تحقق مفكوك تيلور). **والمثال** على ذلك الكرة والسطوح والمنحنيات المشهورة التي درسناها.

٣. **عديد الطيات الريماني** Riemannian manifold وهي عديد طيات تحليلي بحيث على كل فراغ مماسي تعرف دالة الضرب الداخلي inner product والتي تتغير بطريقة ملساء smoothly من نقطة إلى أخرى. الضرب الداخلي يمكننا من تعريف المسافة والزاوية والمسافة والحجم والانحناء والانحدار للدوال والتباعد

لحقول الاتجاه. **والأمثلة** على ذلك الدائرة والكرة والفراغ الاقليدي وكثير من المنحنيات والسطوح المشهورة والتي تمت دراستها في الأبواب السابقة.

٤- **عديدات طيات فنسلر** Finsler manifold يسمح بتعريف المسافة ولكن لا يسمح بتعريف الزاوية وهو عبارة عن عديد طيات تفاضلي فيه كل فراغ مماسي يسمح بتعريف المعيار norm والذي يتغير من نقطة إلى أخرى بطريقة ملساء. هذا المعيار يمكن تحديده أو توسيعه extended إلى قياسي metric يعرف طول المنحنى ولكن لا يمكن في الحالة العامة تعريف ضرب داخلي. **والمثال** على ذلك كل عديد طيات ريماني هو عديد طيات فنسلر.

٥- **عديد الطيات المركب** Complex manifold هو عديد طيات معرف باستخدام $\mathbb{C}^n$ بدلاً من $\mathbb{R}^n$ (متشاكل محلياً مع الفراغ $\mathbb{C}^n$) وفيه رواسم تغير الإحداثيات تحليلية holomorphic في منطقة الخرائط. عديد الطيات المركب هو الأساس في دراسة الهندسة في المجال المركب complex geometry وكذلك التحليل المركب. **والمثال** على ذلك عديد الطيات المركب أحادي البعد والذي يسمى سطح ريمان Riemann surface.

ملاحظة (١٣.١٥):

عديد الطيات المركب ذو البعد n يعتبر عديد طيات تفاضلي بعده $2n$.

٦- **عديد الطيات لانهائي البعد** infinite dimensional manifold **والمثال** على ذلك عديد طيات بناخ Banach manifold والتي تشاكل محلياً فراغ بناخ Banach space.

٧- **عديد الطيات التماسكي** Symmetric manifold هو عديد طيات يستخدم لتمثيل فراغات الطور في الميكانيكا الكلاسيكية. وهو يمثل كل المواضع وكميات الحركة (السرعات) لحركة الجسم المتماسك باعتبارها بارامترات لعديد الطيات.

٨ عديد الطيات المحكم (المتراص) compact manifold هو عديد طيات محكم compact باعتباره فراغ توبولوجي **والمثال** على ذلك الدائرة وهي عديد الطيات المحكم الوحيد والأحادي البعد والكرة S^2 في الفراغ الثلاثي والكرة S^n في الفراغ $\mathbb{R}^{n+1}$.

أحياناً عديد الطيات المحكم يعني عديد طيات بدون حدود without boundary or boundary less ونقول عديد طيات بدون حدود لتعني عديد طيات مغلق closed. ومن **الخصائص الهامة** التي تتمتع بها عديدات الطيات المحكمة هو أن أي دالة حقيقية متصلة تكون محدودة على عديد الطيات المحكم (تحليل رياضي). وأنها تغطي بخرائط عديدة بطريقة محدودة finitely covered.

حد boundary عديد الطيات ذو البعد n هو عديد طيات بعده $n - 1$ ، **فمثلاً** القرص (الدائرة وما بداخلها) هو عديد طيات بعده 2 وله حد هو الدائرة (عديد طيات بعده 1) الكرة ball (سطح الكرة وما بداخلها) هو عديد طيات بعده 3 وله حد هو سطح الكرة (عديد طيات بعده 2). الأسطوانة محدودة هي عديد طيات بعده 2 ولها حد بعده 1 (القاعدتين).

وفي النهاية نسترجع ما ذكرناه في الباب الأول حيث أن الهندسة اللاإقليدية تعتبر هندسة فراغات لا تتحقق فيها مسلمة التوازي الاقليدي. ورأينا أن ساكيري saccheri ولوباتشفيسكي Labachevsky وبوي Bolyai وريمان Riemann درسوا هذه الفراغات وتوصلوا إلى نوعين من الهندسات هما الهندسة الزائدية والناقصية. وبعد دراسة عديد الطيات بالمفهوم الحديث أمكن النظر إلى الهندسة الزائدية والناقصية على أنها عديدات طيات انحنائها ثابت سالب وموجب على الترتيب spaces of constant curvatures.

(٧.١٥) مفاهيم الانحناء والتجاعيد على عديد الطيات :

الانحناء من الخواص التي تهتم بدراستها الهندسة التفاضلية فهو دالة نقيس بها مدى تقوس الشكل shape bending، ويفرق بين شكل object وأخر، وهو الذي يبين لنا المنحنيات المميزة التي تغطي عديد الطيات وهي المنحنيات البارامترية والتقاربية والجيوديسية والانحنائية ومنحنيات أخرى والتي من خلالها نستطيع الحكم على الشكل الذي أمامنا ويجعلنا نفرق بينه وبين أي شكل أخر، وكذلك بصمة أصابع الكائن الحي.

وبصورة عامة هناك نوعان من الانحناءات، انحناء لا جوهري أو خارجي extrinsic curvature (وهو خاص بالفضاء الذي يوجد فيه الشكل وليس لبنية الشكل الداخلية)، وانحناء جوهري أو ذاتي intrinsic curvature (خاص بالشكل نفسه بدون النظر للفضاء الموجود فيه).

الانحناء اللاجوهري للمنحنيات (عديد طيات ذو بعد يساوي واحد) في الفراغ الثنائي أو الثلاثي هو أول الأنواع الذي تم دراسته وتم صياغته في صيغ فرينية التي تصف المنحنى في الفراغ بشكل تام على ضوء انحناؤه في حدود الحركات المتماسكة (أي فيما عدا وضعه في الفراغ). وبعد دراسة انحناء المنحنيات في الفراغ الثنائي والثلاثي اتجه الاهتمام إلى انحناءات السطوح وهي عديد طيات ذو بعد يساوي 2. ومن أهم الانحناءات التي نشأت من هذا التدقيق الانحناء المتوسط والانحناء الجاوسي ومؤثر فينجارتن. الانحناء المتوسط كان أهم الانحناءات في ذلك الوقت لاستخدامه في التطبيقات وكانت معظم الدراسات تنصب عليه إلى أن لاحظ جاوس Gauss الأهمية الكبرى لانحناء يرتبط بالتقعر convex والتحدب concave والاستواء planer والتفلطح، أسماه فيما بعد بالانحناء الجاوسي. ويمكن ربط الانحناء الجاوسي للسطح بمفهوم النهايات العظمى والصغرى extremum أي مناطق التطرف.

والعلاقة واضحة حيث أنه في تمثيل بارامتري خاص (مونج) يمكن اعتبار الانحناء الجاوسي على أنه محدد مصفوفة هيش Hessian matrix. وهذا الانحناء

جوهري أو ذاتي لأنه مرتبط بمفاهيم على السطح مثل المسافة والمساحة والزاوية والتمثيل البارامتري.

العالم ريمان وآخرون عمموا مفهوم الانحناء إلى الانحناء المقطعي sectional curvature والقياسي scalar curvature وانحناء ريتشي Ricci curvature والعديد من الانحناءات الجوهرية واللاجوهرية، وعموماً الانحناء ليس بالضرورة أن تكون أرقاماً ولكنها من الممكن أن تكون في شكل مؤثرات أو ممتدات ... إلى آخره.

(٨.١٥) العلاقة بين الهندسة التفاضلية والتوبولوجية التفاضلي :

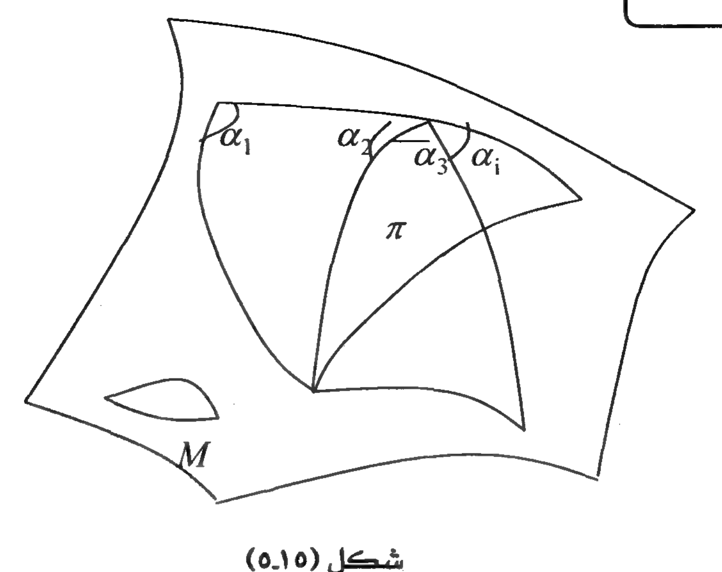
Differential Topology :

نظرية جاوس ـ بونيه Gauss - Bonnet theorem في الهندسة التفاضلية مهمة جداً للسطوح لأنها تربط خواصه الهندسية (انحناؤه) بخواصه التوبولوجية (مميز أويلر Euler characteristic).

وهذه النظرية لها عدة صياغات، من أبسطها تلك التي تعتمد على الانحناء الجاوسي والانحناء الجيوديسي. بصورة أوضح : إذا كان M عديد طيات وكان T عبارة عن تجزئة لعديد الطيات M، فإن نظرية جاوس ـ بونيه Gauss-Bonnet تأخذ الصيغة التالية:

$$\iint_T K dA = \pi - \sum \alpha_i - \int_{\partial T} k_g ds \qquad (15.1)$$

حيث K هي انحناء جاوس، dA هي عنصر المساحة، و α_i هي القفزات للزوايا على الحدود ∂T و k_g هي الانحناء الجيوديسي للحدود ∂T (الانحناء الجيوديسي هو المركبة المماسية لمتجه الانحناء لمنحنى يصل بين نقطتين على عديد الطيات حيث يكون $k_g = 0$ إذا كان المنحنى ذو أقصر مسافة (منحنى جيوديسي) كما هو موضح بالشكل (٥.١٥) :



شكل (١٥-٥)

إذا أخذنا مثلث واحد جيوديسي T (أضلاعه منحنيات جيوديسية أي $k_g = 0$) فإن (15.1) تصبح :

$$\iint_T K dA = \pi - \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \qquad (15.2)$$

ونوضح ذلك بالمثال التالي:

مثال (١٥-١٧):

إذا كانت $K=0$ فإن $\sum \alpha_i = \pi$ أو $K>0$ فإن $\sum \alpha_i < \pi$ أو $K<0$ فإن $\sum \alpha_i > \pi$ وبالتالي فإن هذه الحالات تناظر الهندسة الإقليدية، الكروية (الريمانية)، الهندسة الزائدية على الترتيب والتي تم تعريفها في الباب الأول ($\sum \alpha_i$ تعني مجموع زوايا المثلث).

وإذا كان عديد الطيات متراص بدون حدود (محدود ومغلق) compact without boundary وموجه orientable وبعده 2 فإن النظرية تنص على :

$$\iint_M K dA = 2\pi \chi(M) \qquad (15.3)$$

حيث $\chi(M)$ هو **مميز أويلر** لعديد الطيات M ويعرف كالآتي:

$$\chi(M)=F-E+V$$

حيث F عدد الأوجه الكلي، E العدد الكلي للأحرف و V عدد الرؤوس الكلي لكل المثلثات مأخوذة معاً بالنسبة للتجزيء T لمنطقة R من السطح M.

نظرية (١.١٥): (البرهان خارج نطاق المقرر):

المميز $\chi(M)$ لسطح محكم ومترابط في الفراغ الثلاثي $\mathbb{R}^3$ يأخذ أحد القيم الآتية:

$$2, 0, -2, -4, -6, \ldots, -2n$$

نتيجة لذلك:

١- إذا كان $M, \bar{M}$ سطحان في $\mathbb{R}^3$ بحيث $\chi(M) = \chi(\bar{M})$ فإن M يتشاكل homeomorphic مع $\bar{M}$.

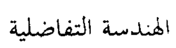
٢. كل سطح محكم مترابط يتشاكل مع كرة أو كرة لها يد (مقبض) handle.

٣. إذا كان S^2 كرة لها k مقبض (يد) فإن $\chi(M)=-2(k-1)$.

٤. سطح قارب النجاة Torus المشهور $(k=1)$ يتشاكل مع كرة ذات مقبض واحد sphere with one handle.

٥. سطح قارب النجاة 2-Torus ذو الفتحتين (التجويفين) holes يتشاكل مع كرة لها 2 مقبض.

٦. يرتبط مع مميز أويلر عدد لا تغيري توبولوجياً يسمى فصيلة genus ويرمز له بالرمز g حيث $g=\dfrac{2-\chi(M)}{2}$. وهذا العدد يشير إلى عدد التجاويف في السطح فمثلاً للكرة S^2 يكون $g=0$، $\chi(S^2)=2$.



الكرة: $\chi=2$

كرة أحادية المقبض

كرة ثنائية المقبض

$2\text{-}T$

T

شكل (٦.١٥)

مثال (١٨.١٥):

أوجد الانحناء الجاوسي الكلي للسطح في شكل (٧.١٥).



شكل (٧.١٥)

الحل:

السطح (٧.١٥) يتشاكل مع كرة لها ثلاث مقابض أي أن $g = 3$ وبالتعويض في العلاقة $g = \frac{2-\chi(M)}{2}$ نجد أن

$$3 = \frac{2-\chi(M)}{2} \Rightarrow \chi(M) = -4$$

وبالتعويض في العلاقة (15.3) نحصل على

$$\iint_M K dA = 2\pi(-4) = -8\pi$$

مثال (١٩.١٥):

أوجد الانحناء الكلي للكرة S^2.

الحل:

بالنسبة للكرة S^2 يكون $g = 0$ ومنها نحصل على

$$0 = \frac{2-\chi(M)}{2} \Rightarrow \chi(M) = 2$$

وبالتعويض في (15.3) نحصل على

$$\iint_{S^2} K dA = 2\pi(2) = 4\pi$$

مثال (٢٠.١٥):

أوجد الانحناء الكلي للمجسم الناقصي (البيضاوي).

الحل:

المجسم البيضاوي يشاكل سطح الكرة وبالتالي فإن الانحناء الكلي له يساوي الانحناء الكلي للكرة ويساوي 4π.

وهذا يوضح مدى الارتباط بين العلمين، لأن الانحناء الجاوسي هو خاصية هندسية geometric property بينما مميز أويلر هو خاصية توبولوجية

topological property وكذلك الفصيلة genus خاصية توبولوجية.

وإذا تم تشويه (تحور) deformation عديد الطيات فإن مميز أويلر لن يتغير بينما انحناؤه سوف يتغير، ولكن النظرية تبين النتيجة المذهلة التي تنص على أن الانحناء الكلي على عديد الطيات (تكامل كل الانحناءات) لن يتغير أي لا يعتمد على دالة القياس ولكن يعتمد على التوبولوجي لعديد الطيات.

(٩-١٥) طرق فنية للحساب Computational Techniques

نعتبر هنا عديد طيات ريماني بعده 2 في الفراغ الثلاثي ولحساب الانحناءات على سطح ما لابد من وجود تمثيل بارامتري للسطح المراد دراسته، فمن البديهي أن نعتبر السطح على أنه مجموعة من النقاط التي تشبه (محلياً) جزء من المستوى في جوار كل نقطة من نقاطه. أي أنه يمكن اعتبار السطح على أنه صورة لمجموعة من نقاط المستوى إلى الفراغ E^3 . ونعتبر على الأقل أن هذا الراسم من الفصل $\mathbb{C}^1$ ، علاوة على ذلك نفترض أن مرتبة جاكوبيان التحويل Jacobian rank تساوي 2 عند كل نقطة، وذلك حتى نضمن وجود مستوى مماس للسطح عند كل نقطة من نقاطه. بتلك الشروط نكون قد توصلنا إلى ما يسمى بالتمثيل البارامتري المنتظم للسطح، والذي يمكن كتابته على الصورة $X=X(u,v)$. أي أنه عبارة عن راسم من المجموعة المفتوحة U الجزئية من المستوى $u\ v$ إلى السطح M. الراسم $X=X(u,v)$ هو دالة اتجاهية من طبقة $\mathbb{C}^3$ على الأقل في متغيرين u, v وتحقق أن :

مصفوفة جاكوب $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$ لها المرتبة 2 .

الآن باعتبار أن السطح M ممثلاً تمثيلاً بارامترياً على الصورة $X=X(u,v)$ من الفصل $\mathbb{C}^3$ على الأقل فإننا نعرف حقل من الأعمدة على السطح (على المستوى المماس للسطح عند أي نقطة عليه) على الصورة :

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} \;,\; X_u = \frac{\partial X}{\partial u}, X_v = \frac{\partial X}{\partial V} \quad (15.4)$$

حيث X_u،X_v هي المماسات للخطوط البارامترية $v =$ const.، $u =$ const. على الترتيب.

المتجه N عبارة عن دالة في u, v من الفصل $\mathbb{C}^1$ على الأقل ومن خلاله نستطيع تعريف مؤثر S ذاتي الترافق self-adjoint operator على الصورة :

$$\left.\begin{array}{l} S: T_P M \longrightarrow T_P M \\ S(V) = -\nabla_V N \end{array}\right\} \quad (15.5)$$

ويسمى بمؤثر الشكل، حيث $T_P M$ المستوى المماس للسطح عند النقطة $P \in M$ (يتحدد بالمتجهين X_u, X_v) و $V \in T_P M$، بينما ∇ يرمز إلى التفاضل الموافق للتغير covariant derivative وهو نوع من أنواع التفاضلات مرتبط بالتجاعيد وكذلك الاتجاه على السطح ويتفق مع التفاضل العادي إذا كان السطح مستو.

وهنا نشير إلى أنه على الهضاب المرتفعات (عديد الطيات) لا يصلح التفاضل العادي ولا الاتجاهات العادية ولكن نحتاج للتفرقة بين أنواع المتجهات (الاتجاهات) على عديد الطيات فهناك المتجه موافق التغير ومتجه متضاد الاختلاف وذلك لأن القياس metric ds^2 على عديد الطيات الريماني صيغة تربيعية تختلف من نقطة إلى أخرى حيث:

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta}(u^1, u^2)\, du^\alpha du^\beta \;,\; g = Det(g_{\alpha\beta}) > 0 \quad (15.6)$$

وبالتالي التفاضل العادي لا يصلح ولكن هناك نوع من التفاضل يسمى التفاضل الاتجاهي directional derivative وأحد أنواعه التفاضل الموافق للتغير، وفي الهندسة الإقليدية (أي فراغ ليست به تجاعيد ولا انحناءات) لا يوجد فرق بين متجه متضاد الاختلاف وأخر متوافق الاختلاف وكذلك بالنسبة للتفاضل حيث أن دالة القياس تحقق $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ ، $g = 1$.

وكما قلنا سابقاً فإن الانحناءات على السطح لها عدة أنواع من **أهمها** الانحناءات الذاتية intrinsic مثل الانحناء الجاوسي الذي يكون واضحاً لمن يكون واقفاً على السطح وليس فقط لمن ينظر للسطح من الخارج. بينما الانحناء اللاجوهري من الجهة الأخرى لا يكون واضحاً لمن لا يستطيع دراسة الفراغ المحيط بالسطح من الجهة التي يقيم فيها.

ويعرف الانحناء الجاوسي على السطح في الفراغ الثلاثي على أنه محدد مصفوفة مؤثر الشكل:

$$K = Det\,(S) \qquad (15.7)$$

والانحناء المتوسط على الصورة :

$$H = \frac{1}{2}\text{trace}(S) \qquad (15.8)$$

حيث S هو مؤثر الشكل shape operator.

ملاحظة (١٤،١٥):

صيغ الانحناء السابقة صالحة لأي عديد طيات ريماني بعده $n \geq 2$.

تمارين (١٥)

(١) أعط تعريف لكل من الهندسة التفاضلية والتوبولوجي ووضح الفرق بينهما.

(٢) باستخدام الهندسة التفاضلية وضح نماذج هندسة لوباتشفيسكي (الزائدية) وهندسة ريمان (الناقصية).

(٣) أعط أمثلة لسطوح ذات انحناء جاوسي منعدم وأخرى ذات انحناء جاوسي موجب وكذلك سطوح انحنائها الجاوسي سالب.

(٤) هل يمكنك ربط التقعر والتحدب للسطح من خلال الانحناء الجاوسي.

(٥) بين أن الانحناء الجاوسي خاصية ذاتية.

(٦) عرف السطوح المفرودة وأعط أمثلة لذلك.

(٧) عرف الانحناء الجوهري واللاجوهري.

(٨) أوجد الكميات الأساسية الأولى والثانية للسطح

$$X(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ c\,u)$$

(٩) أوجد الإنحاء المتوسط والإنحاء الجاوسي للسطح

$$X(u,v) = (u, v, uv)$$

(١٠) أوجد الانحناءات الأساسية على السطح

$$X(u,v) = (u, v, \tan^{-1}\frac{u}{v})$$

(١١) عرف كل من مميز أويلر على السطح وكذا الفصيلة genus.

(١٢) وضح أن كل من مميز أويلر والفصيلة خاصية توبولوجية.

(١٣) وضح علاقة كل من مميز أويلر والفصيلة بالانحناء الجاوسي الكلي.

(١٤) وضح العلاقة بين تشاكل السطوح وانحناءاتها الكلية.

(١٥) عرف عديد الطيات الريماني وعديد طيات فسلر.

(١٦) أعط مثال لعديد طيات تفاضلي وأخر لعديد طيات مركبة.

(١٧) وضح معنى توافق الخرائط على عديد الطيات.

(١٨) عرف الخرائط الإحداثية والأطلس على عديد الطيات التفاضلي مع التوضيح بمثال.

(١٩) عرف وأعط مثال لعديد طيات محكم وكذلك لعديد طيات نهائي البعد.

(٢٠) أعط مثال لعديد طيات بدون حد.

الباب السادس عشر

ملحق (تزيل) الكتاب Appendix

التحويلات الهندسية Geometric Transformation

في هذا الباب نعطي تعريف لبعض جزئيات الكتاب التي من المفترض أن يكون درسها الطالب قبل دراسته لهذا الكتاب. وحتى يكون العمل متكامل أردنا أن نقدم مفهوم بعض التحويلات، وخصوصاً الإنعكاس والإنتقال والدوران والإنعكاس الإنزلاقي، بأسلوب يتمشى مع الأسلوب الذي كتب به هذا الكتاب. ونركز هنا على التحويلات الهندسية في المستوى الإقليدي والتي هي الأساس الذي بني عليه تعريف التحويلات في الفراغ الإقليدي. حيث التحويل من نوع تناظر أحادي من المستوى الإقليدي $\mathbb{R}^2$ إلى نفسه يسمى تحويل هندسي geometric transfer motion أو حركة إقليدية Euclidean motion.

(١.١٦) الإنعكاس Reflection

تعريف (١.١٦):

يقال لنقطة $A' \in \mathbb{R}^2$ أنها صورة إنعكاسية لنقطة $A \in \mathbb{R}^2$ بالنسبة للخط $L \in \mathbb{R}^2$ إذا تحقق :

(i) L عمودي على القطعة المستقيمة AA'.

(ii) L هو المنصف العمودي للقطعة المستقيمة AA' وفي هذه الحالة فإن الخط L يسمى محور الإنعكاس reflection axis أو محور التماثل axis of symmetry ويرمز للإنعكاس في الخط L بالرمز R_L.

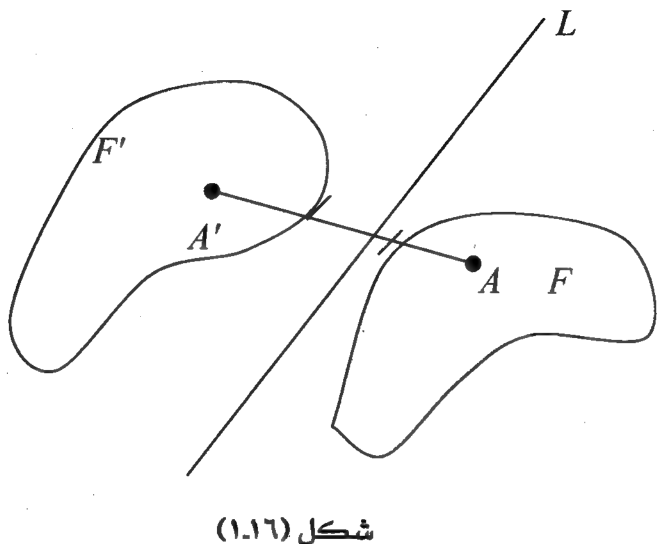
تعريف (٢.١٦):

إذا كان F شكل هندسي في المستوى $\mathbb{R}^2$ ، $L \in \mathbb{R}^2$ فإن المجموعة F'

المعرفة كما يلي :

$$F' = \{A' : R_L(A) = A', \forall A \in F\}$$

تسمى صورة إنعكاسية للشكل F، ونوضح ذلك بالشكل (١٦ـ١)



شكل (١٦ـ١)

تعريف (١٦ـ٣):

التحويل المعرف في تعريف (١٦ـ١) يسمى تحويل الإنعكاس للمستوى $\mathbb{R}^2$ أي أن $R_L : \mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} \mathbb{R}^2$ وبالتالي فإن الإنعكاس تحويل هندسي.

من تعريف الإنعكاس والمفاهيم الأساسية التي يعرفها الطالب في الهندسة الأولية يمكن إثبات النظرية الآتية :

نظرية (١٦ـ١):

الإنعكاس R_L للمستوى $\mathbb{R}^2$ بالنسبة للخط L يحقق ما يأتي :

١ـ $\forall A \in L \Rightarrow R_L A = A$ (محور الانعكاس يظل ثابت لا يتغير بالانعكاس invariant).

٢ـ يحافظ على استقامة الخطوط المستقيمة.

٣ـ يحافظ على مقايس الزوايا أو حافظاً للزوايا conformal.

٤. يحافظ على المسافة بين نقطتين أو تساو قياس isometric.

٥. يحافظ على توازي الخطوط.

٦. يعكس اتجاه الدوران.

(١.١.١٦) الإنعكاس في محاور الإحداثيات:

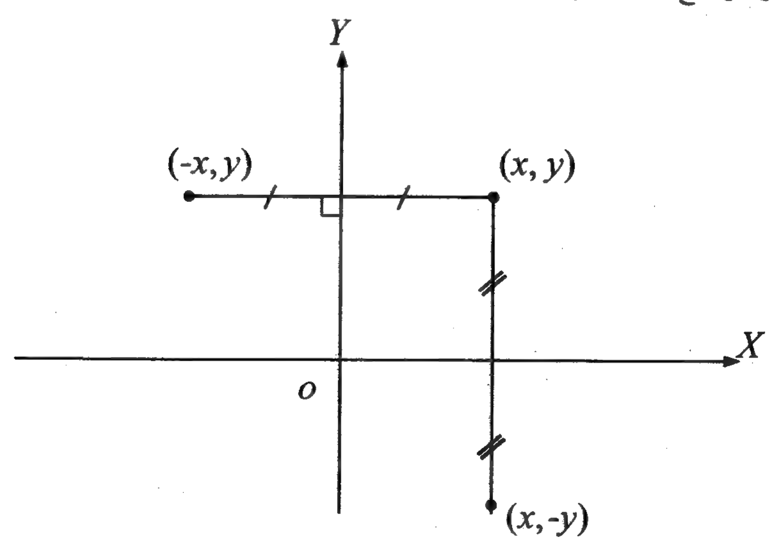
نفرض أن محور الإنعكاس هو محور X فإن صورة أي نقطة $(x, y) \in R^2$ بالإنعكاس في محور X هي $(x, -y)$ ويرمز للإنعكاس في هذه الحالة بالرمز R_X أي أن :

$$R_X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; R_X(x, y) = (x, -y) \qquad (16.1)$$

بالمثل فإن الإنعكاس في محور Y هو R_Y ويعطى بالأتي :

$$R_Y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; R_Y(x, y) = (-x, y) \qquad (16.2)$$

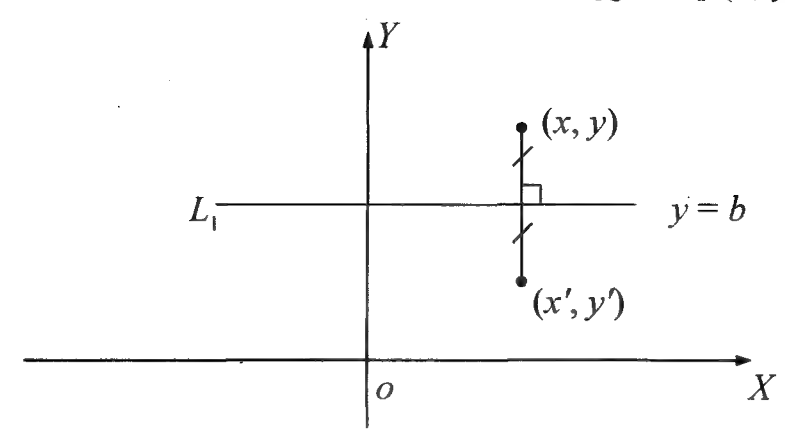
كما هو موضح بالشكل (٢.١٦)



شكل (٢.١٦)

(٢.١.١٦) الإنعكاس في خط يوازي محور X :

نفرض أن L_1 هو محور إنعكاس يوازي محور X ولتكن معادلته $y = b$ ونأخذ نقطة (x, y) في المستوى $\mathbb{R}^2$.



شكل (٣.١٦)

من هندسة الشكل (٣.١٦) يتضح أن

$$\frac{y + y'}{2} = b \quad ، x = x'$$

أي أن $y' = 2b - y$. إذاً

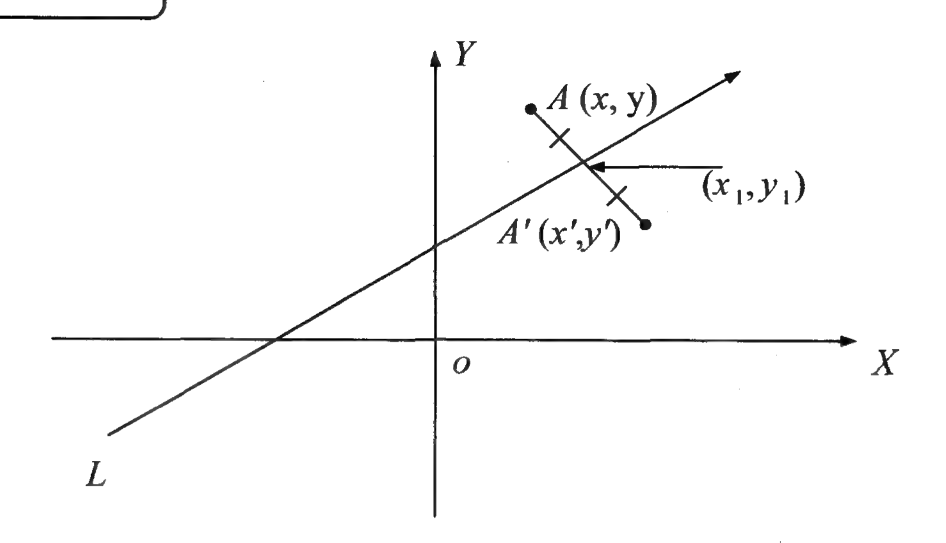
$$R_{L_1}(x, y) = (x', y') = (x, 2b - y) \qquad (16.3)$$

بالمثل فإن الإنعكاس في خط L_2 يوازي محور Y ولتكن معادلته $x = a$ هو R_{L_2} ويعطى من

$$R_{L_2}(x, y) = (x', y') = (2a - x, y) \qquad (16.4)$$

(٣.١.١٦) لإنعكاس في خط مستقيم مائل:

نفرض أن L خط مستقيم معادلته $y = mx + c$ والمطلوب إيجاد صورة النقطة (x,y) بالإنعكاس في الخط L ولنفرض أن الصورة هي (x',y') أي أن $R_L(x, y) = (x', y')$ كما هو موضح في شكل (٤.١٦)



شكل (٤ـ١٦)

من تعريف الإنعكاس نجد أن :

$$\frac{x+x'}{2}=x_1 \tag{16.5}$$

$$\frac{y+y'}{2}=y_1 \tag{16.6}$$

ميل القطعة المستقيمة AA' هو

$$\frac{y'-y}{x'-x}=-\frac{1}{m} \tag{16.7}$$

حيث $(x_1,y_1)\in L$ وهي نقطة تنصيف للقطعة المستقيمة AA' وتحقق

$$y_1=mx_1+c \tag{16.8}$$

من (16.5)، (16.6)، (16.7)، (16.8) نحصل على:

$$y'+\frac{1}{m}x'=y+\frac{1}{m}x\ , \tag{16.9}$$

$$y'-mx'=-y+mx+c \tag{16.10}$$

بحل المعادلات (16.9)، (16.10) نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{((1-m^2)x + 2my - mc)}{(1+m^2)} \\ y' &= (2mx - (1-m^2)y + c)/(1+m^2) \end{aligned}\right\} \qquad (16.11)$$

ومنها يمكن الحصول على الحالات السابقة وذلك باختيار

$c = b$ ، $m = 0$ (ii) ، $c = 0$ ، $m = 0$ (i)

$c = -a$ ، $m \to \infty$ (vi) $c = 0$ ، $m \to \infty$ (iii)

هذه الحالات تمثل الإنعكاسات في كل من محور X وخط يوازي محور X ومحور Y وخط يوازي محور Y على الترتيب.

مثال (١٦.١):

أوجد القاعدة التي تعرف الإنعكاس في كل من الخطوط المستقيمة الآتية:

$$L_1 : y = x \,, L_2 : y = -x$$

الحل:

بوضع $c = 0$، $m = 1$، $m = -1$ في (16.11) نحصل على

$$R_{L_1}(x, y) = (y, x) \quad , \quad R_{L_2}(x, y) = (-y, -x)$$

باستخدام تعريف الإنعكاس يمكن بسهولة إثبات النظرية الآتية :

نظرية (١٦.٢):

الإنعكاس لا يحقق خاصية الإبدال إلا في الحالة التي فيها محوري الإنعكاس متعامدين (كما في حالة الانعكاس في محور X ثم محور Y والعكس).

مثال (١٦.٢):

أثبت أن التحويل الهندسي $(x, y) \longrightarrow \left(\frac{x+\sqrt{3}y}{2}, \frac{\sqrt{3}x - y}{2}\right)$

هو إنعكاس في الخط المستقيم $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

الحل:

بوضع $c=0$ ، $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$ في القاعدة (16.11) نحصل على المطلوب.

(٢.١٦) الإنتقال Translation:

تعريف (٤.١٦):

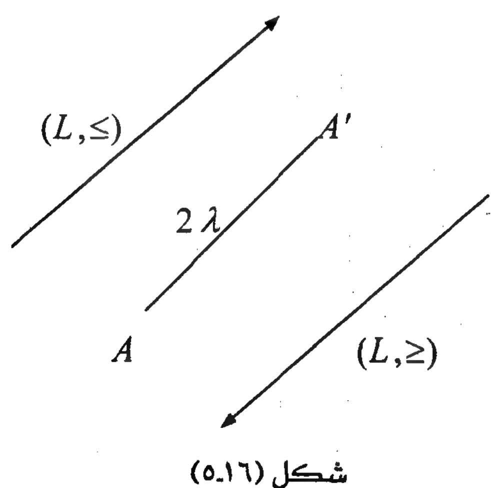
يقال لنقطة $A'\in\mathbb{R}^2$ أنها صورة للنقطة $A\in\mathbb{R}^2$ بإنتقال مقياسه 2λ في اتجاه خط مرتب $(L,\leq)$ إذا تحقق

(i) القطعة المستقيمة AA' توازي الخط L ولهما نفس علاقة الترتيب $\leq$.

(ii) $|AA'|=2\lambda$ = طول القطعة المستقيمة AA' .

ملاحظة (١.١٦):

إذا كانت A' صورة A بانتقال مقياسه 2λ في اتجاه الخط المرتب $(L,\leq)$ فإن A صورة A' بانتقال مقياسه 2λ في اتجاه الخط المرتب $(L,\geq)$ كما هو موضح بالشكل (٥.١٦)



شكل (٥.١٦)

ملاحظة (٢.١٦):

العلاقة $A\leq B$ تعني أن A تسبق أو تنطبق على B أو B تلي أو تنطبق على A.

تعريف (٥.١٦):

يقال لشكل F' أنه صورة لشكل F بانتقال مقياسه 2λ في اتجاه خط مرتب $(L,\leq)$ إذا كانت F' هي مجموعة كل صور نقاط F بإنتقال مقياسه 2λ في اتجاه الخط $(L,\leq)$.

في التعريف السابق كل نقطة A تحولت إلى نقطة 'A بتحويل هندسي يسمى إنتقال في اتجاه الخط $(L,\leq)$ ويرمز له بالرمز $T_{2\lambda}$ حيث

$$T_{2\lambda}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ ,$$

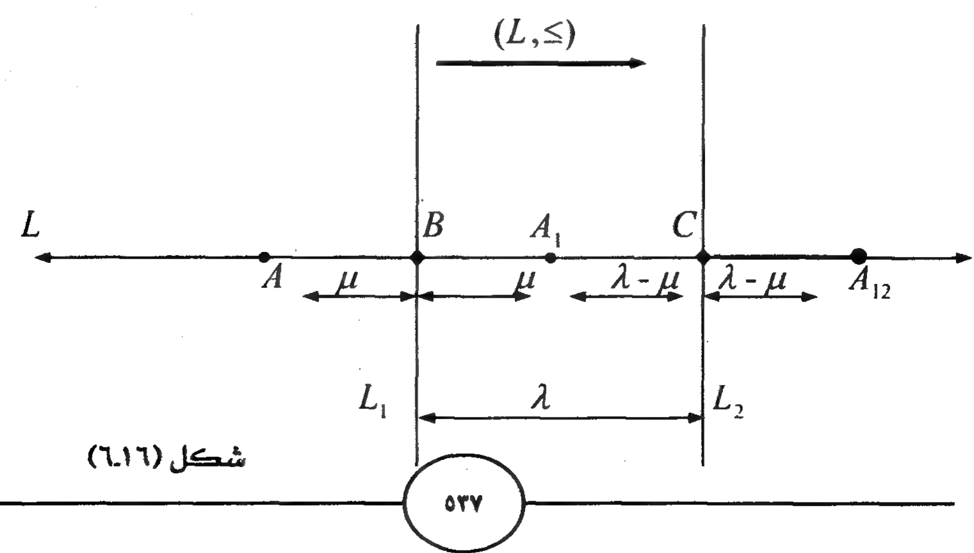
$$T_{2\lambda}(A)=A',\ |AA'|=2\lambda\ ,\quad \forall\, A\in\mathbb{R}^2$$

نظرية (٣.١٦):

الإنتقال $T_{2\lambda}$ في اتجاه الخط $(L,\leq)$ يكافئ محصلة إنعكاسين بالنسبة لخطين مستقيمين متوازيين والبعد بينهما λ ومتعامدين على الخط L.

البرهان:

نفرض أن $T_{2\lambda}$ إنتقال في اتجاه الخط المرتب $(L,\leq)$ حيث $T_{2\lambda}A=A_{12}\ ,\ A\in\mathbb{R}^2$. ونفرض أن $L_1\ ,\ L_2$ خطان متوازيان والبعد بينهما λ وكل منهما متعامد على L. ونفرض أن $B,\quad C$ هما نقطتي تقاطع القطعة المستقيمة AA_{12} مع L_1,L_2 على الترتيب بحيث $B\leq C$ كما هو واضح في شكل (٦.١٦)



شكل (٦.١٦)

نرمز للإنعكاسات في الخطوط L_1, L_2 بالرمز $R_{L_\alpha} = R_\alpha, \alpha = 1,2$ على الترتيب.

$$\therefore \quad R_1 A = A_1 \ , \ R_2 A_1 = A_{12}$$

حيث
$$|AB| = |BA_1| = \mu$$

$$\therefore |A_1C| = |CB| - |BA_1| = \lambda - \mu \qquad (16.12)$$

بما أن القطع المستقيمة $A\ A_{12}$ ، AC كل منهما متعامد على L_2 ،

إذاً مجموعة النقاط A, C, A_{12} تقع على خط مستقيم واحد.

إذاً
$$|A_{12}C| = |A\ A_{12}| - |AC|$$

$$= 2\lambda - (\mu + \lambda) = \lambda - \mu \qquad (16.13)$$

من (16.12)، (16.13) ينتج أن: $A_1C = A_{12}C$ وأن A_1, C, A_{12} مجموعة مستقيمة متعامدة مع L_2 وبالتالي فإن المجموعة $\{A_1, A_{12}\}$ تكون متماثلة بالنسبة للخط L_2 .

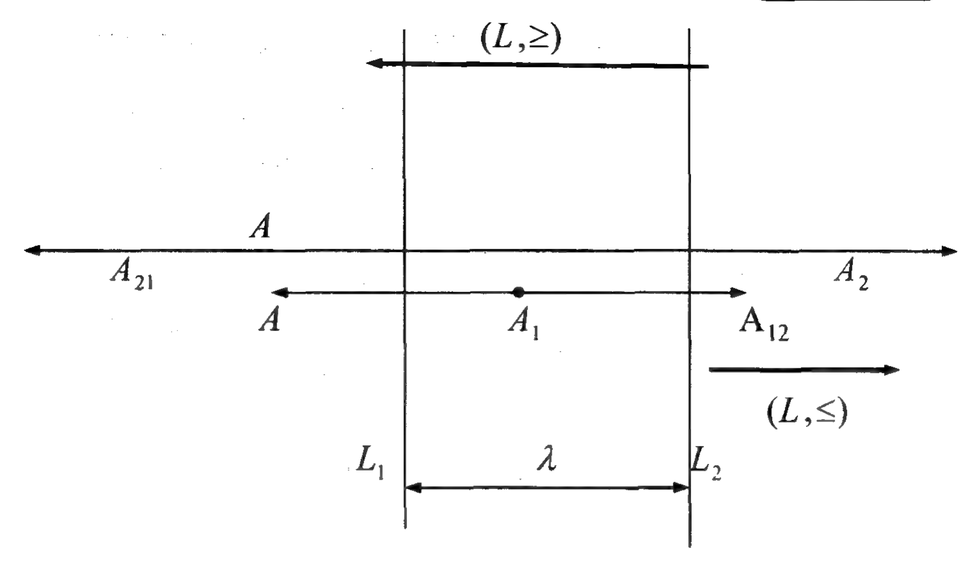
نفرض أن R_1 هو الإنعكاس بالنسبة للخط L_1 ، R_2 هو الإنعكاس بالنسبة للخط L_2 حيث $A_1 = R_1(A)\ ,\ A_{12} = R_2(A_1)$ فإن :

$$A_{12} = R_2(A_1) = R_1(R_1(A)) = (R_2 \circ R_1)\ (A)$$

بما أن النقطة $A \in \mathbb{R}^2$ نقطة اختيارية وأن الإنتقال يتعين تماماً متى عرف مقياسه واتجاهه فإن : $T_{2\lambda} = R_2 \circ R_1$.

ملاحظة (٣.١٦):

اتجاه الانتقال يكونْ من L_1 إلى L_2 والترتيب هنا مهم حيث أنه لو حاولنا إيجاد صورة النقطة A تحت تأثير الراسم $R_1 \circ R_2$ (بادئين بالإنعكاس بالنسبة للخط L_2 ثم نعقبه بالإنعكاس بالنسبة للخط L_1) فإننا نلاحظ $R_1 \circ R_2$ يكافئ إنتقالاً مقياسه 2λ في اتجاه الخط المرتب $(L, \geq)$ شكل (٧.١٦).



شكل (١١. ٧)

وبالتالي فإن $R_1 \circ R_2(A) \neq R_2 \circ R_1(A)$

ملاحظة (٤،١٦):

أي انتقال مقياسه 2λ يمكن التعبير عنه على أنه تحصيل انعكاسين بأكثر من طريقة $(A_{12} \neq A_{21})$ ولكن كل نقطة وصورتها تعتبر انتقالاً وحيداً.

باستخدام خواص الانتقال والمعاني الهندسية في الهندسة الأولية يمكن إثبات النظرية الآتية :

نظرية (٤،١١):

الانتقال يحقق الخواص الآتية :ـ

(١) تحويل هندسي. (٢) تساوي قياسي.

(٣) يحفظ استقامة النقط. (٤) يحفظ التوازي.

(٥) يحفظ مقياس الزوايا. (٦) يحفظ الاتجاه الدوراني.

(٧) لا توجد نقطة ثابتة إلا في حالة الراسم المحايد، وعندئذ كل نقطة صورة لنفسها.

(١.٢.١٦) انتقال في اتجاه محاور الإحداثيات:

نعتبر انتقال مقياسه a 2 في اتجاه محور السينات :

هذا الانتقال يكافئ تحصيل إنعكاسين بالنسبة لمستقيمين موازيين لمحور الصادات. نفرض أن هذان المستقيمان هما $L_1 : x = x_1, L_2 : x = x_2$ إذاً $x_2 - x_1 = a$ ونفرض أن (x,y) نقطة في المستوى. إذا كان R_1 الإنعكاس بالنسبة للخط L_1، R_2 الإنعكاس بالنسبة للخط L_2 وباستخدام (16.3)، (16.4) نحصل على:

$$R_1(x,y) = (2x_1 - x, y),$$
$$R_2(2x_1 - x, y) = (2(x_2 - x_1) + x, y).$$

أي أن :

$$R_2(2x_1 - x, y) = (2a + x, y)$$
$$= R_2 \circ R_1(x,y) = T_{2\lambda}(x,y)$$

أي أن الإنتقال في اتجاه محور x هو

$$T_{2\lambda}(x,y) = (2a + x, y), \ \lambda = a \qquad (16.14)$$

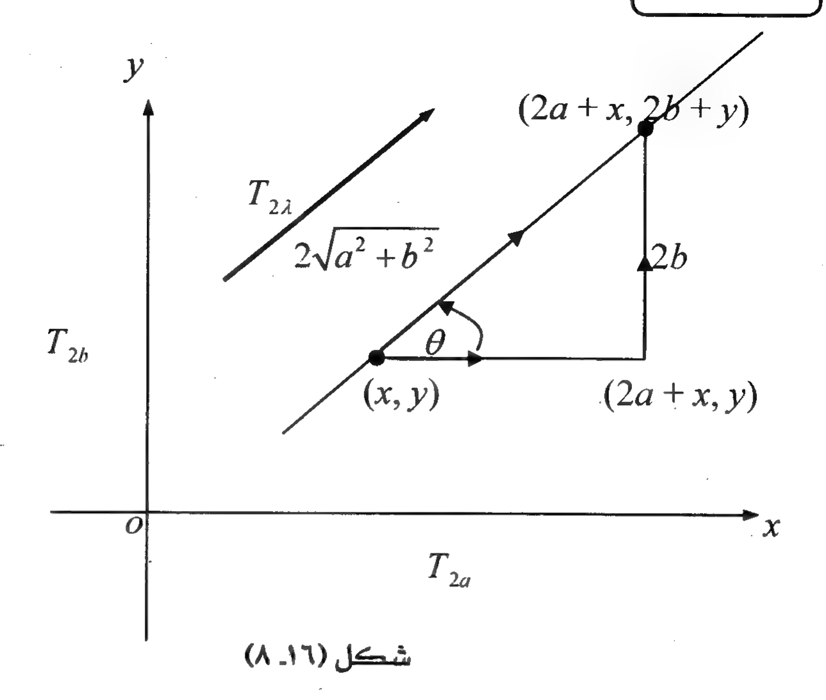
بالمثل يمكن إثبات أن الإنتقال في اتجاه محور y مقياسه $2\,b$ هو

$$T_{2b}(x,y) = (x, 2b + y) \qquad (16.15)$$

(٢.٥.١٦) الانتقال في اتجاه خط مستقيم مائل :

نفرض أن T_{2a} انتقال مقياسه $2a$ في اتجاه محور x، T_{2b} انتقال في اتجاه محور y مقياسه b 2 كما هو موضح بشكل (١٦ـ ٨) وباستخدام (16.14)، (16.5) نحصل على

$$T_{2a}(x,y) = (2a + x, y)$$
$$T_{2b}(2a + x, y) = (2a + x, 2b + y)$$



شكل (١٦ـ ٨)

أي أن :

$$T_{2b} \circ T_{2a}(x,y) = (2a+x, 2b+y)$$

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$T_{2a} \circ T_{2b}(x,y) = (2a+x, 2b+y)$$

ومن هنا نرى:

$$T_{2a} \circ T_{2b}(x,y) = T_{2b} \circ T_{2a}(x,y) \qquad (16.16)$$

وهذا يكافئ انتقالاً $T_{2\lambda}$ مقياسه $\lambda = \sqrt{a^2+b^2}$ في اتجاه خط مستقيم ميله يساوي $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$.

مثال (١٦ـ٣):

أثبت أنه إذا كان $T_{2\lambda}$ انتقالاً قاعدته

$$T_{2\lambda} : (x,y) \longrightarrow (2a+x, 2b+y)$$

فإن معكوسه يكون انتقالاً قاعدته

$$T_{2\lambda}^{-1} : (x, y) \longrightarrow (x - 2a, y - 2b)$$

الحل:

تحصيل الانتقالين يحقق القاعدة

$$T_{2\lambda}^{-1} \circ T_{2\lambda} : (x, y) \longrightarrow (2a - 2a + x, 2b - 2b + y) = (x, y)$$

$$\therefore (x, y) \longrightarrow (x, y) \ , \ T_{2\lambda}^{-1} \circ T_{2\lambda} = I$$

$$\therefore T_{2\lambda}^{-1}(x, y) \longrightarrow (x - 2a, y - 2b)$$

وبالتالي فإن $T_{2\lambda}^{-1}$ تعرف معكوس الانتقال $T_{2\lambda}$.

مثال (٤.١٦):

إذا كان $T_{2\lambda}, T_{2\mu}$ انتقالات للمستوى $\mathbb{R}^2$ حيث

$$T_{2\lambda} : (x, y) \longrightarrow (2a + x, 2b + y)$$

$$T_{2\mu} : (x, y) \longrightarrow (2c + x, 2d + y)$$

أثبت أن $T_{2\lambda} \circ T_{2\mu} = T_{2\mu} \circ T_{2\lambda}$

الحل:

من تعريف الانتقال يكون

$$T_{2a} : (x, y) \longrightarrow (2a + x, y),$$

$$T_{2b} : (2a + x, y) \longrightarrow (2a + x, 2b + y),$$

$$T_{2c} : (x, y) \longrightarrow (2c + x, y),$$

$$T_{2d} : (2c + x, y) \longrightarrow (2c + x, 2d + y),$$

$$T_{2\lambda} = T_{2b} \circ T_{2a}, \ T_{2\mu} = T_{2d} \circ T_{2c},$$

$$\therefore (T_{2\lambda} \circ T_{2\mu})(x, y) = (T_{2d} \circ T_{2c} \circ T_{2b} \circ T_{2c})(x, y)$$

$$= (T_{2d} \circ T_{2c} \circ T_{2b}) T_{2a}(x, y)$$

$$=(T_{2d}\circ T_{2c}\circ T_{2b})\,(2a+x\,,y\,)$$

$$=(T_{2d}\circ T_{2c})T_{2b}(2a+x\,,y\,)$$

$$=(T_{2d}\circ T_{2c})\,(2a+x\,,2b+y\,)$$

$$\therefore\ (T_{2\lambda}\circ T_{2\mu})\,(x\,,y\,)=T_{2d}(T_{2c}(2a+x\,,2b+y\,))$$

$$=T_{2d}(2a+2c+x\,,2b+y\,)$$

$$=\ (2a+2c+x\,,\,2b+2d+y)$$

بالمثل يمكن إثبات أن $T_{2\lambda}\circ T_{2\mu}=T_{2\mu}\circ T_{2\lambda}$

ملاحظة (٥.١٦):

الانتقال يحقق خاصية الإبدال.

(٣.١٦) الدوران Rotation

تعريف (٦.١٦):

يقال لنقطة $A'\in\mathbb{R}^2$ أنها صورة نقطة $A\in\mathbb{R}^2$ بدوران مقياسه 2Θ حول نقطة ثابتة $O\in\mathbb{R}^2$ إذا تحقق :

$$|\overrightarrow{OA'}|=|\overrightarrow{OA}| \qquad \text{(i)}$$

$$m(A\hat{O}A')=m(\overrightarrow{AOA'}) \qquad \text{(ii)}$$

حيث m تعني قياس الزاوية، $\overrightarrow{AOA'}$ تعني الزاوية الموجهة التي أضلاعها OA، OA' على الترتيب، أي أن $O,\quad A,\quad A'$ مرتبة في اتجاه دوران ضد عقارب الساعة anticlockwise ، النقطة الثابتة O تسمى مركز الدوران center of rotation.

وتحويل الدوران يرمز له بالرمز $R_o(2\theta)$ أي أن

$$R_o(2\theta):\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ \ R_o(2\theta)\,A=A'$$

ملاحظة (٦.١٦):

إذا كانت $R_o(2\theta)\,A=A'$ فإن $R_o(\theta')\,A'=A$ حيث $\theta'=2\pi-2\theta$.

نظرية (٤،١٦):

الـدوران $R_o(2\theta)$ يكـافئ تحـصيل إنعكاسـين في خطـين مـستقيمين نقطـة تقاطعهما هي مركز الدوران ويحصران بينهما زاوية قياسها θ .

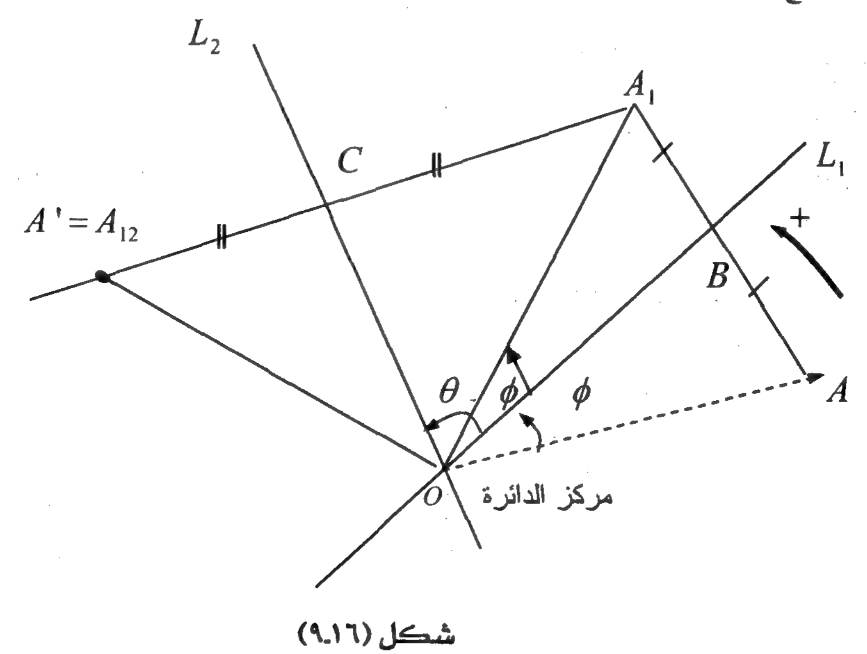
البرهان :

نأخذ خطان مستقيمان L_1 , L_2 ، $L_1 \cap L_2 = \{O\}$ ، نقطة $A \in \mathbb{R}^2$ حيث

$$R_o(2\theta)A = A', \; R_{L_1}A = A_1, R_{L_2}A_1 = A_{12}$$

وإذا كانت الزاوية بين L_1, L_2 قياسها θ فإن المطلوب إثبات أن $A' \equiv A_{12}$.

ونوضح ذلك بالشكل (٩،١٦)



شكل (٩،١٦)

من المعطيات السابقة والرسم نجد أن :

$$|OA| = |OA_1| = |OA_{12}| \;,$$

$$m\overrightarrow{AOB} = m\overrightarrow{BOA_1} = \phi \;,$$

$$m\overrightarrow{A_1OC} = m\overrightarrow{COA_{12}} = \theta - \phi \;,$$

$$\therefore \quad m\overrightarrow{AOA_{12}} = 2\phi + 2(\theta - \phi) = 2\theta \quad .$$

إذاً $A' = A_{12}$ ، حيث A_{12} صورة A بالإنعكاس في L_1 ثم في L_2 ، النقطة A' صورة A بالدوران الذي مركزه O وزاويته 2θ .

إذاً $$R_{L_2} \circ R_{L_1}(A) = R_o(2\theta)A$$

مما سبق يمكن بسهولة إثبات النظرية الآتية :

نظرية (٥.١٦):

الدوران $R_o(2\theta)$ يحقق :

١- الدوران تساوٍ قياسي بمعنى أنه يحافظ على المسافات بين النقاط.

٢- يحافظ على استقامة الخطوط وتوازيها.

٣- يحافظ على ترتيب النقاط.

(١.٣.١٦) قاعدة الدوران والإحداثية الكارتيزية:

من الهندسة التحليلية نعلم أن صورة نقطة (x,y) بالدوران بزاوية 2θ هي النقطة (x', y') حيث :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (16.17)$$

المصفوفة التي تعتمد على الزاوية θ في تحويل الدوران تسمى مصفوفة الدوران وهي مصفوفة عمودية محددها الوحدة ومعكوسها هو مدورها (البديلة).

باستخدام النظرية التي تعطي العلاقة بين الإنعكاس والدوران يمكن أن نرى:

$$R_o(\pi)(x,y) = R_x \circ R_y(x,y) = (-x,-y) \qquad (16.18)$$

هذا الدوران يسمى **نصف الدورة** حيث مركز الدوران منطبق على نقطة الأصل.

وإذا كان مركز الدوران هو النقطة $O' = (a, b)$ فإننا نستخدم

$$R_{O'}(\pi) = R_{L_1} \circ R_{L_2}$$

حيث L_1 خط معادلته $x = a$، L_2 خط معادلته $y = b$.

واضح أن $R_{L_1} \circ R_{L_2} = R_{L_2} \circ R_{L_1}$ لأن L_1 ، L_2 خطان متعامدان.

وبالتالي فإن :

$$R_{O'}(\pi)(x,y) = R_{L_1}(x,y) \circ R_{L_2}(x,y)$$

$$= R_{L_2} \circ R_{L_1} = (2a - x, 2b - y) \qquad (16.19)$$

إذا كانت $2\theta = \pi/2$ فإن الدوران يسمى **دوران ربع الدورة** أي أن

$$R_O(\pi/2) = R_{L_1} \circ R_x$$

حيث L_1 هو الخط المستقيم $y = x$، R_x إنعكاس في محور السينات. أو

$$R_o(\pi/2)\ (x,y) = R_{L_1} \circ R_x(x,y)$$

$$= R_{L_1}(x,-y) = (-y,x) = R_{L_1}(R_x(x,y)) \qquad (16.20)$$

مثال (١٦.٥):

عبر عن الدوران $R_o(\pi/2)$ كمحصلة إنعكاس في الخط المستقيم $y = x$ ثم انعكاس R_y في محور الصادات.

الحل:

باستخدام (16.20) نصل إلى المطلوب.

مثال (١٦.٦):

أوجد صورة النقطة (x, y) بالدوران $R_o(\pi)$ وذلك باستخدام الانعكاس في الخط المستقيم $y = x$.

الحل:

مثل المثال السابق أي باستخدام (16.20).

مثال (٧.١٦):

أثبت أن

$$\text{(i)}\quad (\cos(\theta+\pi),\sin(\theta+\pi))=(-\cos\theta,-\sin\theta)$$

$$\text{(ii)}\quad (\cos(\pi-\theta),\sin(\pi-\theta))=(-\cos\theta,-\sin\theta)$$

$$\text{(iii)}\quad (\cos(\frac{\pi}{2}-\theta),\sin(\frac{\pi}{2}-\theta))=(\sin\theta,\cos\theta)$$

الحل:

نستخدم الدوران $R_o(\pi),\ R_o(\pi/2)$

$$R_o(\pi):\theta\longrightarrow(\theta+\pi)$$

إذاً

$$R_o(\pi):(\cos\theta,\sin\theta)\longrightarrow(\cos(\theta+\pi)\ ,\sin(\theta+\pi))\quad (16.21)$$

لكن الراسم $R_o(\pi)$ معرف (16.18) ومنه يكون

$$R_o(\pi):(\cos\theta,\sin\theta)=(-\cos\theta,-\sin\theta)\qquad (16.22)$$

من (16.21)، (16.22) ينتج صحة (i).

نحن نعلم أن $R_x(\theta)=-\theta$ لذا فإن

$$\therefore\quad R_o(\pi):-\theta\longrightarrow\pi-\theta$$

$$\therefore R_o(\pi)\circ R_x:\theta\longrightarrow\pi-\theta$$

أي أن :

$$R_o(\pi)\circ R_x:(\cos\theta,\sin\theta)\longrightarrow(\cos(\pi-\theta),\sin(\pi-\theta))\quad (16.23)$$

ومن تعريف الانعكاسات R_x ، R_y والدوران $R_o(\pi)$ يكون لدينا

$$R_o(\pi)\circ R_x=(R_x\circ R_y)\circ R_x$$

$$=R_y\circ(R_x\circ R_x)\qquad \text{خاصية الدمج}$$

تحصيل انعكاس مكرر $= R_y \circ I$

التحويلة المحايدة $= R_y$

$$\therefore\ R_y : (\cos\theta, \sin\theta) \longrightarrow (-\cos\theta, \sin\theta) \qquad (16.24)$$

من (16.23)، (16.24) ينتج (ii).

وأخيراً $$R_x : \theta \longrightarrow -\theta \xrightarrow{R_o(\pi/2)} (\frac{\pi}{2} - \theta)$$

لذا فإن $$R_o(\pi/2) \circ R_x : \theta \longrightarrow \frac{\pi}{2} - \theta$$

أي أن :

$$R_o(\frac{\pi}{2}) \circ R_x : (\cos\theta, \sin\theta) \longrightarrow (\cos(\frac{\pi}{2} - \theta), \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)) \ (16.25)$$

فإذا فرضنا R_1 انعكاس في الخط المستقيم $y = x$ فإن:

$$R_o(\frac{\pi}{2}) \circ R_x = (R_1 \circ R_x) \circ R_x = R_1 \circ (R_x \circ R_x) = R_1 \circ I = R_1$$

لكن

$$R_1 : (\cos\theta, \sin\theta) \longrightarrow (\sin\theta, \cos\theta) \qquad (16.26)$$

إذاً من (16.25)، (16.26) ينتج صحة العلاقة (iii).

مثال (١٦-٨):

في حالة الدوران بزاوية 90^o فإن مصفوفة الدوران يكون لها الصورة:

$$R_o(\frac{\pi}{2}) : \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

وفي حالة الدوران بزاوية 180^o فإن مصفوفة الدوران يكون لها الصورة:

$$R_o(\pi) : \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

وفي حالة الدوران بزاوية 270^o فإن مصفوفة الدوران تأخذ الشكل:

$$R_o(\frac{3\pi}{2}):\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

وفي حالة الدوران بزاوية صفر أو 360^o فإن مصفوفة الدوران تصبح على الصورة:

$$R_o(0) = R_o(2\pi):\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وهي مصفوفة الوحدة.

ملاحظة (١٦.٥):

إذا كان خط الإنعكاس يصنع زاوية θ مع محور x فإن ميله $m = \tan\theta$ وبوضع $m = \tan\theta$ في علاقة الإنعكاس (16.11) في الخط المستقيم $y = mx+c$ حيث $c = 0$ فإننا نحصل على:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (16.27)$$

المصفوفة في تحويل الإنعكاس (16.27) تسمى مصفوفة الإنعكاس.

مثال (١٦.٩):

أوجد $\cos(90+\theta)$ باستخدام مصفوفة الدوران.

الحل:

نفرض متجه وحدة بدايته عند النقطة o ويصنع زاوية θ مع محور السينات فتكون نقطة نهاية المتجه هي $M = (\cos\theta, \sin\theta)$ فإذا دار المستوى بزاوية 90^o فإن صورة M تصبح M' حيث

$$M':(\cos(90+\theta), \sin(90+\theta))$$

وحيث أن الدوران بزاوية $\frac{\pi}{2}$ يكافئ

$$\begin{pmatrix} \cos(90+\theta) \\ \sin(90+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

وبضرب المصفوفات نحصل على:

$$\cos(90+\theta) = 0 - \sin\theta = -\sin\theta \,,$$
$$\sin(90+\theta) = \cos\theta - 0 = \cos\theta$$

مثال (١٠.١٦):

برهن أن تحصيل دورانين حول نفس النقطة هو دوران.

الحل:

نفرض أن الدوران حول نقطة الأصل o وزاويته θ_1 ضد عقارب الساعة وأن صورة (x, y) بهذا الدوران هي (x_1, y_1) .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (16.28)$$

ونفرض الدوران الثاني حول نقطة الأصل o وزاويته θ_2 ضد عقارب الساعة وأن صورة (x_1, y_1) بهذا الدوران هي (x_2, y_2) حيث

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad (16.29)$$

وبالتعويض (16.28) في (16.29) ينتج أن :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

وبضرب المصفوفات واستخدام المتطابقات المثلثية نحصل على:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

وهذه العلاقة تمثل دوراناً زاويته $(\theta_1+\theta_2)$ أي أن محصلة دورانين حول نقطة الأصل هو دوران.

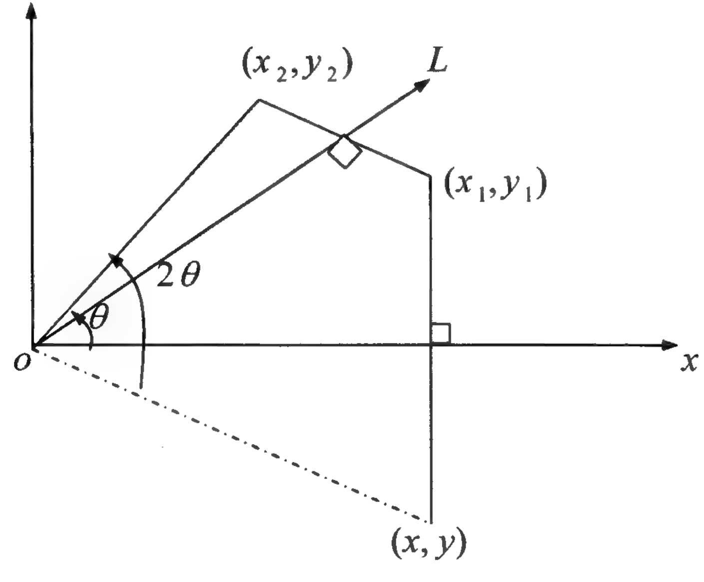
مثال (١٦-١٢):

أثبت أن تحصيل انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متقاطعين هو دوران.

الحل:

نأخذ محوري الانعكاس هما محور السينات ومستقيم L يمر بنقطة الأصل ويصنع زاوية θ مع محور السينات.

نفرض أن صورة (x, y) بعد الانعكاس بالنسبة لمحور السينات هي (x_1, y_1) كما هو موضح بالشكل (١٦-١٠):



شكل (١٦-١٠)

ومن هندسة الشكل وتعريف الانعكاس نجد

$$(x, y) \longrightarrow (x_1, y_1) = (x, -y)$$

أو ما يكافئ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (16.30)$$

ونفرض أن صورة (x_1, y_1) بعد الانعكاس في المستقيم L الذي يصنع زاوية θ مع محور السينات هي (x_2, y_2) وباستخدام (16.27) نحصل على:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad (16.31)$$

من (16.30)، (16.31) ينتج أن:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

وهذا يمثل دوران للنقطة (x, y) حول نقطة الأصل بزاوية مقدارها 2θ .

مثال (١٦.١٣):

أثبت المتطابقات المثلثية الآتية:

(i) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

(ii) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

باستخدام تعريف الدوران.

الحل:

بما أن مصفوفة الدوران بزاوية صفر هي $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

وإذا فرض أن f_a ، f_b دورانين بزوايا مقياسها a ، b على الترتيب حول نقطة الأصل فإن:

$$f_a : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

$$f_b : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

والدوران حول نقطة الأصل الذي مقياس زاويته $a + b$ هو f_{a+b} حيث

$$f_{a+b} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix} \qquad (16.32)$$

ومن تحصيل الدورانات نجد أن : $f_{a+b} = f_a \circ f_b$ حيث

$$f_a \circ f_b : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} \qquad (16.33)$$

بضرب المصفوفات وبمساواة الناتج في (16.32)، (16.33) ينتج المطلوب.

مثال (١٦.١٤):

أوجد مصفوفة التحويل في الحالات الآتية:

(i) انعكاس في محور السينات ثم دوران زاويته 30^0 ومركزه نقطة الأصل.

(ii) انعكاس في محور الصادات ثم دوران زاويته 60^0 ومركزه نقطة الأصل.

(iii) انعكاس في المستقيم $y = x$.

(iv) دوران 45^0 مركزه نقطة الأصل وانعكاس في المستقيم $y = -x$.

الحل:

(i) مصفوفة الانعكاس بالنسبة لمحور السينات هي

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

مصفوفة الدوران حول نقطة الأصل بزاوية 30^{o} هي (بوضع $2\theta = \frac{\pi}{6}$ في (16.17))

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

∴ مصفوفة التحويل المطلوبة هي (ضرب مصفوفات)

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

(ii) مصفوفة الانعكاس بالنسبة لمحور الصادات هي

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ومصفوفة الدوران حول نقطة الأصل بزاوية 60^{o} هي (بوضع $2\theta = \frac{\pi}{3}$ في (16.17))

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

∴ مصفوفة التحويل المطلوبة هي (ضرب مصفوفات)

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(iii)، (iv) بالمثل مع ملاحظة ترتيب ضرب المصفوفات.

(٤،١٦) الإنعكاس الإنزلاقي Glider Reflection

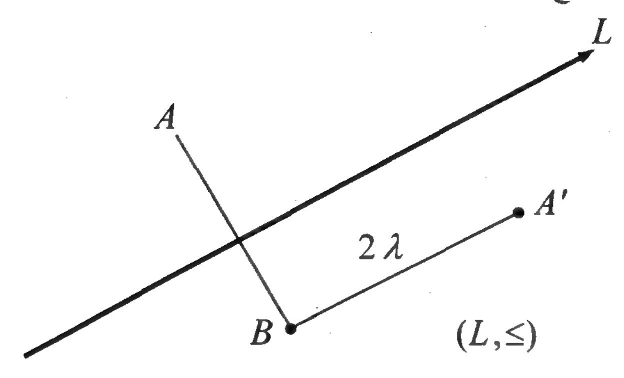
تعريف (٧،١٦):

إذا انعكست النقطة A في خط مستقيم L ثم بعد ذلك انتقلت في اتجاه خط مرتب يوازي محور الإنعكاس إلى نقطة جديدة A' بانتقال مقياسه 2λ فإن A' يقال

أنها صورة A بالتحويل $T_{2\lambda} \circ R_L$ والذي يسمى إنعكاس إنزلاقي ويرمز له بالرمز G_R.

أي أن:
$$G_R = T_{2\lambda} \circ R_L = R_L \circ T_{2\lambda}$$

الخط L يسمى محور الإنعكاس الإنزلاقي ومقياس الإنتقال يسمى مقياس الإنعكاس الإنزلاقي كما هو موضح بالشكل (١٦ـ١١)



شكل (١٦ـ١١)

نأخذ L هو محور x فإن

$$G_R : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, G_R = T_{2\lambda} \circ R_x = R_x \circ T_{2\lambda}, G_R(x, y) = (x + 2\lambda, -y)$$

وإذا كان L هو محور y فإن :

$$G_R = T_{2\lambda} \circ R_y = R_y \circ T_{2\lambda} \quad , \quad G_R(x, y) = (-x, y + 2\lambda)$$

وهكذا

مثال (١٦ـ١٥):

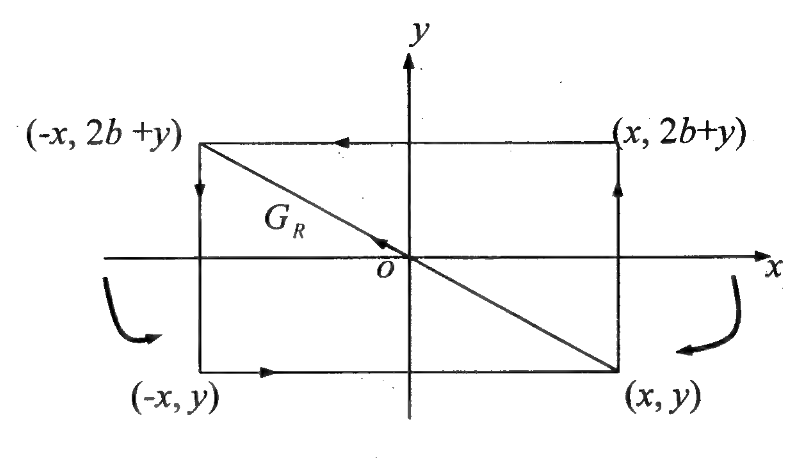
إذا كان G_R انعكاساً انزلاقياً في اتجاه محور y مقياسه $2b$ فأوجد قاعدة إحداثيات له، ثم أوجد صورة النقط $(1, 2)$، $(4, 4)$ بالراسم G_R عند $b = 1$.

الحل:

بالمثل كما في المثال السابق

$$G_R = R_y \circ T_{2b} \quad , \quad G_R : (x, y) \longrightarrow (-x, 2b + y)$$

كما بالشكل (١٢.١٦)



شكل (١٢.١٦)

عندما $b = 1$ فإن

$$(1, 2) \longrightarrow (-1, 4)\ ;\ (4, 4) \longrightarrow (-4, 6)$$

مثال (١٦.١٦):

أوجد قاعدة إحداثيات للإنعكاس الإنزلاقي الذي مقياسه a 2 في اتجاه الخط $y = b$ ومن ثم أوجد صور النقط $(0, 0), (1, 1)$ بالراسم G_R في حالة $a = 1$.

الحل:

الإنعكاس الإنزلاقي يكافئ تحصيل إنعكاس $R_{y=b}$ بالنسبة للخط $y = b$ وانتقال T_{2a} مقياسه $2a$ في اتجاه الخط $y = b$، حيث أن:

$$R_{y=b} : (x, y) \longrightarrow (x, 2b - y)$$

$$T_{2a} : (x, y) \longrightarrow (2a + x, y)$$

$$\therefore G_R : T_{2a} \circ R_{y=b} : (x, y) \longrightarrow (2a + x, 2b - y)$$

عندما $a = 1$، $b = 2$ نحصل على:

$$(1, 1) \longrightarrow (3, 3)\ ,\ (0, 0) \longrightarrow (2, 4)$$

ونكتفي بهذا القدر في حدود ما نحتاجه في موضوعات الكتاب.

تمارين (١٦)

(١) إذا كان

$$R_o(\pi)(x,y)=(x',y'),\quad R_{o'}(\pi)(x,y)=(x'',y'')$$
$$R_{o''}(\pi)(x,y)=(x''',y''')$$

أوجد صورة النقط (2,-3)، (0,2)، (-2,3)، (3,-2) حيث $o'\equiv(1,-2),\ o''\equiv(-1,3)$

(٢) أوجد x', y' حيث $R_o(\pi/2)\ (x,y)=(x',y')$ في الحالات الآتية :

(i) الانعكاس في محور y ثم الانعكاس في الخط $y+x=0$.

(ii) الانعكاس في محور y ثم الانعكاس في الخط $y=x$.

(٣) أوجد (x', y') إذا كانت $R_o(3\pi/2)(x,y)=(x',y')$ في الحالات الآتية:

(i) الانعكاس في محور x ثم الانعكاس في الخط $y+x=0$.

(ii) الانعكاس في محور x ثم الخط $y=x$.

(iii) الانعكاس في محور y ثم الخط $y=x$.

(iv) الانعكاس في محور x ثم الخط $x+y=0$.

(٤) أثبت أن التحويل $(x,y)\longrightarrow(ax-by, bx+ay)$ يمثل دوراناً حول نقطة الأصل حيث $a^2+b^2=1$.

(٥) إذا كان T_6 هو انتقال مقياسه 6Cm في اتجاه محور x، T_8 انتقال مقياسه 8Cm في اتجاه y فأوجد صورة النقطة (2,4) تحت تأثير $T_6\circ T_8, T_8\circ T_6$. هل $T_6\circ T_8=T_8\circ T_6$.

(٦) أوجد قاعدة إحداثية كل من الانتقالات الآتية:

(i) $(3,2)\longrightarrow(2,3)$ (ii) $(0,0)\longrightarrow(-3,5)$

(iii) (-3,5) ⟶ (0, 0) (iv) (5/2, 3) ⟶ (-5/2, 4/3)

(٧) اكتب كل من تحويل الانعكاس والانتقال في صورة تحويل خطي $T(x) = A\,x$

(٨) إذا كان $R_o(\pi)$ دوران مركزه نقطة الأصل، R_L انعكاس بالنسبة للخط المستقيم $y = 0$:

(i) أوجد إحداثيات صورة النقطة (x, y) في الحالات الآتية :

$$R_x, R_L \circ R_o, R_L, R_o(\pi), T_{2\lambda} \circ R_x$$

(ii) أوجد انتقال $T_{2\lambda}$ وانعكاس R_{L_1} بالنسبة للخط L_1 بحيث يتحقق .

$$R_L \circ R_o(\pi) = R_{L_1} \circ T_{2\lambda}$$

(٩) نفرض أن $ABCD$ مربع والنقطتين o, f هما منتصف الضلعين $\overline{CD}, \overline{BC}$ على الترتيب أوجد ما يلي :

(i) صورة المربع بالدوران $R_f(\pi/2)$.

(ii) صورة المربع بالدوران $R_o(\pi), R_f(\pi)$

(iii) صورة المربع بالدوران $R_o(\pi/2)$.

(iv) صورة المربع بدوران مقياسه $\pi/2$ ومركزه f ثم دوران مقياسه $\pi/2$ ومركزه o.

(v) صورة المربع بدوران مقياسه π ومركزه المربع، قارن بين الدورانات التي مركزها o, f.

(١٠) أثبت أنه إذا كانت $R_{o_1}(\pi)$ ، $R_{o_2}(\pi)$ دورانات فإن $R_{o_2}(\pi) \circ R_{o_1}(\pi)$ يكافئ انتقالاً مقياسه $2\overline{o_1o_2}$ في اتجاه الخط المرتب $(\overrightarrow{o_1o_2}, \leq)$.

هل الانتقال $R_{o_1}(\pi) \circ R_{o_2}(\pi)$ يكون هو نفسه الانتقال المكافئ للانتقال $R_{o_2}(\pi) \circ R_{o_1}(\pi)$.

(١١) اكتب صورة كاملة لتحويل الدوران بزاوية حادة θ ومركز الدوران $o' = (a, b)$.

(إرشاد : استخدم الانتقال من نقطة أصل الإحداثيات إلى النقطة o' ثم طبق الدوران حول نقطة الأصل الجديدة o').

(١٢) إذا كان $R_o(\pi), R_L$ كما في تمرين (٨) فأوجد صورة النقطة (x,y) بالراسم $R_o(\pi) \circ R_L$ وأوجد العلاقة بين الراسمين $R_L \circ R_o(\pi)$ ، $R_o(\pi) \circ R_L$.

وأوجد تحويلاً هندسياً مكافئاً للراسم $R_o(\pi) \circ R_L \circ R_L \circ R_o(\pi)$

(١٣) أثبت أن الانعكاس الإنزلاقي يكافئ تحصيل ثلاث انعكاسات بالنسبة لثلاث مستقيمات إثنان منهم متوازيان والثالث عمودي على كل من المستقيمين الأوليين، هل يهم الترتيب الذي نجري فيه تحصيل الانعكاس؟

(١٤) أثبت أن الانعكاس الإنزلاقي يكافئ تحصيل دوران $R_o.(\pi)$ وانعكاس بالنسبة لخط مستقيم. هل ترتيب التحصيل مهم؟

(١٥) أثبت أن تحصيل $R_o.(\pi)$ وانعكاس والعكس يكافئ انعكاساً انزلاقياً طالما كان مركز الدوران لا يقع على محور الانعكاس.

(١٦) أثبت أنه إذا كان G_R انعكاساً انزلاقياً فإن المحصلة $G_R^2 = G_R \circ G_R$ تكافئ انتقالاً. صف هذا الانتقال.

(١٧) أثبت أن تحصيل انعكاسين بالنسبة لمستقيمين متقاطعين هو دوران.

(١٨) أوجد مصفوفة التحويل لكل من :

(أ) دوران 30^o مركزه نقطة الأصل متبوعاً بانعكاس في المستقيم $y = x$

(ب) انعكاس في الخط المستقيم $y = -x$.

(جـ) دوران 180^o مركـزه نقطـة الأصـل متبوعـاً بانعكـاس في الخـط المستقيم $y = -x$.

(١٩) أوجد صورة الخط المستقيم $5x - 4y + 2 = 0$ تحت تأثير المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(٢٠) أوجد صورة القطع الناقص $\frac{(x+5)^2}{6} + \frac{(x-5)^2}{4} = 1$

تحت تأثير المصفوفة $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(٢١) أوجد صورة الخط المستقيم $y = mx + c$ بتحويل الدوران بزاوية $R_o(\frac{\pi}{4})$.

(٢٢) بالدوران $R_o(\pi/4)$ أثبت أن المعادلة $xy = 1$ هي قطع زائد قائم.

(٢٣) بـدوران المحـاور بزاويـة $\pi/4$ أوجـد المحـل الهندسـي الـذي تمثلـه المعادلة $x^2 + xy + y^2 = 1$.

المراجع
References

أولاً : المراجع الأجنبية:

[1] Hirsch, Morris, Differential Topology, Springer, (1997).

[2] Lee, John M., Introduction to Smooth Manifolds, Springer-Verlag, New York, (2003).

[3] Lee, John M., Introduction to Topological Manifolds, Springer-Verlag, New York, (2000).

[4] Spivak, Michael, Calculus on Manifolds, HarperCollins Publishers, (1965).

[5] Hicks N. J., Notes on Differential Geometry, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, (1965).

[6] Struik, D. J. Lectures on Classical Differential Geometry, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, (1961).

[7] Abraham Goetz, Introduction to Differential Geometry, Addison Wesley Publishing Company, (1970).

[8] John Opera, Differential Geometry and its Applications, China Machine Press, 2nd edition, (2004).

[9] Kreyszing, E., Differential Geometry, New York, Dover, (1991).

[10] Nirmala Prakash, Differential Geometry, an Integral Approach, Tateo McGraw-Hill, Publishing Company Limited, New Delhi, (1981).

[11] Larry E. Masfield, linear algebra with geometric applications, (Macrel Dekker Inc.), (1976).

[12] Efinov, N-V.; Rozendorn. E. R.; Linear Algebra and Multi-Dimensional Geometry, Mir Publishers, Moscow, (1975).

[13] Davd A. Brannan; Matthew Fifsplen and Jermy J. Gray; Geometry Cambridge Univ. Press, (1999).

[14] William Wooton, Edwin Beckenbch and Frank J. Fleming; Modern differential geometry, Houghton Mittlin Company.

[15] Kenyi Veno, An Introduction to Algebraic Geometry American Math. Society, (1995).

[16] Yaglom I. M.; A simple non-Euclidean geometry and its physical Basis, Springer-Verlag New York Inc, (1979).

[17] Carmo, M. do, Differential Geometry Curves and Surfaces, Prentice-Hall, New Jersey, (1976).

[18] Camaro, M. do, Riemannian geometry, Boston, mass, (1992).

[19] Daid Hilbert; Geometry and the imagination, New York, Chelas Publishing Co., (1983).

[20] Gray, A., Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica, 2nd ed. Boca Raton, FL : CRC Press, (1997).

[21] Barrett, O. Neill, B., Elementary Differential Geometry, Academic Press, New York, (1966).

[22] Efinov, N. V., Higher Geometry, Mir Publishers, Moscow, (1980).

ثانياً : المراجع العربية :

[1] هوارد أنتون، الجبر الخطي المبسط (جون وايلي وأولاده) (١٩٨٢).

[2] نصار السلمي، الهندسة التحليلية الفراغية (٢٠٠٣)، دار طيبة للنشر والتوزيع - القاهرة.

[3] نصار السلمي، الهندسة التحليلية المستوية (٢٠٠٣)، دار طيبة للنشر والتوزيع - القاهرة.

[4] نصار السلمي، أساسيات الهندسة الإقليدية واللاإقليدية - مكتبة الرشد - الرياض، (٢٠٠٥)م.

[5] نصار السلمي، هندسة التحويلات، (٢٠٠٤)، دار طيبة للنشر والتوزيع - القاهرة.

[6] نصار السلمي، تفاضل وتكامل - الجزء الرابع، (٢٠٠٥)، مكتبة الرشد - الرياض.

[7] نصار السُلمي، أساسيات الجبر الخطي، (٢٠٠٥)، مكتبة الرشد - الرياض.

[8] سيمور ليبشتر، الجبر الخطي، دار ماكجروهيل للنشر، سلسلة شوم (١٩٧٤).

[9] فرانك آيرز، المصفوفات، دار ماكجروهيل للنشر، سلسلة شوم، (١٩٧٤).

تم بحمد الله